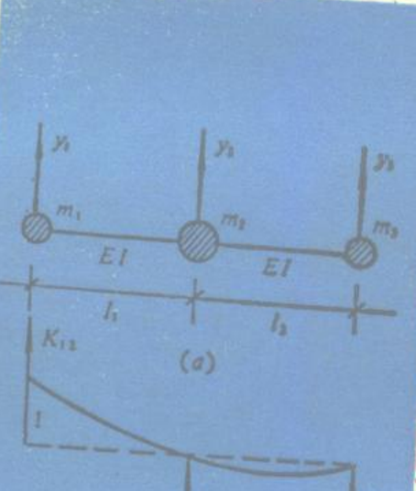
结构振动力学

张相庭　王志培　黄本才　编著



同济大学出版社

结构振动力学

张相庭　王志培　黄本才　编著

同济大学出版社

(沪)204号

内 容 提 要

本书是作者根据振动力学课程教学要求，结合教学和科研实践，参考多种现有教本归纳编写而成。

全书共分十章，前七章阐述振动力学基础及确定性振动，包括自由度和单、多、无限自由度体系的振动；后三章阐述随机振动，包括随机振动理论基础，单、多、无限自由度体系的振动和可靠性分析。

本书可作为高等院校振动力学课程教材，也可作为部分专业大学生和研究生的加深或选修教材，还可作为从事土木工程、机械工程等有关工程技术人员的参考书。

责任编辑　孟玉恩
封面设计　王肖生

结 构 振 动 力 学
张相庭　王志培　黄本才　编著
同济大学出版社出版
（上海四平路1239号）
新华书店上海发行所发行

吴县人民印刷二厂印刷

开本：850×1168　1/32　印张：13.625　字数：390千字
1994年5月1版　　1994年5月第1次印刷
印数：1—2000　　定价：7.80元
ISBN 7-5608-1348-8/TK·7

前　言

任何结构都承受荷载作用。绝大部分荷载，实际上都是动力荷载，使结构产生惯性力，引起程度不同的振动。只是有些荷载，它所产生的惯性力甚小可以忽略不计时，才可视为静力荷载。所以，从广义上说，静是相对的，动是绝对的。因此，结构振动及其力学问题，是工程上常遇和迫切需要研究的问题。结构振动力学就是研究这类课题力学问题的学科，是工程力学专业以及工科各有关专业的重要的必修课之一。

同济大学是全国第一批于1958年建立工程力学专业（原名应用力学专业）的学校，一开始就开设了结构振动力学，大力开展了这方面的教学和科学研究工作，承担了几十个与振动有关的研究课题，并写出了百余篇论文。改革开放以后，于1979年、1981年、1983年、1985年、1988年等多次编写本教材，并在教学实践中不断地进行修改补充。这次我们根据多年来的教学实践经验和研究成果，重新编写了本教材。

本书共分十章。前七章为结构确定性振动力学，后三章为结构随机振动力学。第一章重点介绍振动概念及与力学计算有关的自由度、运动方程等有关问题。第二、三、四章分别具体分析单、多自由度和无限自由度体系振动的力学问题。第五章介绍工程上常用的实用计算方法和近似计算方法。为了应用计算机计算振动问题，第六章介绍动力有限元法。由于很多振动是非线性的，实际上，线性是相对的，非线性是绝对的，前面几章线性结构的振动仅是非线性结构振动的一个特殊情况，第七章就为非线性振动作一些基本的介绍。第八章是结构随机振动基础，介绍概率密度函数及统计特征等有关内容，是随机振动入门的必经之路。第九章则具体地对单、多自由度和无限自由度体系的随机振动作出分析，第十章则是动力可靠性分析，是衡量结构动力可靠度的理论

基础。

经过几十年的教学和科研实践，在编写本书时，我们力求系统地、完整地阐述振动力学的基本理论和计算方法，同时也注意工程实践上的需要，引进以工程实际中抽象出来的结构振动力学实例和问题，使理论与实践相结合。在参阅国内外同类教材、专著的基础上，也引进最近十几年研究的最新成果，例如第五章等效团集质量法中的能量原则，就是我们研究的成果，并已应用于实际工程计算上，取得了很好的结果，是获得国家教委科技进步一等奖的成果之一。在建立运动方程及有关问题时，除了一般的按达伦伯原理建立以外，还突出其在振动力学的应用功能，对拉格朗日方程的应用也作了详细的叙述。在注意提高学生基本理论和计算训练的同时，还注意配合电子计算机的应用，在"动力有限元法"一章中，应用电算和程序，计算工程结构振动问题。本教材注意从简单到复杂、由浅入深，以合适的篇幅范围，全面讲述振动力学中的基本问题。

本书由张相庭编写第一、二、八、九、十章，王志培编写第三、六、七章，黄本才编写第四、五章。由于认识和实践的限制，本书定有很多需要改进之处，敬请读者和有关专家批评指正。

编　者

1992.8.10

目　　录

第一章　概述………………………………………………………… 1
§1-1　振动 …………………………………………………… 1
§1-2　自由度 ………………………………………………… 2
§1-3　结构振动运动方程的建立 …………………………… 5
§1-4　振动的分类 …………………………………………… 9
第二章　单自由度体系的振动……………………………………… 12
§2-1　运动方程的建立 ……………………………………… 12
§2-2　无阻尼体系的自由振动 ……………………………… 18
§2-3　有阻尼体系的自由振动 ……………………………… 19
§2-4　无阻尼体系的强迫振动 ……………………………… 35
§2-5　有阻尼体系的强迫振动 ……………………………… 45
§2-6　“拍”的现象——同方向振动的合成………… 53
第三章　多自由度体系的振动……………………………………… 61
§3-1　无阻尼自由振动 ……………………………………… 61
§3-2　在简谐力作用下的稳态强迫振动 …………… 100
§3-3　用振型分解法计算强迫振动 …………………… 105
§3-4　拉格朗日运动方程 ………………………………… 122
第四章　无限自由度体系的振动………………………………… 132
§4-1　单跨梁的横向弯曲自由振动 …………………… 132
§4-2　考虑轴力、剪力和转动影响梁的弯曲自由振动 142
§4-3　杆件的剪切、轴向和扭转自由振动………… 148
§4-4　主振型的正交性 …………………………………… 152
§4-5　无限自由度体系的强迫振动 …………………… 154
第五章　自振频率和振型的近似计算方法　………………… 167
§5-1　能量法 ………………………………………………… 167
§5-2　集中质量法 …………………………………………… 183
§5-3　等效团集质量法 …………………………………… 188

§ 5-4 矩阵迭代法 …………………………………… 192
第六章 动力有限元法 …………………………………… 202
§ 6-1 用拉格朗日方程推导单元运动方程 ………… 202
§ 6-2 形状函数$N_i(x)$为多项式时的单元刚度矩阵 210
§ 6-3 一致质量矩阵 …………………………………… 215
§ 6-4 单元等效杆端力向量 ……………………………… 216
§ 6-5 坐标变换 ………………………………………… 217
§ 6-6 结构整体运动方程 ………………………………… 225
§ 6-7 支承条件的引入 …………………………………… 235
§ 6-8 无阻尼自由振动 …………………………………… 261
§ 6-9 振型分解法计算强迫振动 ………………………… 275
第七章 非线性振动 …………………………………… 284
§ 7-1 非线性振动的基本概念 …………………………… 284
§ 7-2 直接积分法 ………………………………………… 288
§ 7-3 等线性法 ………………………………………… 296
§ 7-4 摄动法和渐近法 …………………………………… 300
§ 7-5 数值解法 ………………………………………… 306
§ 7-6 威尔逊θ法 …………………………………… 320
§ 7-7 纽马克法 ………………………………………… 322
第八章 随机变数和随机过程的统计特征 ………………… 327
§ 8-1 随机振动的基本概念 ……………………………… 327
§ 8-2 随机变数的概率统计特征 ………………………… 330
§ 8-3 多维概率分布和概率密度函数 …………………… 342
§ 8-4 正态分布的统计特征 ……………………………… 345
§ 8-5 常用的随机过程 …………………………………… 349
§ 8-6 随机过程的概率统计特征 ………………………… 353
第九章 结构随机振动响应 …………………………… 378
§ 9-1 线性结构干扰与响应的关系 ……………………… 378
§ 9-2 单自由度结构的随机响应 ………………………… 386
§ 9-3 多自由度和无限自由度结构的随机响应 ……… 399

第十章　响应峰值分布及可靠性分析……………………… 412
§10-1　穿越分析……………………………………… 412
§10-2　响应峰值分布(极大值分布)………………… 420
§10-3　极值的概率分布……………………………… 424

第一章　概　　述

结构除承受静力荷载从而应进行静力分析以外，还常常承受动力荷载，它使结构产生振动，从而需要进行动力分析。实际上，动力荷载是普遍存在的，只不过有些荷载引起的振动很小，可以作为静力荷载来处理。结构动力学就是对动力荷载引起结构振动的理论和应用进行分析研究，从而提出解决工程振动问题的方法。本章着重就一些最基本的概念，如振动、自由度、运动方程的建立和振动分类等作出详细的介绍，是振动力学的基础和入门。

§1-1　振　　动

在静力分析中，我们假定作用在结构物上的是静力荷载，这种荷载的大小、方向和作用点都不随时间而变化，加载过程非常缓慢，因而使结构的质量不产生加速度，也就不产生惯性力。静与动是相比较而言的，通常，若引起的加速度很小，因而其产生的惯性力与荷载值比较起来是极其微小可以忽略时，也可当作静力荷载来处理。但在工程实际中，经常也会碰到另一类荷载，即所谓动力荷载，以及受动力荷载作用的结构所产生的振动现象。例如：打桩机的锤击引起地基的振动；高层楼房、电视塔等受不规则风力的作用引起结构顶端来回运动；地震作用产生的地震力引起整个构筑物的振动等。其它动力荷载如核爆炸对建筑物施加的冲击波，工厂车间内的车床，起重机、电动机、汽轮发电机、锻锤等在工作时对厂房结构及基础产生的荷载等等。我们把这种随时间而变化的荷载，称为动力荷载，简称动载。动载作用的基本特点是使结构的质量产生显著的加速度，因而使结构产生较大的惯性力，并引起结构的振动。我们把物体在某一位置附近来回运动的现象称为振动。这时，表示运动特征的某些物理量（例如位移、速度、加速度等）将

时而增大，时而减少地反复变化。

应当说明，静与动和加载慢与快是相对的，它与结构自振周期有密切关系，若荷载从零增至最大值的加载时间远大于结构自振周期，例如前者为10s，后者为1s，则加载过程可认为是缓慢的，可作为静力荷载对待。但是若荷载从零增至最大值的加载时间接近或小于自振周期，则加载过程应认为是快速的，这种荷载应作为动力荷载来处理。

结构振动力学的基本任务在于分析结构（质点系或分布质量体系）振动的固有力学特性，分析在动力荷载下结构位移和内力等等，以使设计时能满足刚度和强度的要求，或采取减振或防振的措施，在进一步的研究中，还要满足动力稳定性的要求。因而在振动情况下的刚度、强度和稳定性是振动力学研究的基本内容。

本教材只研究结构振动时的刚度和强度问题，稳定性问题将留给专门课程进行研究。

§1-2 自 由 度

在振动过程中，结构上凡有质量处均产生惯性力。为了确定结构的位移和内力，必须确定每一质量的独立的位移参数。

确定在振动过程中任一时刻全部质量的位置所需独立几何（位移）参数数目称为结构的自由度。

任何实际结构的质量都是连续分布的，有的还附以若干个附加团集质量(集中质量)，因而都是无限自由度结构。但是，当结构杆件的质量与附加团集质量相比甚小，或者为了计算的简化把杆件的连续质量团集成若干个团集质量的话，则体系就变成有限自由度结构。

任一团集质量在空间需由六个独立的位移参数来确定其位置，即沿三个轴的独立线位移和绕三个轴的角位移，因而具有六个自由度。图1-1所示一团集质量（刚体）位于悬臂杆的端点上，在空间它具有六个自由度。

自由度数对某一结构来说并不是固定的，随结构计算假设而变化。对图 1-1 所示结构，如果作为平面问题来处理，它只有三个自由度，即两个方向轴的独立线位移和绕另一方向轴的角位移。当认为团集质量面积较小而作为一个质点来处理时，它只有两个自由度，即沿两个轴的独立线位移。当杆件只考虑弯曲或剪切变形而忽略轴向变形时，质量M沿杆轴方向的位置是确定的，因而只能沿着垂直于杆轴方向运动，所以，此时只有一个自由度了。以下对于受弯杆，如无特殊说明，通常均忽略轴向变形的影响。

图 1-2 (*a*) 所示一有团集质量的简支梁，梁的本身质量忽略不计，梁在振动过程中变形如图所示。由于质量只有一个独立的位移参数，因而只有一个自由度。图 1-2 (*b*) 所示的双伸臂梁，一端为刚性支座，另端为弹性支座。假定梁的抗弯刚度$EI=\infty$，即在振动时不产生弹性变形，梁的轴线永远保持直线，整根梁绕着刚性支座转动。梁上虽有三个团集质量，但要确定这些团集质量在振动时的位置，只需知道梁的转角α就可以了，所以，这个具有三个团集质量但抗弯刚度 $EI=\infty$ 的梁，在振动过程中的独立坐标只有一个，它就是角位移 α，或任一质量处的位移 y，因此，这个结构是单自由度结构。

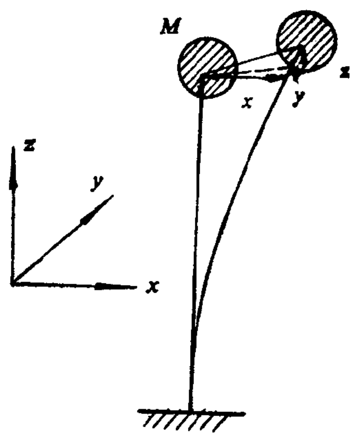


图 1-1　单质量结构的自由度

图 1-2 (*c*)所示简支梁上有两个团集质量，两个团集质量在振动时的位置，可仅用y_1，y_2 两个独立坐标来表示。因此该结构是两个自由度的结构。图 1-2 (*d*) 所示的框架，略去框架本身质量不计，有三个团集质量。质量 M_1，M_2 在振动过程中，只能在水平方向产生位移(忽略杆件的轴向变形)，而质量M_3可沿水平向和竖向产生位移，总共需四个独立坐标来确定三个质量的位置，因此，这个框架是四个自由度的结构。

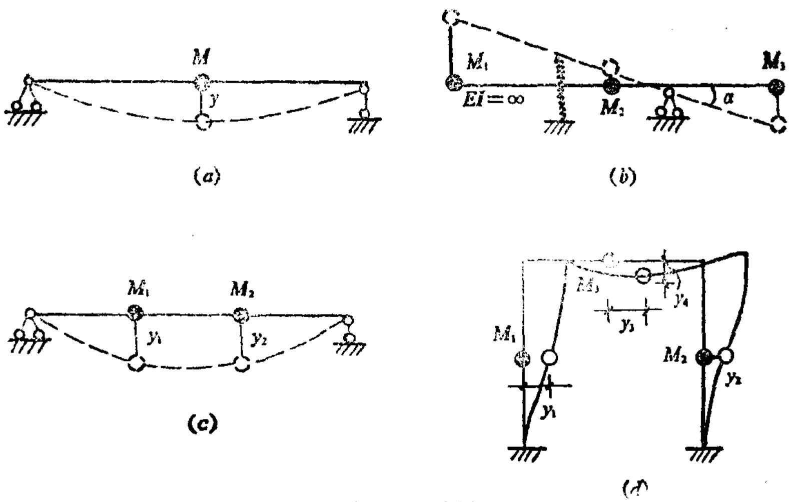


图 1-2　自由度分析的例子

如果结构的质量不是集中的，而是沿着它的杆件长度分布的，则除了杆件的刚度 $EI=\infty$ 的特殊情形以外，都属于无限自由度的结构。因为用有限的独立坐标是无法确定振动时分布质量的位置的。例如图 1-3 所示自重为 pkN/m 的简支梁就是无限自由度结构。其 dx 微段的质量为 $dm=\frac{p}{g}dx$，如图 1-3 所示。

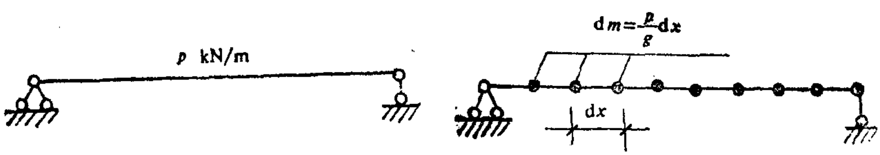


图 1-3　无限自由度的例子

最后必须指出的是：

1. 结构自由度的数目与集中质量数目无关（图 1-2 (d)所示结构上有三个集中质量，但具有四个自由度）。

2. 结构自由度数目与超静定次数无关(图 1-2 (d) 所示三次超静定结构有四个自由度)。

3. 结构自由度数目与计算假定有关。一般地说，自由度数目

越多，就愈反映结构实际动力性能，但计算工作量也就愈大。

§1-3 结构振动运动方程的建立

在通常情况下，独立的几何参数取的是位移。为了求出各种动力响应，应先列出动力位移方程。描述动力位移的数学方程，称为结构的运动方程。运动方程的解就提供了位移过程，从而可求出其它各种所需求的结构动力响应。

运动方程的建立，是振动力学的核心问题。只有运动方程建立得正确，整个解算才能正确。兹介绍几种建立运动方程常用的基本原理。

一、D'Alembert （达伦伯）原理

根据牛顿第二定律，任何质量M的动量变化率等于作用在这个质量上的力(包括恢复力 $R(t)$、阻尼力$D(t)$、外力 $P(t)$)，即

$$P_M(t)=\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}[M\dot{y}(t)] \tag{1-1}$$

当质量 M 不随时间变化时，上式变成

$$P_M(t)=M\ddot{y}(t)$$

即

$$P_M(t)-M\ddot{y}(t)=0 \tag{1-2}$$

上式表示，作用在质量上的力$P_M(t)$同与加速度方向相反的惯性力($-M\ddot{y}$)平衡。换句话说，如果我们把($-M\ddot{y}$)加到原来受力的质量上，则动力问题就可作为静力平衡问题来处理。这种列运动方程式的方法，也常称为动静法，或惯性力法。

动静法用加惯性力($-M\ddot{y}$)的方法把动力方程化成静力方程来处理，较为方便，因而得到广泛的应用。

二、Lagrange(拉格朗日)方程

把作用在任意质量M_i上的所有力(包括惯性力),对任意虚位移 δy_i 所作的功应等于零,得到

$$\sum_i P_{Mi}\delta y_i - \sum_i M_i \ddot{y}_i \delta y_i = 0 \tag{1-3}$$

设任一质量处的 y_i 可用 n 个广义坐标 $q_1, q_2, \cdots, q_j, \cdots, q_n$ 来表示,j 为广义坐标序号,则

$$y_i(t) = y_i(q_1(t), q_2(t), \cdots, q_j(t), \cdots, q_n(t)) \tag{1-4}$$

此时,由三种力组成的各点的力 P_{Mi} 在虚位移上所作的功为

$$\sum_i P_{Mi}\delta y_i = \sum_i P_{Mi}\left(\frac{\partial y_i}{\partial q_1}\delta q_1 + \frac{\partial y_i}{\partial q_2}\delta q_2 + \cdots + \frac{\partial y_i}{\partial q_j}\delta q_j + \cdots + \frac{\partial y_i}{\partial q_n}\delta q_n\right) = \sum_j\left(\sum_i P_{Mi}\frac{\partial y_i}{\partial q_j}\right)\delta q_j$$

$$= \sum_j\left(-\frac{\partial U}{\partial q_j} + \frac{\partial W_D}{\partial q_j} + \frac{\partial W_P}{\partial q_j}\right)\delta q_j \tag{a}$$

式中,u为变形能,W_D 和 W_P 分别为阻尼力和外力所作的功。

惯性力在虚位移上所作的功为

$$-\sum_i M_i\ddot{y}_i\delta y_i = -\sum_i\sum_j M_i\ddot{y}_i\frac{\partial y_i}{\partial q_j}\delta q_j$$

$$= -\sum_i\sum_j\left[\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\left(M_i\dot{y}_i\frac{\partial y_i}{\partial q_j}\right)\delta q_j - M_i\dot{y}_i\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\left(\frac{\partial y_i}{\partial q_j}\right)\delta q_j\right]$$

$$= -\sum_i\sum_j\left[\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\left(M_i\dot{y}_i\frac{\partial y_i}{\partial q_j}\right)\delta q_j - M_i\dot{y}_i\frac{\partial \dot{y}_i}{\partial q_j}\delta q_j\right] \tag{b}$$

$$\because \quad T = \frac{1}{2}\sum_i M_i\dot{y}_i^2$$

$$\therefore \quad \frac{\partial T}{\partial \dot{q}_j} = \sum_i M_i\dot{y}_i\frac{\partial \dot{y}_i}{\partial \dot{q}_j} = \sum_i M_i\dot{y}_i\frac{\partial y_i}{\partial q_j},$$

$$\frac{\partial T}{\partial q_j} = \sum_i M_i\dot{y}_i\frac{\partial \dot{y}_i}{\partial q_j}$$

故式(b)变成

$$-\sum_i M_i \ddot{y}_i \delta y_i = -\sum_j \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\frac{\partial T}{\partial \dot{q}_j}\delta q_j + \sum_j \frac{\partial T}{\partial q_j}\delta q_j \tag{c}$$

将式(a)及(c)代入式(1-3)，取第 j 项，因 δq_j 可以是任意的，我们得到

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\frac{\partial T}{\partial \dot{q}_j} - \frac{\partial T}{\partial q_j} + \frac{\partial U}{\partial q_j} - \frac{\partial W_D}{\partial q_j} - \frac{\partial W_P}{\partial q_j} = 0 \tag{1-5a}$$

如取拉格朗日函数 L 为

$$L = T - U \tag{1-6}$$

广义力 P_j 为

$$P_j = \frac{\partial W_D}{\partial q_j} + \frac{\partial W_P}{\partial q_j} \tag{1-7}$$

因变形能仅与位移y或广义坐标 q 有关，则式(1-5a)可写成

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\frac{\partial L}{\partial \dot{q}_j} - \frac{\partial L}{\partial q_j} = P_j \tag{1-5b}$$

式(1-5a)和(1-5 b)是两种不同的表达形式，都称为拉格朗日方程。根据拉格朗日方程，我们也能直接导出运动方程。对于结构特别复杂的情况，按拉格朗日方程仍可方便地导出运动方程。

三、Hamilton(哈密顿)原理

直接采用变分概念进行分析时，最常用的就是 Hamilton 原理。对于任意时段，例如 t_1 到t_2这个时段，在一切可能的运动中；只有真实运动使某一物理量（称为“作用量”，它的代表形式为 $\int_{t_1}^{t_2} f(\dot{q}_j, q_j, t)\mathrm{d}t$）取得极值。约在 18 世纪以前，Hamilton 提出的作用量为

$$H = \int_{t_1}^{t_2} (T - U + W_D + W_P)\mathrm{d}t \tag{1-8a}$$

如令

$$\overline{L} = T - U + W_D + W_P \tag{1-9}$$

则式(1-8 a)可表示为

$$H=\int_{t_1}^{t_2}\overline{L}\,\mathrm{d}t \tag{1-8d}$$

根据变分极值原理，Hamilton 原理可表示为

$$\delta H=\delta\int_{H_1}^{H_2}\overline{L}\,\mathrm{d}t=0 \tag{1-10}$$

Hamilton 原理说明，在任何时间区段 t_1 到 t_2 内，动能、变形能、阻尼力和外力作用的功的变分必须等于零，这时所得到的才是真实的运动。在数学上，它是固定边界条件下的泛函极值问题。

Hamilton 原理与拉格朗日方程是可以互相转化的。将式(1-10)进行变分运算，得到

$$\begin{aligned}\delta H&=\int_{t_1}^{t_2}\delta\overline{L}\,\mathrm{d}t=\int_{t_1}^{t_2}\sum_j\left(\frac{\partial\overline{L}}{\partial q_j}\delta q_j+\frac{\partial\overline{L}}{\partial\dot{q}_j}\delta\dot{q}_j\right)\mathrm{d}t\\&=\int_{t_1}^{t_2}\sum_j\left(\frac{\partial\overline{L}}{\partial q_j}\delta q_j+\frac{\partial\overline{L}}{\partial\dot{q}_j}\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\delta q_j\right)\mathrm{d}t\end{aligned}$$

将式(1-5 b)重新写成

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\frac{\partial\overline{L}}{\partial\dot{q}_j}-\frac{\partial\overline{L}}{\partial q_j}=0$$

则上式可写为

$$\begin{aligned}\delta H&=\int_{t_1}^{t_2}\sum_j\left[\left(\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\frac{\partial\overline{L}}{\partial\dot{q}_j}\right)\delta q_j+\frac{\partial\overline{L}}{\partial\dot{q}_j}\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\delta q_j\right]\mathrm{d}t\\&=\int_{t_1}^{t_2}\sum_j\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\left(\frac{\partial\overline{L}}{\partial\dot{q}_j}\delta q_j\right)\mathrm{d}t\\&=\int_{t_1}^{t_2}\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\sum_j\left(\frac{\partial\overline{L}}{\partial\dot{q}_j}\delta q_j\right)\mathrm{d}t\\&=\left[\sum_j\frac{\partial\overline{L}}{\partial\dot{q}_j}\delta q_j\right]_{t_2}-\left[\sum_j\frac{\partial\overline{L}}{\partial\dot{q}_j}\delta q_j\right]_{t_1}\end{aligned}$$

因为 $$[\delta q_j]_{t_2}=[\delta q_j]_{t_1}=0$$

从而得到 $$\delta H=0$$

如果说哈密顿原理是积分形式的变分原理，则拉格朗日方程

实际是哈密顿原理用微分方程来表示的另一种形式，结果是相同的。

我们在下一章将有运用这三个原理列出运动方程的实例。

§1-4 振动的分类

按不同的标准，振动可有不同的分类。

一、按振动是否具有重现性分类

若在相同的条件下，振动过程将总是完全相同的，这种振动称为确定性振动。例如机器的偏心质量所产生的周期荷载(图1-4)，如果偏心质量起始位置总是相同的，则该荷载是重现性荷载，也称确定性荷载，在相同的工作条件下，每次开机都将在结构上引起相同的振动过程，因而是确定性振动。

但是像地震作用、风荷载之类，在不同时间，即使在同一地点完全相同的条件之下，也不会重现同一波形。如果上面所述机器的偏心质量的起始位置是随意变化着的，则每次开机也不会出现完全相同的波形。这种非重现性荷载，称为随机荷载，随机荷载作用下的振动称为随机振动。如果结构特性(例如阻尼力、弹性模量等)是随机变化的，即使在确定性荷载作用下，也将产生随机振动。

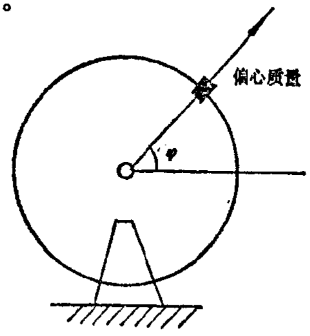


图1-4　由偏心质量引起的周期振动

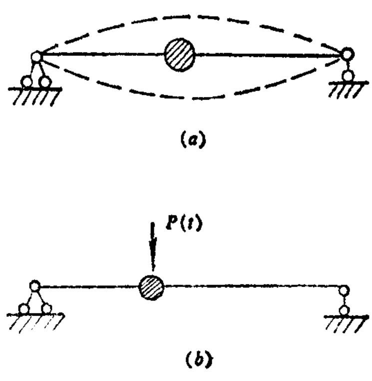


图1-5　自由振动和强迫振动