结构力学的矩阵方法

蔡四维 著

科学出版社

结构力学的矩阵方法

蔡 四 维 著

科 学 出 版 社

1 9 7 8

内 容 简 介

本书介绍利用矩阵分析杆系结构的几种方法——力法、位移法、矩阵转移法及迭代法.

其中对工程上采用最多的位移法、劲度矩阵，叙述较详，并由著者提出一种便于高阶超静定结构计算的分块降阶法.

第一、二两章为矩阵运算方面的基本知识. 从第三章起为结构力学的内容，是针对已具有一般结构力学知识的读者而写的.

本书可供土建工程技术人员和大专院校师生阅读.

结构力学的矩阵方法

蔡 四 维 著

*

科 学 出 版 社 出 版

北京朝阳门内大街 137 号

沈阳市第二印刷厂印刷

新华书店北京发行所发行 各地新华书店经售

*

1975 年 7 月第 一 版　　开本：787×1092 1/32

1978 年 6 月第二次印刷　　印张：5

印数：20,951—53,550　　字数：111,000

統一书号：13031·269

本社书号：430·13—2

定 价：0.50 元

序

利用矩阵分析结构问题，能使计算简化成一系列四则运算，便于用电子数字计算机时作程序设计．对一些难以用旧有方法求解的复杂结构，当采用矩阵分析并利用电子计算机后，就能以很快的速度，求出一定精度的解答来．

早在1954年前后，航空工程结构计算方面，首先提出用矩阵分析的一系列论文，它引起了各国工程界的高度重视．近年来，由于解决生产问题的需要和电子计算机的大量生产，使得这个方面的内容，更臻于充实完善．

本书仅述及杆系结构的矩阵分析．除杆系结构分析外，矩阵方法已能有效地解决弹性力学的一些问题，这即是通称的“有限元素法”．在结构振动分析方面，利用矩阵方法，也同样取得了很大的成就．但弹性力学的“有限元素法”及振动问题的矩阵分析法，其基本原理、方法和本书所述有关方法，其实质是相同的．例如，就有限元素法中最常采用的位移法而论，和杆系结构矩阵分析的位移法相对照，二者处理问题，都不外乎是建立各单元体劲度矩阵、列结点力系平衡方程、解这些方程求结点位移．不同的只是杆系结构以单杆为单元体，其劲度矩阵是按梁理论由材料力学方法求出．而有限元素法以块体为单元体，用弹性力学的形变方程和物理方程求劲度矩阵．至于杆系结构振动问题的矩阵分析方法，和本书所述，则更相近．不过处理振动问题，应从单杆振动的微分方程去求劲度矩阵或柔度矩阵．同时在列刚架平衡方程式时，须计入与侧移相应的惯性力．而本书所述的矩阵转移法，和迭代

法，显然都可推广用于杆系结构的振动分析。矩阵转移法，它又能成功地解弹性板的振动问题。目前，"有限元素法"并广泛地用在流体力学、热传导学、土力学等各个领域。因此，我很希望本书或能作为物理、力学中矩阵分析方法的入门。

我摸索这一专题，为时不长，由于个人思想政治水平和科学水平的限制，对问题难免管窥蠡测，编著内容中谬误之处，恳请读者予以批评指正。

蔡 四 维

目　录

序 …… i
第一章　矩阵的基本知识 …… 1
§ 1.1　一般定义 …… 1
§ 1.2　方阵的秩 …… 4
§ 1.3　矩阵运算 …… 4
§ 1.4　逆矩阵 …… 7
§ 1.5　矩阵的特征值 …… 8
第二章　线代数方程组解法 …… 10
§ 2.1　高司消去法 …… 10
§ 2.2　平方根法 …… 13
§ 2.3　矩阵求逆 …… 14
§ 2.4　简单迭代法 …… 19
第三章　结构的柔度矩阵和劲度矩阵 …… 22
§ 3.1　单杆的柔度矩阵和劲度矩阵 …… 22
§ 3.2　结构的柔度矩阵和劲度矩阵 …… 27
§ 3.3　结构柔度矩阵的计算 …… 28
§ 3.4　结构劲度矩阵的计算 …… 31
§ 3.5　变截面杆件结构的柔度矩阵与劲度矩阵 …… 38
§ 3.6　变截面杆件劲度矩阵的近似计算 …… 41
§ 3.7　连续梁劲度矩阵 K_0 的简化计算 …… 44
§ 3.8　杆的轴向变形和轴向力，桁架的柔度矩阵及劲度矩阵 …… 48
第四章　力法解超静定结构 …… 53
§ 4.1　一般的力法方程式及其求解 …… 53
§ 4.2　力法的矩阵分析 …… 54

§ 4.3　跨间荷载问题 ……………………………………………57
§ 4.4　按迭加法求解 ……………………………………………60
§ 4.5　高阶超静定结构的简化计算 ……………………………63
第五章　位移法解超静定结构……………………………………69
§ 5.1　一般的位移法典型方程式 ………………………………69
§ 5.2　位移法的矩阵分析 ………………………………………72
§ 5.3　关于温度变化,支座变位…………………………………75
§ 5.4　关于杆跨间截面的内力和变位 …………………………78
§ 5.5　高阶超静定结构的分块降阶法 …………………………78
§ 5.6　具有结点荷载的高阶超静定结构 ………………………85
第六章　迭代法解超静定结构……………………………………87
§ 6.1　基本方程式 ………………………………………………87
§ 6.2　无侧移刚架 ………………………………………………89
§ 6.3　侧移刚架 …………………………………………………98
§ 6.4　变截面刚架的侧移分析 ………………………………100
§ 6.5　迭代法方程式的降阶措施 ……………………………107
第七章　连续转移法解超静定结构 ……………………………111
§ 7.1　状态矩阵及转移矩阵 …………………………………111
§ 7.2　梁的转移矩阵 …………………………………………112
§ 7.3　梁的结点矩阵 …………………………………………116
§ 7.4　连续转移法 ……………………………………………117
§ 7.5　连续梁计算的简化 ……………………………………120
§ 7.6　按迭加法解连续梁 ……………………………………125
§ 7.7　刚架的转移计算 ………………………………………130
第八章　变截面杆件的特性常数…………………………………141
§ 8.1　变截面杆件的形常数 …………………………………141
§ 8.2　变截面杆件的载常数 …………………………………146
主要参考文献………………………………………………………151

第一章　矩阵的基本知识

§ 1.1. 一 般 定 义

排成 m 行 n 列矩形格式的数的集合，称为矩阵。例如线代数方程组

$$
\begin{aligned}
&a_{11}x_1+a_{12}x_2+\cdots+a_{1n}x_n=y_1,\\
&a_{21}x_1+a_{22}x_2+\cdots+a_{2n}x_n=y_2,\\
&\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\\
&a_{m1}x_1+a_{m2}x_2+\cdots+a_{mn}x_n=y_m;
\end{aligned}
$$

中左边未知量 x_1，x_2，$\cdots x_n$ 各系数的集合，可用矩阵表示如：

$$
\boldsymbol{A}=\begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n}\\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n}\\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots\\ a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{mn} \end{bmatrix}.
$$

常将这矩阵 $\boldsymbol{A}$ 简写为 $\boldsymbol{A}=[a_{ij}]$，其中 $i=1,2,\cdots m$，$j=1,2,\cdots n$。并称 $\boldsymbol{A}$ 为 m 行 n 列矩阵，或 $m\times n$ 阶矩阵。称 a_{ij} 为矩阵 $\boldsymbol{A}$ 的元素。

行数 $m=1$ 的矩阵，称行阵。列数 $n=1$ 的矩阵，称列阵。前述线性方程组中未知量 x 和右端量 y，就可以两个列阵形式表示，其中：

$$
\boldsymbol{X}=\begin{bmatrix} x_1\\ x_2\\ \vdots\\ x_n \end{bmatrix},\quad \boldsymbol{Y}=\begin{bmatrix} y_1\\ y_2\\ \vdots\\ y_m \end{bmatrix}.
$$

为节省书写版面，本书采用符号{ }表示列阵，故可将上述列阵写成

$$\boldsymbol{X}=\{x_1\ \ x_2\cdots x_n\},\quad \boldsymbol{Y}=\{y_1\ \ y_2\cdots y_m\}.$$

将矩阵 $\boldsymbol{A}$ 的行和列的位置互换而组成的另一个矩阵，称为 $\boldsymbol{A}$ 的转置矩阵，以 $\boldsymbol{A}'$ 表示. 如

$$\boldsymbol{A}=\begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{mn} \end{bmatrix},\ \boldsymbol{A}'=\begin{bmatrix} a_{11} & a_{21} & \cdots & a_{m1} \\ a_{12} & a_{22} & \cdots & a_{m2} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{1n} & a_{2n} & \cdots & a_{mn} \end{bmatrix}.$$

可见 $\boldsymbol{A}$, $\boldsymbol{A}'$ 互为转置矩阵. 即 $(\boldsymbol{A}')'=\boldsymbol{A}$.

行数和列数相同的矩阵，称方阵. 正整数 $n(=m)$ 称方阵的阶数.

方阵中，除位于主对角线上的元素而外，其他元素均为零时，称对角方阵.

对角方阵中，各元素均为 1 时，称单位方阵. 常用 $\boldsymbol{E}$ 表单位方阵.

$$\boldsymbol{E}=\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0\cdots 0 \\ 0 & 1 & 0\cdots 0 \\ \cdots & \cdots & \cdots \\ 0 & 0 & 0\cdots 1 \end{bmatrix}.$$

方阵中，如其元素间有 $a_{ij}=a_{ji}$ 的关系，则称这方阵为对称方阵. 例如：

$$\begin{bmatrix} 4 & 7 & 0 \\ 7 & 1 & 2 \\ 0 & 2 & 3 \end{bmatrix}.$$

即为对称方阵. 显然，如方阵 $\boldsymbol{A}$ 为对称方阵，则 $\boldsymbol{A}'=\boldsymbol{A}$.

方阵中，主对角线以左或以右全部元素为零时，称为三角形方阵. 例如：

左(下)三角形方阵：

$$\begin{bmatrix} a_{11} & 0 & \cdots 0 \\ a_{21} & a_{22} & \cdots 0 \\ \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots a_{nn} \end{bmatrix}.$$

右(上)三角形方阵：

$$\begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots a_{1n} \\ 0 & a_{22} & \cdots a_{2n} \\ \cdots & \cdots & \cdots \\ 0 & 0 & \cdots a_{nn} \end{bmatrix}.$$

有时为了计算方便，而须将矩阵分块．即将一个矩阵，看成是几个低阶矩阵的组合．例如可以将矩阵：

$$\begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & a_{14} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} & a_{24} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} & a_{34} \end{bmatrix}$$

分块而得：

$$\left[\begin{array}{c:ccc} a_{11} & a_{12} & a_{13} & a_{14} \\ \hdashline a_{21} & a_{22} & a_{23} & a_{24} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} & a_{34} \end{array}\right], \quad \left[\begin{array}{cc:cc} a_{11} & a_{12} & a_{13} & a_{14} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} & a_{24} \\ \hdashline a_{31} & a_{32} & a_{33} & a_{34} \end{array}\right], \quad \cdots$$

同一矩阵分块的方式可有很多．分块时所取用的沿竖直和水平分块线，都规定取贯穿全矩阵的直线．分出来的诸低阶矩阵称原矩阵的**子矩阵**．

§ 1.2. 方阵的秩

以某一方阵的元素为元素组成的行列式，称为这方阵的行列式。方阵 $\boldsymbol{A}$ 的行列式以 $|\boldsymbol{A}|$ 表示。

方阵中某 k 个行 k 个列交叉位置上的元素全体，按其原有顺序组成的一个 k 阶行列式，叫方阵的 k 阶子式。

方阵中不等于零的子式的最高阶数，称为这方阵的秩。根据行列式的特性，可见 n 阶方阵中，如其仅 r 个行并 r 个列各为线性无关，则这方阵的秩即为 r。例如：

$$\boldsymbol{A}=\begin{bmatrix} 3 & 2 & 2 \\ 1 & 2 & -1 \\ 2 & -1 & 3 \end{bmatrix},$$

其秩为 $r=3$。因为：

$$|\boldsymbol{A}|=\begin{vmatrix} 3 & 2 & 2 \\ 1 & 2 & -1 \\ 2 & -1 & 3 \end{vmatrix}\neq 0.$$

而

$$\boldsymbol{B}=\begin{bmatrix} 3 & 2 & 1 \\ 1 & 2 & -1 \\ 2 & -1 & 3 \end{bmatrix},$$

其秩为 $r=2$。因其首列元素可由另二列元素相加得到。

方阵 $\boldsymbol{A}$ 如其 $|\boldsymbol{A}|=0$，则称这方阵为奇异的或降秩的。如 $|\boldsymbol{A}|\neq 0$，则称之为非奇异的或满秩的。

§ 1.3. 矩阵运算

矩阵 $\boldsymbol{A}=[a_{ij}]$ 的各个元素乘以数 α 所得的矩阵，叫矩阵

$\boldsymbol{A}$与数α的乘积。即：

$$\alpha \boldsymbol{A}=\begin{bmatrix} \alpha a_{11} & \alpha a_{12} & \cdots & \alpha a_{1n} \\ \alpha a_{21} & \alpha a_{22} & \cdots & \alpha a_{2n} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ \alpha a_{n1} & \alpha a_{n2} & \cdots & \alpha a_{nn} \end{bmatrix}.$$

设矩阵$\boldsymbol{A}=[a_{ij}]$，$\boldsymbol{B}=[b_{ij}]$同阶，则这两个矩阵的和或差，是一个矩阵$\boldsymbol{C}$，$\boldsymbol{C}$的元素等于$\boldsymbol{A}$，$\boldsymbol{B}$对应元素的和或差。即：

$$\boldsymbol{C}=[a_{ij}\pm b_{ij}]$$

$$=\begin{bmatrix} a_{11}\pm b_{11} & a_{12}\pm b_{12} & \cdots & a_{1n}\pm b_{1n} \\ a_{21}\pm b_{21} & a_{22}\pm b_{22} & \cdots & a_{2n}\pm b_{2n} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{m1}\pm b_{m1} & a_{m2}\pm b_{m2} & \cdots & a_{mn}\pm b_{mn} \end{bmatrix}.$$

根据以上定义，设$\boldsymbol{A}$, $\boldsymbol{B}$, $\boldsymbol{C}$是同阶矩阵，α, β是数。则：

1. $\boldsymbol{A}+\boldsymbol{B}=\boldsymbol{B}+\boldsymbol{A}$；
2. $\boldsymbol{A}-(\boldsymbol{B}+\boldsymbol{C})=(\boldsymbol{A}-\boldsymbol{B})-\boldsymbol{C}$；
3. $\alpha(\boldsymbol{A}+\boldsymbol{B})=\alpha\boldsymbol{A}+\alpha\boldsymbol{B}$；
4. $(\alpha+\beta)\boldsymbol{A}=\alpha\boldsymbol{A}+\beta\boldsymbol{A}$；
5. $\alpha(\beta\boldsymbol{A})=\alpha\beta\boldsymbol{A}$；
6. $(\boldsymbol{A}+\boldsymbol{B})'=\boldsymbol{A}'+\boldsymbol{B}'$。

两矩阵$\boldsymbol{A}$, $\boldsymbol{B}$相乘，仅当$\boldsymbol{A}$的列数等于$\boldsymbol{B}$的行数时，才能定义。这时，乘积$\boldsymbol{C}$是一个矩阵，其第i行第k列的元素，等于$\boldsymbol{A}$的第i行各元素与$\boldsymbol{B}$的第k列各元素两两相乘之积的和。即如：

$$\boldsymbol{C}=\boldsymbol{A}\cdot\boldsymbol{B},$$

则：
$$\boldsymbol{C}=[c_{ik}],$$

其中：$c_{ik}=a_{i1}b_{1k}+a_{i2}b_{2k}+\cdots+a_{in}b_{nk}$。

常将矩阵乘法列成如下算式：

$$
\begin{aligned}
&\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad\quad \begin{bmatrix} b_{11} & b_{12} & \cdots & b_{1k} & \cdots & b_{1p} \\ b_{21} & b_{22} & \cdots & b_{2k} & \cdots & b_{2p} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ b_{n1} & b_{n2} & \cdots & b_{nk} & \cdots & b_{np} \end{bmatrix} = \boldsymbol{B} \\
&\boldsymbol{A} = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{i1} & a_{i2} & \cdots & a_{in} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{mn} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} & \vdots & \\ \cdots\cdots & c_{ik} & \\ & & \\ & & \end{pmatrix} = \boldsymbol{C}.
\end{aligned}
$$

可见$\boldsymbol{C}$的行数等于$\boldsymbol{A}$的行数，$\boldsymbol{C}$的列数等于$\boldsymbol{B}$的列数。

关于矩阵乘法的几个特性：

1．$\boldsymbol{B}, \boldsymbol{C}$同阶时

$\boldsymbol{A}(\boldsymbol{B}+\boldsymbol{C})=\boldsymbol{AB}+\boldsymbol{AC}$,

$(\boldsymbol{B}+\boldsymbol{C})\boldsymbol{A}=\boldsymbol{BA}+\boldsymbol{CA}$.

2．$\boldsymbol{A}(\boldsymbol{BC})=(\boldsymbol{AB})\boldsymbol{C}$.

3．$(\boldsymbol{AB})'=\boldsymbol{B}'\boldsymbol{A}'$,

$(\boldsymbol{ABC}\cdots\boldsymbol{MN})'=\boldsymbol{N}'\boldsymbol{M}'\cdots\boldsymbol{C}'\boldsymbol{B}'\boldsymbol{A}'$.

4．即使$\boldsymbol{A}, \boldsymbol{B}$为同阶方阵，一般情况$\boldsymbol{AB} \neq \boldsymbol{BA}$. 即$\boldsymbol{A}$左乘$\boldsymbol{B}$一般不等于$\boldsymbol{A}$右乘$\boldsymbol{B}$. 例如：

$$\boldsymbol{A}=\begin{bmatrix} 1 & 3 \\ -4 & 2 \end{bmatrix}, \quad \boldsymbol{B}=\begin{bmatrix} 3 & 0 \\ 1 & -2 \end{bmatrix}.$$

$$\boldsymbol{AB}=\begin{bmatrix} 6 & -6 \\ -10 & 4 \end{bmatrix}, \quad \boldsymbol{BA}=\begin{bmatrix} 3 & 9 \\ 9 & -1 \end{bmatrix}.$$

5．即使$\boldsymbol{A}, \boldsymbol{B}$为同阶对称方阵，一般情况，$\boldsymbol{AB}$或$\boldsymbol{BA}$并不对称。例如：

$$\boldsymbol{A}=\begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 3 \end{bmatrix}, \quad \boldsymbol{B}=\begin{bmatrix} -1 & 4 \\ 4 & 5 \end{bmatrix}.$$

$$\boldsymbol{AB}=\begin{bmatrix}7 & 14\\10 & 23\end{bmatrix},\quad \boldsymbol{BA}=\begin{bmatrix}7 & 10\\14 & 23\end{bmatrix}.$$

但从这里见到当 $\boldsymbol{A},\boldsymbol{B}$ 均对称时，$\boldsymbol{AB}=\boldsymbol{A}'\boldsymbol{B}'=(\boldsymbol{BA})'$.

§1.4. 逆 矩 阵

设有 $\boldsymbol{BA}=\boldsymbol{E}$，则称方阵 $\boldsymbol{B}$ 为方阵 $\boldsymbol{A}$ 的逆矩阵. 常用 $\boldsymbol{A}^{-1}$ 表 $\boldsymbol{A}$ 的逆矩阵. 即 $\boldsymbol{A}^{-1}\boldsymbol{A}=\boldsymbol{E}$.

方阵 $\boldsymbol{A}$ 存在有逆矩阵的必要和充分条件是 $\boldsymbol{A}$ 为满秩. 这可从§2.3.见到.

逆矩阵的若干特性：

1．$\boldsymbol{A}^{-1}\boldsymbol{A}=\boldsymbol{E}$ 时，$\boldsymbol{AA}^{-1}=\boldsymbol{E}$ 亦成立. 因为可对等式 $\boldsymbol{A}^{-1}\boldsymbol{A}=\boldsymbol{E}$ 两边左乘 $\boldsymbol{A}$ 并右乘 $\boldsymbol{A}^{-1}$ 得：

$$\boldsymbol{AA}^{-1}\boldsymbol{AA}^{-1}=\boldsymbol{AEA}^{-1}.$$

这即是：

$$(\boldsymbol{AA}^{-1})^2=\boldsymbol{AA}^{-1}.$$

故必 $\boldsymbol{AA}^{-1}=\boldsymbol{E}$ 成立.

2．$(\boldsymbol{A}')^{-1}=(\boldsymbol{A}^{-1})'$ 成立.

这是因为 $\boldsymbol{AA}^{-1}=(\boldsymbol{AA}^{-1})'=(\boldsymbol{A}^{-1})'\boldsymbol{A}'=\boldsymbol{E}$.

3．$\boldsymbol{A}$ 为对称方阵时，$\boldsymbol{A}^{-1}$ 也是对称方阵.

因为 $(\boldsymbol{A}')^{-1}=\boldsymbol{A}^{-1}=(\boldsymbol{A}^{-1})'$.

4．对两同阶方阵 $\boldsymbol{A},\boldsymbol{B}$，则 $(\boldsymbol{AB})^{-1}=\boldsymbol{B}^{-1}\boldsymbol{A}^{-1}$ 成立.

因为 $\boldsymbol{AB}(\boldsymbol{AB})^{-1}=\boldsymbol{E}$,

$$\boldsymbol{A}^{-1}(\boldsymbol{AB})(\boldsymbol{AB})^{-1}=\boldsymbol{A}^{-1},$$

$$\boldsymbol{B}(\boldsymbol{AB})^{-1}=\boldsymbol{A}^{-1},$$

$$\boldsymbol{B}^{-1}\boldsymbol{B}(\boldsymbol{AB})^{-1}=\boldsymbol{B}^{-1}\boldsymbol{A}^{-1},$$

$$(\boldsymbol{AB})^{-1}=\boldsymbol{B}^{-1}\boldsymbol{A}^{-1}.$$

5．对角方阵的逆矩阵也是对角方阵. 如：

$$D=\begin{bmatrix} a & 0 & 0\cdots0 \\ 0 & b & 0\cdots0 \\ \cdots & \cdots & \cdots \\ 0 & 0 & 0\cdots g \end{bmatrix},$$

其中 $a, b, \cdots g$ 为数，则：

$$D^{-1}=\begin{bmatrix} 1/a & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 1/b & 0 & \cdots & 0 \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 1/g \end{bmatrix}.$$

如：

$$D=\begin{bmatrix} S_1 & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & S_2 & 0 & \cdots & 0 \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & S_n \end{bmatrix},$$

其中：$S_1, S_2, \cdots S_n$ 为方阵，则：

$$D^{-1}=\begin{bmatrix} S_1^{-1} & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & S_2^{-1} & 0 & \cdots & 0 \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & S_n^{-1} \end{bmatrix}.$$

一般求逆矩阵的方法见§2.3.

§1.5. 矩阵的特征值

设有：

$$\begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{bmatrix}\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{bmatrix}=\lambda\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{bmatrix}$$

或即：
$$AX=\lambda X$$
其中：X 为非零列阵，λ 为实数或复数，则称 λ 为 A 的**特征值**，X 为 A 的对应于特征值 λ 的**特征向量**.

上式即：

$$\begin{cases}(a_{11}-\lambda)x_1+a_{12}x_2+\cdots+a_{1n}x_n=0,\\ a_{21}x_1+(a_{22}-\lambda)x_2+\cdots+a_{2n}x_n=0,\\ \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\\ a_{n1}x_1+a_{n2}x_2+\cdots+(a_{nn}-\lambda)x_n=0.\end{cases}$$

这个方程组有非零解的必要且充分条件是：

$$\begin{vmatrix}a_{11}-\lambda & a_{12} & \cdots & a_{1n}\\ a_{21} & a_{22}-\lambda & \cdots & a_{2n}\\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots\\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn}-\lambda\end{vmatrix}=0$$

这方程式叫 A 的**特征方程**，展开后是关于 λ 的 n 次代数方程，故知有 n 个根 $\lambda_1, \lambda_2, \cdots\lambda_n$.

求特征值和特征向量，一般有两类方法，即直接法和迭代法. 前者是先算出特征多项式，然后解代数方程求出特征值. 用后法则不必算出特征多项式即可以直接求出模最大的特征值(计算方法可查阅有关数学专著).

第二章　线代数方程组解法

§ 2.1. 高司消去法

按矩阵定义，可将方程组：

$$
\begin{aligned}
&a_{11}x_1+a_{12}x_2+\cdots+a_{1n}x_n=y_1,\\
&a_{21}x_1+a_{22}x_2+\cdots+a_{2n}x_n=y_2,\\
&\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\\
&a_{n1}x_1+a_{n2}x_2+\cdots+a_{nn}x_n=y_n,
\end{aligned}
$$

写成：

$$\boldsymbol{AX}=\boldsymbol{Y}. \tag{2-1}$$

其中：

$$
\boldsymbol{A}=\begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n}\\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n}\\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots\\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn}\end{bmatrix},
$$

$$
\begin{aligned}
&\boldsymbol{X}=\{x_1\ \ x_2\cdots x_n\},\\
&\boldsymbol{Y}=\{y_1\ \ y_2\cdots y_n\}.
\end{aligned}
\tag{2-2}
$$

将 $\boldsymbol{A}$ 分解为两个三角形方阵的乘积．即：

$$
\boldsymbol{A}=\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & \cdots & 0\\ l_{21} & 1 & 0 & \cdots & 0\\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots\\ l_{n1} & l_{n2} & l_{n3} & \cdots & 1\end{bmatrix}\begin{bmatrix} u_{11} & u_{12} & u_{13} & \cdots & u_{1n}\\ 0 & u_{22} & u_{23} & \cdots & u_{2n}\\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots\\ 0 & 0 & 0 & \cdots & u_{nn}\end{bmatrix}, \tag{2-3}
$$

或写成：

$$\boldsymbol{A}=\boldsymbol{LU}. \tag{2-4}$$