高等学校教学用書

实变函数論

下册

И. П. 那湯松著

高等教育出版社

高等学校教学用書

实变函数論

下册

И. П. 那湯松 著
徐瑞云 譯
陈建功 校

高等教育出版社

本書系根据苏联国立技术理論書籍出版社 (Государственное издательство технико-теоретической литературы) 出版的那湯松(И. П. Натансон) 著“实变函数論” (Теория функций вещественной переменной) 1950 年版譯出的，現由譯者根据原書增訂本（1957 年第二版）修訂。原書經苏联高等教育部审定为高等学校教学参考書。

全書共十八章，中譯本暂分上下两册出版。

实 变 函 数 論

下 册

И. П. 那湯松著

徐瑞云譯

高等教育出版社出版 北京宣武門內承恩寺7号
（北京市书刊出版业营业許可証出字第054号）

上海洪兴印刷厂印刷　新华书店發行

統一书号 13010·85　开本 850×1168 1/32　印张 8 9/16
字数 208,000　印数 10,001—13,000　定价(4) ¥1.00
1955 年 6 月第 1 版　1958 年 12 月第 2 版(修訂本)
1959 年 3 月上海第 6 次印刷

下 册 目 录

第十章 奇异积分、三角級数、凸函数

在本章中我們打算将函数論方法用到特定的分析問題上去。順便也講授函数論中的一些新的知識。

§1. 奇异积分的概念

为了使讀者便于認識奇异积分这个重要概念的基础知識，我們先从例題談起。

設有函数

$$\Phi_n(t,x)=\frac{1}{\pi}\cdot\frac{n}{1+n^2(t-x)^2}。\tag{1}$$

固定 n 和 x，而 $0\leqslant t\leqslant 1$。那末这个函数是 t 的連續函数。于是对任意可和函数 $f(t)$ $(0\leqslant t\leqslant 1)$ 可以置

$$f_n(x)=\frac{n}{\pi}\int_0^1\frac{f(t)\,dt}{1+n^2(t-x)^2}。\tag{2}$$

設 $0<x<1$。假如 $f(t)$ 在 $t=x$ 是連續的話，那末我們可以証明

$$\lim_{n\to\infty}f_n(x)=f(x)。\tag{3}$$

为此首先注意到，当 $n\to\infty$ 时，

$$\int_0^1\Phi_n(t,x)\,dt=\frac{n}{\pi}\int_0^1\frac{dt}{1+n^2(t-x)^2}=$$

$$=\frac{1}{\pi}\int_{-nx}^{n(1-x)}\frac{dz}{1+z^2}\to\frac{1}{\pi}\int_{-\infty}^{+\infty}\frac{dz}{1+z^2}=1。\tag{4}$$

因此，要建立(3)，只要証明

$$r_n=f_n(x)-f(x)\int_0^1\Phi_n(t,x)\,dt=\frac{n}{\pi}\int_0^1\frac{f(t)-f(x)}{1+n^2(t-x)^2}dt$$

当 $n\to\infty$ 时趋向于 0 就够了。

为此目的，对于任意的 $\varepsilon>0$，取 $\delta>0$，使当 $|t-x|<\delta$ 时，$|f(t)-f(x)|<\varepsilon$。不妨假定 $0<x-\delta<x+\delta<1$。将 r_n 写成

$$r_n=\frac{n}{\pi}\int_0^{x-\delta}\frac{f(t)-f(x)}{1+n^2(t-x)^2}dt+\frac{n}{\pi}\int_{x-\delta}^{x+\delta}\frac{f(t)-f(x)}{1+n^2(t-x)^2}dt+$$
$$+\frac{n}{\pi}\int_{x+\delta}^{1}\frac{f(t)-f(x)}{1+n^2(t-x)^2}dt=A_n+B_n+C_n。$$

首先估計 B_n:

$$|B_n|\leqslant\frac{n}{\pi}\int_{x-\delta}^{x+\delta}\frac{|f(t)-f(x)|}{1+n^2(t-x)^2}dt\leqslant\varepsilon\cdot\frac{n}{\pi}\int_{x-\delta}^{x+\delta}\frac{dt}{1+n^2(t-x)^2}<$$
$$<\frac{\varepsilon}{\pi}\int_{-\infty}^{+\infty}\frac{dz}{1+z^2}=\varepsilon。$$

在积分 A_n 中 $|t-x|\geqslant\delta$, 因此

$$|A_n|\leqslant\frac{n}{\pi(1+n^2\delta^2)}\int_0^{x-\delta}|f(t)-f(x)|dt<\frac{A(\delta)}{n},$$

其中 $A(\delta)$ 与 n 无关。同样可得

$$|C_n|<\frac{C(\delta)}{n},\ 由是,\ |r_n|<\varepsilon+\frac{A(\delta)+C(\delta)}{n},$$

因此,当 n 适当大时,

$$|r_n|<2\varepsilon。$$

故当 $n\to\infty$ 时, r_n 趋向于 0, 于是証得(3)。

不难了解(3)式的成立基于 $\Phi_n(t,x)$ 的哪些性質。关鍵在于,当 x 与 t 的值多少有些可覺察的距离时,对于非常大的 n, $\Phi_n(t,x)$ 之值非常的小。因此,积分(2)的值是由被积分函数在 x 附近的函数值所支配,但当点 t 靠近 x 时, $f(t)$ 之值几乎等于 $f(x)$ (因当 $t=x$ 时,它連續)。所以当 n 很大时,将 $f(x)$ 代替 $f(t)$ 时,积分(2)之值改变得很少,就是說,积分(2)几乎等于

$$f(x)\cdot\frac{n}{\pi}\int_0^1\frac{dt}{1+n^2(t-x)^2},$$

再应用(4),所以就几乎等于 $f(x)$。

如上的函数 $\Phi_n(t,x)$ $(n=1,2,3,\cdots)$ 称为核。核之准确定义如下:

定义 設函数 $\Phi_n(t,x)$ $(n=1,2,3,\cdots)$ 定义于正方形: $a\leqslant t\leqslant b$, $a<x<b$; 对于每一个固定的 x, 关于 t 是可和的。当 $a\leqslant\alpha<x<\beta\leqslant b$ 时,

$$\lim_{n\to\infty}\int_\alpha^\beta\Phi_n(t,x)dt=1,$$

則称函数 $\Phi_n(t,x)$ 是一个核。

若 $\Phi_n(t,x)$ 是一个核,称具有形式

$$f_n(x)=\int_a^b\Phi_n(t,x)f(t)dt$$

的积分为奇异积分。

这种积分的理論有很多用处。这理論的主要問題在于建立当 $n\to\infty$ 时积分 $f_n(x)$ 与函数 $f(t)$ 在 $t=x$ 的函数值間之关系。由于改变 $f(t)$ 在一点的函数值时并不影响 $f_n(x)$ 之值，所以必須要求 $f(t)$ 在点 $t=x$ 之函数值 $f(x)$ 与它在近旁点的函数值有关系。这种关系中最簡單的形式乃为 $f(t)$ 在 $t=x$ 为連續。此外，如 $f(t)$ 在 $t=x$ 为近似連續，如 x 点为 $f(t)$ 之勒貝格点等等。

此地我們要引入勒貝格的一个定理，以备将来之用：

定理 1 (A. 勒貝格). **設在** $[a, b]$ **上有一列一致有界的可測函数** $\varphi_1(t)$，$\varphi_2(t)$，$\varphi_3(t)$，…：

$$|\varphi_n(t)|<K。\tag{5}$$

假如对于 $[a, b]$ **中所有的** c **成立着**

$$\lim_{n\to\infty}\int_a^c \varphi_n(t)\,dt=0,\tag{6}$$

那末，对于 $[a, b]$ **上可和的任何函数** $f(t)$，**下面的等式**

$$\lim_{n\to\infty}\int_a^b f(t)\varphi_n(t)\,dt=0\tag{7}$$

成立。

証明 設 $[\alpha, \beta]$ 是含在 $[a, b]$ 中的一綫节，則由(6)，

$$\lim_{n\to\infty}\int_\beta^\alpha \varphi_n(t)\,dt=0。\tag{8}$$

首先假設 $f(t)$ 是一連續函数。对于 $\varepsilon>0$，于 $[a, b]$ 中作如下的分点：$x_0=a<x_1<x_2<\cdots<x_m=b$，使 $f(t)$ 在 $[x_{k-1}, x_k]$ 上的振幅小于 $\varepsilon(k=1, 2, \cdots, m)$。那末

$$\int_a^b f(t)\varphi_n(t)\,dt=\sum_{k=0}^{m-1}\int_{x_k}^{x_{k+1}}[f(t)-f(x_k)]\varphi_n(t)\,dt+$$
$$+\sum_{k=0}^{m-1}f(x_k)\int_{x_k}^{x_{k+1}}\varphi_n(t)\,dt。\tag{9}$$

但是

$$\left|\int_{x_k}^{x_{k+1}}[f(t)-f(x_k)]\varphi_n(t)\,dt\right|\leqslant K\varepsilon(x_{k+1}-x_k),$$

所以(9)式右方第一項小于 $K\varepsilon(b-a)$。对于(9)式的末項，由(8)可知当 $n\to\infty$ 时趋向于 0，所以当 $n>n_0$ 时亦小于 ε。所以对于这种 n，

$$\left|\int_a^b f(t)\varphi_n(t)\,dt\right|<\varepsilon[K(b-a)+1],$$

由是(7)式当 $f(t)$ 为連續函数时成立。

其次，設 $f(t)$ 是一有界可測函数：

$$|f(t)|\leqslant M。$$

設 $\varepsilon>0$，由盧沟定理，有連續函数 $g(t)$ 适合于

$$mE(f\neq g)<\varepsilon,\ |g(t)|\leqslant M。$$

于是

$$\int_a^b f(t)\varphi_n(t)dt=\int_a^b[f(t)-g(t)]\varphi_n(t)dt+\int_a^b g(t)\varphi_n(t)dt,$$

但

$$\left|\int_a^b[f(t)-g(t)]\varphi_n(t)dt\right|=\left|\int_{E(f\neq g)}[f(t)-g(t)]\varphi_n(t)dt\right|<2KM\varepsilon。$$

而积分 $\int_a^b g\varphi_n dt$ 由已經証明之結果，当 n 适当大时，其絕对值小于 ε。因此对于这种 n，

$$\left|\int_a^b f(t)\varphi_n(t)dt\right|<(2KM+1)\varepsilon,$$

由是(7)式当 $f(t)$ 为有界可測函数时成立。

最后，設 $f(t)$ 是一任意的可和函数。

对于 $\varepsilon>0$，由于积分的絕对連續性，存在着如下的 $\delta>0$：当 $[a,b]$ 中的可測集 e 的測度 $me<\delta$ 时，

$$\int_e|f(t)|dt<\varepsilon。$$

然后用第四章§4的定理1，作有界可測函数 $g(t)$，使

$$mE(f\neq g)<\delta。$$

不妨假設，$g(t)$ 在点集 $E(f\neq g)$ 上取值0。那末

$$\int_a^b f(t)\varphi_n(t)dt=\int_a^b[f(t)-g(t)]\varphi_n(t)dt+\int_a^b g(t)\varphi_n(t)dt,$$

但
$$\left|\int_a^b[f(t)-g(t)]\varphi_n(t)dt\right|=\left|\int_{E(f\neq g)}f(t)\varphi_n(t)dt\right|\leqslant K\varepsilon,$$

又当 n 足够大时 $\left|\int_a^b g\varphi_n dt\right|$ 小于 ε，因此对于这种 n，

$$\left|\int_a^b f(t)\varphi_n(t)dt\right|<(K+1)\varepsilon。$$

定理証畢。

例 設 $\varphi_n(t)=\cos nt$。則

$$\int_a^c \varphi_n(t)\,dt=\frac{\sin nc-\sin na}{n}\to 0。$$

此时 $\{\varphi_n(t)\}$ 显然满足定理 1 中所說的两个条件。同样的，对于 $\varphi_n(t)=\sin nt$，也是如此。因此証得下面的定理：

定理 2 (黎曼—勒贝格). 設 $f(t)$ 是 $[a, b]$ 上的任一可和函数，则

$$\lim_{n\to\infty}\int_a^b f(t)\cos nt\,dt=\lim_{n\to\infty}\int_a^b f(t)\sin nt\,dt=0。$$

特别是，可和函数 $f(t)$ 的富里埃系数

$$a_n=\frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(t)\cos nt\,dt,\ b_n=\frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(t)\sin nt\,dt$$

当 $n\to\infty$ 时趋向于 0 ①。

如果关系(7)对于任一在 $[a, b]$ 上为可和的函数 $f(t)$ 成立，那末称序列 $\{\varphi_n(t)\}$ 弱收斂于 0 ②。

§ 2. 用奇异积分表示在給定点的函数值

今后若沒有特別說明，都假定核 $\Phi_n(t, x)$ 当 n 及 x 固定时是 t 的有界函数。那末奇异积分

$$f_n(x)=\int_a^b \Phi_n(t, x)f(t)\,dt$$

对于任何可和函数 $f(t)$ 都有意义。

定理 1 (A. 勒贝格). 如果对于固定的 x 及任意的 $\delta>0$，核 $\Phi_n(t, x)$ 在两間隔

$$[a, x-\delta],\ [x+\delta, b]$$

中都弱收斂于 0，且

$$\int_a^b |\Phi_n(t, x)|\,dt<H(x),$$

而 $H(x)$ 与 n 无关，那末对于任意可和函数 $f(t)$，在其連續点 x，成立着

$$\lim_{n\to\infty} f_n(x)=f(x)。$$

証明 因 $\Phi_n(t, x)$ 是一个核，所以

$$\lim_{n\to\infty}\int_a^b \Phi_n(t, x)\,dt=1。$$

① 当 $f(t)$ 为平方可和时，这个命題从 $\sum(a_n^2+b_n^2)<\infty$ 可以明白。

② 此地与泛函分析中的定名有些出入。

所以只要証明

$$\lim_{n\to\infty}\int_a^b [f(t)-f(x)]\Phi_n(t,x)\,dt=0$$

就行了。为此目的，对于 $\varepsilon>0$，取 $\delta>0$ 使当 $|t-x|<\delta$ 时，

$$|f(t)-f(x)|<\frac{\varepsilon}{3H(x)}。$$

那末对于任意的 n，

$$\left|\int_{x-\delta}^{x+\delta}[f(t)-f(x)]\Phi_n(t,x)\,dt\right|<\frac{\varepsilon}{3}。$$

但当 $n\to\infty$ 时，两积分

$$\int_a^{x-\delta}[f(t)-f(x)]\Phi_n(t,x)\,dt,\quad \int_{x+\delta}^b [f(t)-f(x)]\Phi_n(t,x)\,dt$$

都趋向于 0。因此必有 n_0：当 $n>n_0$ 时，两积分的絕对値都小于 $\frac{\varepsilon}{3}$。因此，当 $n>n_0$ 时，

$$\left|\int_a^b [f(t)-f(x)]\Phi_n(t,x)\,dt\right|<\varepsilon。$$

定理証畢。

这个定理是关于可和函数在連續点的表示。但是可和函数可能沒有連續点，所以这个定理的重要性大为減少。

对于可和函数在下面的这种点，在該点的函数値等于該函数不定积分的导数，或者是該函数的勒貝格点，那末上面的表示問題較为重要。因为我們已知这两种点都几乎塡滿函数的定义綫节①。下面我們要研究这种表示問題。

补助定理(И. П. 那湯松) 設 $f(t)$ 是在 $[a,b]$ 上定义的可和函数，且具有如下的性質：

$$M=\sup_{0<h<b-a}\left\{\frac{1}{h}\left|\int_a^{a+h}f(t)\,dt\right|\right\}<+\infty。\tag{1}$$

那末对于任何一个在 $[a,b]$ 上为可和的不取負値的减少函数 $g(t)$，积分

$$\int_a^b f(t)g(t)\,dt \tag{2}$$

① 对于可和(更一般为可測的)函数的另外一种“正則点”是近似連續点。但是这种点对于奇异积分理論而言不很有兴趣，因为在(那湯松，有关函数在近似連續点用奇异积分的表示，Fund. Math., 18,1931,99—109 頁)中已証：不存在这种奇异积分，它可以表示任何可和函数在其所有近似連續点的值。

是存在的(在 $t=a$ 可能不是普通的勒貝格积分)且成立

$$\left|\int_a^b f(t)g(t)\,dt\right|\leqslant M\int_a^b g(t)\,dt. \tag{3}$$

所可注意的是：在补助定理的假定中，可能是 $g(a)=+\infty$。如果 $g(a)<<+\infty$，那末 $g(t)$ 乃为有界。于是积分(2)常存在且是普通的勒貝格积分。

要証明补助定理，我們不妨假設 $g(b)=0$。事实上，如果不是这样，那末替代 $g(t)$ 我們引进一个函数 $g^*(t)$ 如下：

$$g^*(t)=\begin{cases} g(t), & \text{如果 } a\leqslant t<b;\\ 0, & \text{如果 } t=b. \end{cases}$$

如果本定理对于 $g^*(t)$ 是眞的，那末对于 $g(t)$ 也是眞的，因为将 $g^*(t)$ 改为 $g(t)$ 时并不影响我們的积分值。所以不妨假定 $g(b)=0$。

設 $a<\alpha<b$，在 $[\alpha, b]$ 上函数 $g(t)$ 为有界，則积分

$$\int_\alpha^b f(t)g(t)\,dt \tag{4}$$

当然存在。如果置

$$F(t)=\int_a^t f(u)\,du,$$

則积分(4)可以用司帝吉斯积分表示：

$$\int_\alpha^b f(t)g(t)\,dt=\int_\alpha^b g(t)\,dF(t),$$

由部分积分法，乃得

$$\int_\alpha^b f(t)g(t)\,dt=-F(\alpha)g(\alpha)+\int_\alpha^b F(t)\,d[-g(t)].$$

由(1)，

$$|F(t)|\leqslant M(t-a), \tag{5}$$

又因 $g(t)$ 是一减少函数，所以

$$g(\alpha)(\alpha-a)\leqslant\int_a^\alpha g(t)\,dt. \tag{6}$$

因此，

$$|F(\alpha)g(\alpha)|\leqslant M\int_a^\alpha g(t)\,dt.$$

另一方面，$-g(t)$ 是一增加函数，所以由(5)式，

$$\left|\int_\alpha^b F(t)\,d[-g(t)]\right|\leqslant M\int_\alpha^b (t-a)\,d[-g(t)].$$

将上面右边的积分由部分积分法改写为

$$\int_\alpha^b (t-a)\,d[-g(t)]=g(\alpha)(\alpha-a)+\int_\alpha^b g(t)\,dt.$$

由此与(6)，就得着

$$\left|\int_\alpha^b (t-a)\,d[-g(t)]\right|\leqslant\int_a^b g(t)\,dt。$$

綜合上面所述，乃得

$$\left|\int_\alpha^b f(t)\,g(t)\,dt\right|\leqslant M\left\{\int_a^\alpha g(t)\,dt+\int_a^b g(t)\,dt\right\}。\qquad (7)$$

这个不等式虽然在假定 $g(b)=0$ 下証得的，但是根据上面的解釋，易知沒有这个限制，(7)式也是眞的。因此我們可以将上限 b 换以 β，其中 $\alpha<<\beta<b$。当 α 及 β 均趋向于 a 时，就得到

$$\lim\int_\alpha^\beta f(t)\,g(t)\,dt=0,$$

因此知道积分(2)是存在的。于(7)，令 $\alpha\to a$，即得(3)。补助定理因此証畢①。

定理 2 (П. И. 罗曼諾夫斯基). **設核 $\Phi_n(t,x)$ 是正的且具有如下的性質：固定 n 与 x 时，t 的函数 $\Phi_n(t,x)$ 在 $[a,x]$ 为增加而在 $[x,b]$ 为减少。那末对于任何可和函数 $f(t)$，当 $f(x)$ 为 $f(t)$ 之不定积分在 $t=x$ 的导数时，等式**

$$\lim_{n\to\infty}\int_a^b f(t)\,\Phi_n(t,x)\,dt=f(x)\qquad (8)$$

成立。

証明 因为 $\Phi_n(t,x)$ 是一个核，所以只要証明

$$\lim_{n\to\infty}\int_a^b [f(t)-f(x)]\,\Phi_n(t,x)\,dt=0\qquad (9)$$

就够了。

将(9)中积分分成两部分：$\int_a^x$ 及 $\int_x^b$。此地只研究第二部分，对于第一部分可以同样处理。

对于 $\varepsilon>0$，取这样的正数 δ：使当 $0<h\leqslant\delta$ 时，

$$\left|\frac{1}{h}\int_x^{x+h}[f(t)-f(x)]\,dt\right|<\varepsilon,$$

此事之可能，由于 $f(x)$ 为 $f(t)$ 的不定积分在 $t=x$ 的导数。

那末应用前述之补助定理，

$$\left|\int_x^{x+\delta}[f(t)-f(x)]\,\Phi_n(t,x)\,dt\right|\leqslant\varepsilon\int_x^{x+\delta}\Phi_n(t,x)\,dt\leqslant\varepsilon\int_a^b\Phi_n(t,x)\,dt,$$

① (3)式中的 M 不能再减小，因为当 $f(t)=1$ 时，(3)式变成等式。

因
$$\lim_{n\to\infty}\int_a^b \Phi_n(t, x)\,dt=1,$$
所以 $\int_a^b \Phi_n(t, x)\,dt\ (n=1, 2, 3, \cdots)$ 是有界的。因此存在着如下的 $K(x)$：
$$\int_a^b \Phi_n(t, x)\,dt<K(x)。$$

于是，
$$\left|\int_x^{x+\delta}[f(t)-f(x)]\Phi_n(t, x)\,dt\right|<\varepsilon K(x)。\tag{10}$$

另一方面，如果 $x+\delta\leqslant t\leqslant b$，则
$$\Phi_n(t, x)\leqslant\Phi_n(x+\delta, x)\leqslant\frac{1}{\delta}\int_x^{x+\delta}\Phi_n(t, x)\,dt<\frac{K(x)}{\delta}。$$

所以函数 $\varphi_n(t)=\Phi_n(t, x)$ 在綫节 $[x+\delta, b]$ 上为一致有界卽滿足 § 1 中定理 1 之条件(5)。又那边的(6)式所述条件也是滿足的，因为 $\Phi_n(t, x)$ 是核。因此 $\Phi_n(t, x)$ 在 $[x+\delta, b]$ 中弱收斂于 0。所以当 n 适当大的时候，
$$\left|\int_{x+\delta}^b[f(t)-f(x)]\Phi_n(t, x)\,dt\right|<\varepsilon。$$

对于这种 n，将此式与(10)式合并，乃有
$$\left|\int_x^b[f(t)-f(x)]\Phi_n(t, x)\,dt\right|<\varepsilon[K(x)+1]。$$

因此
$$\lim_{n\to\infty}\int_a^b[f(t)-f(x)]\Phi_n(t, x)\,dt=0。\tag{11}$$

定理証畢。

我們将此定理应用到維尔斯脫劳司积分
$$W_n(x)=\frac{n}{\sqrt{\pi}}\int_a^b e^{-n^2(t-x)^2}f(t)\,dt。$$

函数
$$W_n(t, x)=\frac{n}{\sqrt{\pi}}e^{-n^2(t-x)^2}$$
是核，因为当 $\alpha<x<\beta$ 时
$$\int_\alpha^\beta W_n(t, x)\,dt=\frac{1}{\sqrt{\pi}}\int_{n(\alpha-x)}^{n(\beta-x)}e^{-z^2}dz\to\frac{1}{\sqrt{\pi}}\int_{-\infty}^{\infty}e^{-z^2}dz=1。$$

这些函数 $W_n(t, x)$ 是正的，且在 $a\leqslant t\leqslant x$ 是增加的，在 $x\leqslant t\leqslant b$ 是减少的。因此，对于所有的 $f(t)\in L$，对于每一点 x，当 $f(x)$ 是 $f(t)$ 的不定积分在 $t=x$ 的导数时，成立着
$$\lim_{n\to\infty}W_n(x)=f(x)。$$

为便利計，我們规定下面一个名称，如果 $\Phi(t, x)$ 与 $\Psi(t, x)$ 有如下的关系：

$$|\Phi(t, x)| \leqslant \Psi(t, x)$$

并且 $\Psi(t, x)$ 当 x 固定时在 $[a, x]$ 为 t 的增加函数，在 $[x, b]$ 为 t 的减少函数，則称 $\Psi(t, x)$ 是 $\Phi(t, x)$ 的**峰形优越函数**。

定理 3 (**Д. К. 法捷耶夫**). **如果核 $\Phi_n(t, x)$ 对于每一个 n 有一个峰形优越函数 $\Psi_n(t, x)$，且有 $K(x)$ 适合**

$$\int_a^b \Psi_n(t, x)\,dt < K(x) < +\infty$$

时，那末对于任何函数 $f(t) \in L$，当 $t=x$ 为 $f(t)$ 的勒貝格点时，(8) 式成立。

証明　于此只要証明 (11) 式成立就够了。对于 $\varepsilon>0$，取这样的正数 δ；使当 $0<h\leqslant\delta$ 时，

$$\frac{1}{h}\int_x^{x+h} |f(t)-f(x)|\,dt < \varepsilon。$$

根据补助定理，乃有

$$\left|\int_x^{x+\delta} \{f(t)-f(x)\}\Phi_n(t, x)\,dt\right| \leqslant \int_x^{x+\delta} |f(t)-f(x)|\,\Psi_n(t, x)\,dt \leqslant$$

$$\leqslant \varepsilon\int_x^{x+\delta} \Psi_n(t, x)\,dt < \varepsilon\cdot K(x)。$$

另一方面，在 $[x+\delta, b]$ 中，函数列 $\varphi_n(t)=\Phi_n(t, x)$ 弱收斂于 0。因为当 $t\in[x+\delta, b]$ 时，

$$|\Phi_n(t, x)| \leqslant \Psi_n(t, x) \leqslant \Psi_n(x+\delta, x) \leqslant \frac{1}{\delta}\int_x^{x+\delta} \Psi_n(t, x)\,dt < \frac{K(x)}{\delta}。$$

注意到这个事实以后，知道法捷耶夫定理之証明与上述定理 2 之証明相同①。

§ 3. 在富里埃級数論中的应用

在第七章 § 3 中，我們已經定义过函数 $f(x)$ 关于任一規格化正交系 $\{\omega_k(x)\}$ 的富里埃級数。特别，取規格化正交系为三角函数系

① Д. К. 法捷耶夫("О представлении суммируемых функций сингулярными интегралами в точках Lebesgue'a", Матем. сборник, 卷 1 (43), №3, 1936, 351—368 頁) 証明，要 (8) 式对于所有 $f(t)\in L$ 在 $t=x$ 为勒貝格点成立的話，定理中的条件也是必要的。

$$\frac{1}{\sqrt{2\pi}},\ \frac{\cos x}{\sqrt{\pi}},\ \frac{\sin x}{\sqrt{\pi}},\ \frac{\cos 2x}{\sqrt{\pi}},\ \frac{\sin 2x}{\sqrt{\pi}},\ \cdots\cdots, \tag{1}$$

則 $f(x)$ 的富里埃級数就是

$$\frac{a_0}{2}+\sum_{k=1}^{\infty}(a_k\cos kx+b_k\sin kx), \tag{2}$$

其中

$$a_k=\frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi}f(x)\cos kx\,dx,\ b_k=\frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi}f(x)\sin kx\,dx。 \tag{3}$$

在第七章中我們假設 $f(x)\in L_2$。这个假設保証我們对于任一規格化正交系，函数 $f(x)$ 的富里埃系数

$$c_k=\int_a^b f(x)\,\omega_k(x)\,dx$$

是存在的。但是(1)中一切函数是有界的，所以只要 $f(x)$ 是可和函数，那末(3)式所表示的系数以及(2)式总是存在的。

关于(2)式的收斂問題之討論，需要研究几个奇异积分，事实上，設

$$S_n(x)=\frac{a_0}{2}+\sum_{k=1}^{n}(a_k\cos kx+b_k\sin kx),$$

則由(3)，
$$S_n(x)=\frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi}\left[\frac{1}{2}+\sum_{k=1}^{n}\cos k(t-x)\right]f(t)\,dt。$$

利用熟知的公式①

$$\frac{1}{2}+\sum_{k=1}^{n}\cos k\alpha=\frac{\sin\frac{2n+1}{2}\alpha}{2\sin\frac{\alpha}{2}}, \tag{4}$$

所以

$$S_n(x)=\frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi}\frac{\sin\frac{2n+1}{2}(t-x)}{\sin\frac{t-x}{2}}f(t)\,dt。 \tag{5}$$

① 这个公式是容易导出的。为此只要将下列諸式边边相加：

$$\sin\left(k+\frac{1}{2}\right)\alpha-\sin\left(k-\frac{1}{2}\right)\alpha=2\sin\frac{\alpha}{2}\cos k\alpha\quad(k=1,2,\cdots,n)$$

$$\sin\frac{\alpha}{2}=\sin\frac{\alpha}{2}。$$

这就給出

$$\sin\left(n+\frac{1}{2}\right)\alpha=2\sin\frac{\alpha}{2}\left[\frac{1}{2}+\sum_{k=1}^{n}\cos k\alpha\right],$$

从而得到(4)。

称这个积分为逊列克來奇异积分。

現在我們不預备討論(2)式的收斂問題，讀者如有兴趣，可参閱齐葛蒙特的三角級数論①。但是我們要討論一下級数(2)依照蔡查罗方法求和的問題。此法是求最初 n 个 $S_k(x)$ 之算术平均

$$\sigma_n(x)=\frac{S_0(x)+S_1(x)+\cdots+S_{n-1}(x)}{n} \tag{6}$$

的極限。显然的，当(2)式在点 x 收斂于 S 时，则 $\sigma_n(x)$ 亦收斂于 S。但当(6)式的極限存在时，級数(2)却未必收斂②。

利用(5)式，将 $\sigma_n(x)$ 写为

$$\sigma_n(x)=\frac{1}{2n\pi}\int_{-\pi}^{\pi}\left[\sum_{k=0}^{n-1}\sin\frac{2k+1}{2}(t-x)\right]\frac{f(t)}{\sin\frac{t-x}{2}}dt。$$

由于

$$\cos 2k\alpha-\cos 2(k+1)\alpha=2\sin\alpha\sin(2k+1)\alpha \qquad (k=0,1,\cdots,n-1),$$

所以
$$2\sin\alpha\sum_{k=0}^{n-1}\sin(2k+1)\alpha=1-\cos 2n\alpha=2\sin^2 n\alpha。$$

因此，
$$\sum_{k=0}^{n-1}\sin(2k+1)\alpha=\frac{\sin^2 n\alpha}{\sin\alpha}。 \tag{7}$$

利用(7)式，乃得

$$\sigma_n(x)=\frac{1}{2n\pi}\int_{-\pi}^{\pi}\left[\frac{\sin n\frac{t-x}{2}}{\sin\frac{t-x}{2}}\right]^2 f(t)\,dt。 \tag{8}$$

称积分(8)为飞耶奇异积分。我們要証明它滿足法捷耶夫定理中的条件。

首先，函数 $f(t)=1$ 的富里埃系数为

$$a_0=2,\ a_k=b_k=0 \qquad (k=1,2,\cdots)。$$

所以，对于这个函数

$$S_n(x)=1 \qquad (n=0,1,2,\cdots),$$

因此 $\sigma_n(x)=1$。

用飞耶积分表示 $\sigma_n(x)$，得

① A. 齐葛蒙特，Тригонометрические ряды. ГОНТИ, 1939。

② 参考例如 И. И. 普立瓦洛夫，Ряды Фурье, ОНТИ, 1934，或 Л. В. 康脫洛維奇，Определенные интегралы и ряды Фурье, изд. ЛГУ, 1940，或 Г. М. 菲赫金哥尔茨，微积分学教程，卷 3，ГТТИ, 1949。