国家社会科学基金(七·五)资助项目

突变理论在经济领域的应用

(上册)

经济分析力学

(第一篇)

郝兴富　著

电子科技大学出版社

国家社会科学基金（七·五）资助项目

突变理论在经济领域的应用

（上册）

经济分析力学

（第一篇）

都兴富　著

电子科技大学出版社

·1994·

[川]新登字016号

2615/64

突变理论在经济领域的应用(上) 1(?)

经济分析力学

郝兴富 著

※

电子科技大学出版社出版
(成都建设北路二段四号)邮编610054
成都蜀丰印刷厂印刷
全国新华书店经销
※
开本 787×1092 1/16 印张13.25 字数350千字
版次 1994年5月第一版 印次 1994年5月第一次印刷
印数1—1000册
ISBN 7—81016—925—4/F·78
定价：上册18.80元 下册16.80元

序　言

一、1972年，法国数学家雷内·托姆（Rene Thom，1923—）出版"结构稳定性与形态发生学"一书，宣告"突变理论"诞生。

300多年来，人们运用微积分、微积分方程成功地建立了各种模型。如，牛顿的运动学与动力学模型、麦克斯韦的电磁场模型、爱因斯坦的狭义乃至广义相对论的场方程等。然而在自然界，在社会界还充满着大量的非连续非光滑变化的现象，突变（质变）的现象。如，自然界中，水的三态变化，大桥断裂，房屋塌陷，冲击波，炸弹爆炸，火山喷发，地震，宇宙大爆炸，物种生灭，星体撞击，生物形态发生，思维灵感产生……；在社会经济领域中，如，经济波动的大起大落，股票价格的暴涨暴跌，经济危机，工厂倒闭，社会革命，改革维新，政权更迭，战争爆发……。自然界、社会界、思维剧烈变动即突变（质变）的现象，用传统的微积分模型无法描述。这个任务就落到了突变理论的肩上。突变理论基于微积分、微分拓扑、奇点理论、结构稳定性等理论之上，从哲学的角度说，它是量变质变规律的数学的表达，因而，它不仅能描绘连续变化，而且能描绘不连续的突变现象。英国大百科全书誉它为"微积分以后数学的一次革命"。我认为，突变理论是光辉的，它的科学地位，相当于法国早期一个年轻的天才数学家伽罗华发明的群论——伽罗华群。

20多年来，突变理论已在物理学、化学、热力学、生物学、心理学、生态学、医学、工程力学等领域取得了许多应用性成果，在社会经济领域也有不少的探索。

二、突变理论的应用过程已有20多年了，纵观这一过程，确实，它已取得了许多应用性成果，但就它的理论本性，哲学本质而言，它应比现在的状况应用得更快速，更广泛。这是说，突变理论在应用过程中受到了某种阻碍。我认为，突变理论其哲学本质是全面的，广泛的，但它采用的数学形式却是局部的，有限性的。也就是说，它是从初等函数、多项式中抽象出突变理论的七个数学模型，因而，它被学术界称为初等突变论。而初等函数、多项式函数在物理，经济等领域用得并不太多，相反，太多的，大量的却是微积分方程。这就使初等突变理论的应用受到了形式上的限制。怎样打破这一限制，使突变理论能在更广泛的形式上，也就是在大量的微积分方程形式上应用？规律是普遍性东西，既然在一个地方找到了它，在另一个地方也应能找到它。突变理论是关于量变质变规律的数学理论，既然在初等函数，多项式方程中找到了它，那么，在微积分方程中也应找到它。传统的变分理论，只停留在一阶变分为零，求取泛函驻值这一步上。我运用初等突变论方法，把变分扩展到二阶变分为零，从而得到泛函的突变值。这样，初步地建立了突变变分理论（我把它称为一种高等突变论），导出了一系列突变欧拉方程。这就为物理、经济等领域在使用微积分方程时而建立突变理论模型打下了数学基础。第一部分内容，正是本书的第一章突变变分理论。

三、变分原理在物理分析力学中有广泛的应用。但是传统的分析力学只做一阶变分为零，求驻值，因而不足以研究系统的突变。我把突变变分理论引入物理分析力学，导出了完整系统的突变拉格朗日方程，或称为超拉格朗日方程，导出了非完整系统的突变Routh方程，突变Чаплыгин方程，突变Appell方程，突变Kane方程等等，用这些方程可以研究物理系统的

突变。

本书的重点是研究经济系统。就是把物理的分析力学的一套概念加以适当改造引入到经济学中来。不仅把质量、速度、加速度、力、能等传统力学概念引入到经济系统中来，而且根据突变变分理论导出超加速度、超力、超能等等概念，从而导出经济系统的拉格朗日方程、哈米顿方程、超拉格朗日方程（突变拉格朗日方程）、Routh 方程和突变 Routh 方程、Чаплыгин 方程和突变 Чаплыгин 方程、Appell 方程和突变 Apell 方程、Kane 方程和突变 Kane 方程等等。利用这些方程可研究经济完整系统和非完整系统的稳定值和突变值。

以上这些内容就是本书经济分析力学的第二章（完整系统）和第三章（非完整系统）。现在将经济分析力学的一些主要概念、原理、方程，说明如下：

(1) 经济质量 M（M 有时写为 m），表示经济变量的实物量或价值量；

(2) 经济位矢 M，令经济位矢＝经济质量；

(3) 经济速度，$v=\frac{d}{dt}M$；

(4) 经济加速度，$a=\frac{d^2}{dt^2}M$；

(5) 经济超加速度，$b=\frac{d^3}{dt^3}M$；

(6) 经济非线性动量，$P=mv$；

(7) 经济力，$F=\frac{d}{dt}P=ma+v^2$；

(8) 经济超力，$G=\frac{d^2}{dt^2}P=mb+3va$；

(9) 经济动能，$T=mv^2$；

(10) 经济超动能，$D=\frac{2}{3}mv^3$；

(11) 经济势能，$U, F=-\nabla U$；

(12) 经济超势能，$V, G=-\nabla^2 V$；

(13) 经济拉格朗日函数，$L=T-U$；

(14) 经济超拉格朗日函数，$\hat{L}=D+V$；

(15) 经济达朗伯原理，$\sum_{i=1}^{n}[F_i-(m_i\ddot{M}i+\dot{M}_i^2)]\cdot\delta M_i=0$

(16) 经济超达朗伯原理，$\sum_{i=1}^{n}[G_i-(m_i\dddot{M}_i+3\dot{M}_i\ddot{M}_i)]\cdot\delta^2 M_i=0$

(17) 位形（转换）方程，$M_i=M_i(q_1,q_2,\cdots q_n,t)$

(18) 经济拉格朗日方程，$\frac{d}{dt}\frac{\partial T}{\partial\dot{q}_j}-\frac{\partial T}{\partial q_i}=Q_j$

(19) 经济突变拉格朗日方程，$\frac{d^2}{dt^2}\frac{\partial^2 D}{\partial\dot{q}_j\partial\dot{q}_g}-2\frac{d}{dt}\frac{\partial^2 D}{\partial q_j\partial\dot{q}_g}+\frac{\partial^2 D}{\partial q_j\partial q_g}=W_{j,g}$

四、经济分析力学的第四章是它在经济监测预警方面的应用。第四章论述了经济监测预警的基本原理；说明了经济拉格朗日函数 L 和超拉格朗日函数 $\hat{L}$ 的判别依据；具体地建立了 15 个经济子系统（指标）组成的国民经济预警指标体系，每个子系统都有相应的预警七色灯。

利用它可以比较好的预警经济波动中的驻点和突变点，从而监控国民经济的运行。如果将此“七色灯”法同目前美国等西方国家所采用的“景气指标”法相结合，则监控效果更好。

在第四章的第十节还提出了动态分维数概念，利用它可以协助“七色灯”方法，二者相结合可以比较好地判别经济变量（指标）的临界点，有效地进行经济监控预警。

本书是经济分析力学第一篇内容，第二篇和第三篇今后陆续出版。第二篇专门研究经济分析力学完整系统和非完整系统的各种非线性微分方程的求解方法，第三篇研究经济分析力学保守系统的混沌问题。

本书的下册阐述从托姆初等突变理论导出的一种多准则评价决策方法——突变级数法，以及它在多准则评价决策领域的应用，如股票价格的突变分析与预测，产品评价，科研成果评价，人才评价，投资决策，工程项目方案的选择等等。

本书是国家社会科学基金（七·五）资助项目“用突变理论研究国民经济运行的预警线和建立宏观经济监测预警指标体系”的扩展。

本项目得以顺利研究和成书，首先，最诚挚地感激国家，国家社会科学基金委员会的资助，同时对下列各位的咨询指导和帮助表示敬谢：刘茂才研究员、林凌研究员、张礼堂研究员、刘平斋研究员、唐洪潜研究员、徐文斌副研究员、郑青副研究员、邢庭文副研究员。另外，中国科学院光电技术研究所余虹同志为本书上、下册绘制了插图，在此一并表示诚挚感谢。最后，本书所述经济分析力学新学科，乃是一大胆探索，仅仅迈出了本学科领域的第一步，由于作者水平有限，缺点在所难免，敬请专家和读者不吝指正。

作　者

一九九三年九月

于四川社会科学院（成都）

目　录

第一章　突变变分理论

第一节　初等突变理论

本节简明扼要介绍托姆的初等突变理论，介绍其主要概念、定理和结果.

法国数学家雷内·托姆(Rene Thom)出版《结构稳定性与形态发生学》一书，创立突变理论，一般被称为初等突变理论，因为它是研究初等函数的突变现象的.

20多年来，突变理论已在自然科学领域取得许多应用性成果，在社会科学方面也有不少探索. 本书就是应用突变理论研究社会经济中的突变现象.

一、突变理论的研究对象

突变理论的研究对象是势函数(或势位函数) $V(x_j,c_a)$，x_j 为状态变量，c_a 为控制参数. 突变理论是关于势函数奇点的理论. 即

$$\frac{\partial V(x_j,c_a)}{\partial x_j}=0 \tag{1-1-1}$$

这是指，势函数所在的系统处在平衡态. 突变理论是关于这一方程的解(即状态变量)的特性对方程中参数(控制变量)值的依从关系的数学理论.

势函数族 $V(x_j,c_a)$ 的局部性质有三类，对应地用三种形式表述：隐函数定理形式、莫尔斯形式、托姆形式. 托姆形式就是初等突变论的基本内容，莫尔斯形式是突变论的直接理论基础.

必须指明，这里的势函数族 $V(x_j,c_a)$ 是初等函数，因而托姆的突变理论实质是"初等突变论". 显见，有必要将这势函数的范围扩展，如，扩展到微积分方程、泛函中来. 我称它为"高等突变论"，这也是本书的重要任务之一.

二、几个基本概念

函数(映射)

函数定义为：$f:X\to Y$，X 是定义域，Y 是值域.

导数

函数 $f:R^n\to R^m$ 在点 $x\in R^n$ 可微，若存在线性映射 $\lambda:R^n\to R^m$，对它有

$$\lim_{h\to 0}\left(\frac{\| f(x+h)-f(x)-\lambda(h)\|}{\| h\|}\right)=0 \tag{1-1-2}$$

如果 λ 存在，则它是唯一的，称 λ 为 f 关于 x 的导数，记为

$$DF|_x=\lambda \tag{1-1-3}$$

(传统的导数记为 df/dx)

高阶导数

假定，函数 $f:R^n\to R^m$ 可微. 它的导数为

$$D^f:R^n\to L(R^n,R^m),$$

式中 $L(R^n,R^m)$ 是从 R^n 到 R^m 的映射空间. $L(R^n,R^m)$ 中每一元素由 $n\times m$ 矩阵给出. $L(R^n,R^m)$ 与 R^{nm} 视为同一. Df 是从 R^n 到 R^{nm} 的映射. 如果它可微,则对于所有 $x\in R^n$ 存在 $D(Df)|_x$,即

$$D^2f|_x=D(Df)|_x \tag{1-1-4}$$

(传统的二阶导数记为 d^2f/dx^2)

海赛矩阵

令 $x\in(x_1,\cdots,x_n)$ 和 $f(x)=(f_1(x),\cdots,f_m(x)\in R^m$

有矩阵

$$Df|_x=\left[\frac{\partial f_j}{\partial x_i}\bigg|_x\right]^{①} \tag{1-1-5}$$

这里,在标准坐标系中 Df 由 $Df=g$ 给出,

$$g(x)=[g_{ji}(x)],\quad g_{ji}(x)=\frac{\partial f_i}{\partial x_i}\bigg|_x$$

因为 $$Dg|_x=\left[\frac{\partial g_{ji}}{\partial x_k}\bigg|_x\right]=\left[\frac{\partial}{\partial x_k}\frac{\partial f_i}{\partial x_i}\bigg|_x\right]=\left[\frac{\partial^2 f_j}{\partial x_k\partial x_i}\bigg|_x\right] \tag{1-1-5}$$

所以 $$D^2f|_x=\left[\frac{\partial^2 f_j}{\partial x_k\partial x_i}\bigg|_x\right] \tag{1-1-6}$$

这就是海赛(*Hesse*)矩阵. 或写作

$$Hf|_x=\left[\frac{\partial^2 f}{\partial x_i\partial x_j}\bigg|_x\right]^{②} \tag{1-1-7}$$

泰勒级数(*Taylor Series*)

一光滑的函数 $f:R\to R$,可以把它在点 x_0 展成泰勒级数

$$f(x_0+x)=a_0+a_1x+a_2x^2+a_3x^3+\cdots \tag{1-1-8}$$

通常认为仅当它在 x_0 的某个邻域 U 收敛为 $f(x_0+x)$ 时才有用(解析函数).

截断

泰勒级数不一定收敛. 根据 Broel 定理,对实数的任一序列 $b_0,b_1,b_2,\cdots$,可以构造一光滑的函数 $f:R\to R$,对于它在原点的泰勒级数的前 $n+1$ 项为

$$b_0+b_1x+b_2x^2+\cdots+b_nx^n \tag{1-1-9}$$

泰勒级数的有限项之和可以近似代替某个函数. 这"有限项之和"就是把任意光滑的函数 f 在原点(零点)的泰勒级数 K 次项处的截断定义为 f 的 k 射流

---

① $Df|x$ 即通常的梯度 $\nabla f(x)$.
以 $f(x)$ 的 n 个偏导数为分量的向量称为 $f(x)$ 在 x 处的梯度,记为

$$\nabla f(x)=\left[\frac{\partial f(x)}{\partial x_1},\frac{\partial f(x)}{\partial x_2},\cdots,\frac{\partial f(x)}{\partial x_n}\right]^T$$

梯度也称为函数 $f(x)$ 关于向量 x 的一阶导数.

② 海赛矩阵 $Hf|x$ 即通常记为的海赛矩阵 $\nabla 2f(x)$. 多元函数 $f(x)$ 的一阶导数是 它的梯度 $\nabla f(x)$,二阶导数是它的 *Hesse* 矩阵 $\nabla^2 f(x)$,即

$$\nabla^2 f(x)=\nabla[\nabla f(x)]=\begin{bmatrix}\frac{\partial^2 f(x)}{\partial x_1^2} & \frac{\partial^2 f(x)}{\partial x_2\partial x_1} & \cdots & \frac{\partial^2 f(x)}{\partial x_n\partial x_1}\\ \frac{\partial^2 f(x)}{\partial x_1\partial x_2} & \frac{\partial^2 f(x)}{\partial x_2^2} & \cdots & \frac{\partial^2 f(x)}{\partial x_n\partial x_2}\\ \cdots & \cdots & & \cdots\\ \frac{\partial^2 f(x)}{\partial x_1\partial x_n} & \frac{\partial^2 f(x)}{\partial x_2\partial x_n} & \cdots & \frac{\partial^2 f(x)}{\partial x_n^2}\end{bmatrix}$$

$$j^k f(x) = \sum_{r=0}^{k} \frac{1}{r!} D^r f|_0 \cdot x^r \qquad (r = 0,1,2,\cdots,k) \tag{1-1-10}$$

显然，$j^k f$ 是次数小于或等于 K 的唯一多项式，而泰勒级数的余项（“尾巴”）$f - j^k f$ 的阶数为 $k+1$.（这里的“次”指多项式最高幂次，如 $j^k f$ 为 k 次；用“阶”指多项式最低幂次，如 $f - j^k f$ 为 $k+1$ 阶）.

研究的是 f 和 $j^k f$ 的局部性质，而 f 和 $j^k f$ 在原点的 r 阶导数相同，如果 $r = 0,1,2,\cdots,k$. 这就保证了 f 和 $j^k f$ 在原点附近的局部形式相同，或者说，微分同胚. 因而，$j^k f$ 既包含了 f 又包含了 f 族的最基本最重要信息，因而 $j^k f$ 可以代替 f 和 f 族.

临界点

令 $f: R^n \to R$ 是一光滑函数，点 $u \in R^n$ 称为 f 的临界点，条件为

$$Df|u = 0 \tag{1-1-11}$$

或在坐标中 $\left.\frac{\partial f}{\partial x_1}\right|_u = \cdots = \left.\frac{\partial f}{\partial x_n}\right|_u = 0$

如果用传统的梯度记作 $\nabla f(x) = 0$

在临界点 u 的 $f(u)$ 称为 f 的临界值.

莫尔斯临界点

这是“非退化临界点”、“稳定临界点”、“好”临界点.

莫尔斯临界点的条件是

(1)$Df|_u = 0$ （或记为 $\nabla f(x) = 0$）

(2)$\det(Hf|_u) \neq 0$ （或记为 $\det(\nabla^2 f(x) \neq 0)$ (1-1-12)

这第二个条件是说海赛矩阵

$$Hf|_u = \left[\left.\frac{\partial^2 f}{\partial x_i \partial x_j}\right|_u\right]$$

是非退化的（即其行列式值不等于零），即它的秩等于变量数目 n. 例如，$f(x,y) = x^2 + y^2$，它的海赛阵为

$$Hf|_0 = \begin{bmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 2 \end{bmatrix}$$

它的行列式的值就不等于零，是非退化阵.

非莫尔斯临界点

这是“退化临界点”、“不稳定临界点”、“坏”临界点.

非莫尔斯临界点的条件是

(1)$Df|_u = 0$ （或记为 $\nabla f(x) = 0$）

(2)$\det(Hf|_u) = 0$ （或记为 $\det(\nabla^2 f(x) = 0)$ (1-1-13)

第二个条件是指海赛阵的行列式之值等于零. 如，$f(x,y) = x^3 - 3xy^2$，就是退化的：

$$Hf|_0 = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} = 0$$

莫尔斯临界点是稳定的，函数值不发生突变；非莫尔斯临界点是不稳定的，函数值发生突变. 研究非莫尔斯临界点（奇点）是突变数学理论之基础.

三、莫尔斯（Morse）引理

设光滑函数 $f: R^n \to R$ 有非退化临界点 u，则可以在 u 的一个邻域 U 中找到一局部坐标系

$(y_1,\cdots,y_n)$，使得

$$f = f(u) - y_1^2 - \cdots - y_i^2 + y_{i+1}^2 + \cdots + y_n^2, \tag{1-1-14}$$

且对所有 i 有 $y_i(u) = 0$

莫尔斯引理说明，任一光滑函数 f，当 $Df|_u = 0$，但 $\det(Hf|_u) \neq 0$，即有莫尔斯临界点的情况下，都可用变量代换方法把 f 变成某种简单的标准形式，即莫尔斯引理形式. 例如，n 个变量 $x_1,\cdots,x_n$ 的二次型 $q(x) = \sum_{i,j}^{n}\lambda_{ij}x_ix_j$ 或 $q(x) = x^TMx$，其中 M 是对称矩阵，$x = (x_1,\cdots,x_n)^T$，总可以通过线性坐标变换把二次型化为形式

$$z_1^2 + \cdots + z_r^2 - z_{r+1}^2 - \cdots - z_n^2$$

四、定理

设 $f: R \to R$ 是一光滑函数，满足

$$f(0) = Df|_0 = \cdots = D^{k-1}f|_0 = 0$$

并且
$$D^kf|_0 \neq 0$$

那么必定存在一个局部微分同胚，使得 f 取得下列形式：

$$x^k \quad (k\text{ 为奇数}), \tag{1-1-15}$$

$$\pm x^k \quad (k\text{ 为偶数}).$$

在 k 为偶数的情况下，x^k 的符号与 $D^kf|_0$ 的符号相同.

这个定理说明，具有非零的泰勒级数的函数 f 等价于有相应 K 次的函为 $\pm x^k$.

某个非零射流可以确定函数的局部性态，而与函数本身是否解析无关.

如果一个函数的定性性态可以用它的一个射流来描绘，则称这个函数是确定的，这个射流是充分的，当不考虑函数与其射流间之区别时，也称这个射流是确定的.

五、托姆分裂引理

设 $f: R^n \to R$ 是一光滑函数，它在 0 有一退化临界点(即 $Df|_0 = 0$，且 $\det(Hf|_0 = 0)$)，其 Hesse 矩阵的秩为 r(余秩为 $n - r$，n 为变量个数)，则在 0 附近，f 等价于以下形式的函数：

$$\pm x_1^2 \pm x_2^2 \pm \cdots \pm x_r^2 \pm \hat{f}(x_{r+1},\cdots,x_n) \tag{1-1-16}$$

其中
$$\hat{f}: R^{n-r} \to R$$

是光滑的. 当 $f(0) = Df|_0 = \cdots = D^{k-1}f|_0 = 0$，且 $\det(Hf|_0) = 0, D^kf|_0 \neq 0, (k \geqslant 3)$ 则函数 f 结构发生突变.

对莫尔斯引理加以扩展，便得到托姆分裂引理. 托姆分裂引理把变量分成两大类：与函数 f 结构不稳定(突变)无关的"非实际性变量"，即式(1-1-16)中的"$\pm x_1^2 \pm \cdots \pm x_r^2$"的 r 个变量，它是"莫尔斯块"，它们可以略掉；另一类是与函数 f 结构不稳定(突变)有关的或引起 f 突变的"实质性变量"，即式(1-1-16)中的 $\hat{f}: R^{n-r} \to R$ 的那 $n - r$(余维数)个变量，它的数目一般是很少的. $\hat{f}$ 在 f 中是"退化块"，或"突变块". $\hat{f}$ 与 f 的射流 j^kf 微分同胚. 当 $f(0) = Df|_0 = \cdots = D^{k-1}f|_0 = 0$；$D^kf|_0 \neq 0$.（见四、定理）. $\hat{f}$ 被称为"突变芽".

六、托姆分类定理

光滑函数 $R^n \to R$ 的一个 r 参数族对任何有限的 n 和所有 $r \leqslant 5$ 典型地是结构稳定的，且局部地等价于以下诸形式之一：

非临界点(即正则点)附近：

x_1 ;

非退化临界点(即莫称斯点)附近

$$x_1^2 + \cdots + x_i^2 + x_{i+1}^2 - \cdots - x_n^2 \qquad (0 \leqslant i \leqslant n) \tag{1-1-17}$$

这两类不是突变形式,因为这里不是在退化临界点(即非莫尔斯临界点)附近.而且这里没有任何对参数 t 的依赖性.

所有下列形式是突变.它们在退化临界点(即非莫尔斯临界点,或不稳定临界点)附近的标 准形式称为突变,并且它们都依赖于参数 t .下面给出它们的绰名和 Arnold 的系统分类编码(写于括号中).

1.类尖点突变

折叠突变 (A_2) $\underline{x^3} + \utilde{t_1x} + (M)$;

尖点突变 (A_3) $\pm(\underline{x^4} + \utilde{t_2x^2 + t_1x}) + (M)$;

燕尾突变 (A_4) $\underline{x^5} + \utilde{t_3x^3 + t_2x^2 + t_1x} + (M)$;

蝴蝶突变 (A_5) $\pm(\underline{x^6} + \utilde{t_4x^4 + t_3x^3 + t_2x^2 + t_1x}) + (M)$;

印第安人茅屋突变 (A_6) $\underline{x^7} + \utilde{t_5x^5 + t_4x^4 + t_3x^3 + t_2x^2 + t_1x} + (M)$.

2.脐点突变

椭园脐点突变 (D_4^-) $\underline{x^2y - y^3} + \utilde{t_3x^2 + t_2y + t_1x} + (N)$;

双曲脐点突变 (D_4^+) $\underline{x^2y + y^3} + \utilde{t_3x^2 + t_2y + t_1x} + (N)$;

抛物脐点突变 (D_5) $\pm(\underline{x^2y + y^4} + \utilde{t_4y^2 + t_3x^2 + t_2y + t_1x}) + (N)$;

第二椭园脐点突变 (D_6^-) $x^2y - y^5 + t_5y^3 + t_4y^2 + t_3x^2 + t_2y + t_1x + (N)$;

第二双曲脐点突变 (D_6^+) $\underline{x^2y + y^5} + \utilde{t_5y^3 + t_4y^2 + t_3x^2 + t_2y + t_1x} + (N)$;

符号脐点突变 (E_6) $\pm(\underline{x^3 + y^4} + \utilde{t_5xy^2 + t_4y^2 + t_3xy + t_2y + t_1x}) + (N)$.

在以上各式中, $x = u_1, y = u_2, (u_1, \cdots, u_n) \in R^n, (t_1, \cdots, t_r) \in R^r, (M)$ 和 (N) 分别指以下莫尔斯函数 (1-1-20)

$$(M) = u_2^2 + \cdots + u_i^2 - u_{i+1}^2 - \cdots - u_n^2, 2 \leqslant i \leqslant n,$$

$$(N) = u_3^2 + \cdots + u_i^2 - u_{i+1}^2 - \cdots - u_n^2, 3 \leqslant i \leqslant n.$$

正负号表示对偶的可能性. (1-1-21)

托姆最早提出的七种初等突变,即上式中的 $A_2, A_3, A_4, A_5, D_4^-, D_4^+, D_5$.

以上11种突变中,下有"——"符号者,为"突变芽",有"~~~"符号者,为"扰动项"(扰动项的作用是保持函数的稳定),"突变芽"加上"扰动项",称为"托姆突变函数".

第二节 泛函突变的必要条件

这一节论证泛函极值达到突变的必要条件.首先引用泛函变分的一些传统概念,然后把泛函极值的变分问题引向托姆分裂定理所必备的即突变的两个条件: $Df|u = 0$(或 $\nabla f(x) = 0$); $\det(Hf|u) = 0$(或 $\det(\nabla^2 f(x)) = 0$),并且证明,泛函变分中的 $\delta J = 0$ 与 $\delta^2 J = 0$ 恰与以上两个条件等价.

一、泛函和泛函的极值

(一) 泛函的定义

定义　给定满足一定条件的函数集合 $F:\{y(x)\}$，和实数集合 R. 设 $y(x)$ 是 F 中的函数，J 是 R 中的变量，若 F 和 R 之间存在一个对应关系，使 F 中每一函数 $y(x)$，R 中都有唯一的 J 值与之对应，则称 J 是 $y(x)$ 的泛函，记为

$$J = J[y(x)] \text{ 或 } J = J[y] \tag{1-2-1}$$

F 称为泛函的定义域.

对于依赖于多个未知函数，或未知函数的自变量多于一个时，可类似地定义以下泛函：

$$J = J[y_1(x), y_2(x), \cdots, y_n(x)],$$

$$J = J[u(x_1, x_2, \cdots, x_n)],$$

$$J = J[u_1(x_1, x_2, \cdots, x_n, u_2(x_1, x_2, \cdots, x_n), \cdots, u_m(x_1, x_2, \cdots, x_n)].$$

术语：

函数类　具有某种共同性质的函数集，称为函数类.

如在区间 (x_0, x_1) 上连续的函数集，称为在区间 (x_0, x_1) 上的连续函数类，记为 $C(x_0, x_1)$.

在区间 (x_0, x_1) 上 n 阶导数连续的函数集，称为在区间 (x_0, x_1) 上 n 阶导数连续的函数类，记为 $C^n(x_0, x_1)$，而 $C^0(x_0, x_1)$ 约定为 $C(x_0, x_1)$.

上述术语中，若为闭区间 $[x_0, x_1]$ 的情形，则在区间端点处的所谓连续与导数，皆是单边的.

关于 C 与 C^n 的记号，可同样地用于多元函数.

(二) 泛函的极值

定义　设 $y_0(x)$ 是泛函 $J[y(x)]$ 的定义域 F 中的某一函数，若对于 F 中任一函数 $y(x)$ 都有

$J[y_0(x)] \leqslant J[y(x)]$ (或 $J[y_0(x)] \geqslant J[y(x)]$) 则称泛函 $J[y(x)]$ 在 $y_0(x)$ 处达到绝对极小值(或绝对极大值).

若存在一正数 δ，使对于任一 $y(x) \in F \cap N_0[\delta, y_0]$ 都有

$J[y_0(x)] \leqslant J[y(x)]$ (或 $J[y_0(x)] \geqslant J[y(x)]$) 则称泛函 $J[y(x)]$ 在 $y_0(x)$ 处达到强相对极小值(或强相对极大值).

若存在一正数 δ，使对任一 $y(x) \in F \cap N_1[\delta, y_0]$ 都有

$J[y_0(x)] \leqslant J[y(x)]$ (或 $J[y_0(x)] \geqslant J[y(x)]$) 则称泛函 $J[y(x)]$ 在 $y_0(x)$ 处达到弱相对极小值(或弱相对极大值).

极大值和极小值统称极值.

上述三类极值的定义中，$y_0(x)$ 是依地与较小的函数集里的函数 $y(x)$ 相比较而言的，即 $F > F \cap N_0 > F \cap N_1$.

传统的推导泛函极值的必要条件，一般是推导泛函弱极值的必要条件，下面将要推导的泛函突变的必要条件也是泛函弱极值的必要条件.

二、泛函的变分

定义　如果泛函 $J[y(x)]$ 的改变量

$$\Delta J = J[y(x) + \delta y] - J[y(x)] \tag{1-2-2}$$

可以表示为如下形式；

$$\Delta J = L[y(x),\delta y] + \beta(y(x),\delta y)\max|\delta y| \tag{1-2-3}$$

其中 $L[y(x),\delta y]$ 对于 δy 来说是线性的，且当 $\max|\delta y| \to 0$ 时有 $\beta(y(x),\delta y) \to 0$，则称 $L[y(x),\delta y]$ 为泛函 $J[y(x)]$ 的变分，记为 δJ.

例如，最简单的泛函 $$J[y] = \int_{x_0}^{x_1} F(x,y,y')dx \tag{1-2-4}$$

且在区间 $[x_0,x_1]$ 上 $F \in C^3, y \in C^3$. 表达式

$$\int_{x_0}^{x_1}\left(\frac{\partial F}{\partial y}\delta y + \frac{\partial F}{\partial y'}\delta y'\right)dx$$

称为泛函 $J[y]$ 在 $y = y(x)$ 处的变分，记为

$$\delta J = \int_{x_0}^{x_1}\left(\frac{\partial F}{\partial y}\delta y + \frac{\partial F}{\partial y'}\delta y'\right)dx \tag{1-2-5}$$

考虑给泛函式(1-2-4)的函数 $y(x)$ 以变分 δy，且设 $F(s,y,y')$ 充分光滑有泛函改变量(按二元泰勒级数展开)：

$$\begin{aligned}
\Delta J &= J[y+\delta y] - J(y) \\
&= \int_{x_0}^{x_1}[F(x,y+\delta y,y'+\delta y') - F(x,y,y')]dx \qquad (1\text{-}2\text{-}6) \\
&= \int_{x_0}^{x_1}\Big\{[\frac{\partial F}{\partial y}\delta y + \frac{\partial F}{\partial y'}\delta y'] \\
&\quad + \frac{1}{2!}\left[\frac{\partial^2 F}{\partial y^2}\delta y^2 + 2\frac{\partial^2 F}{\partial y\partial y'}\delta y\delta y' + \frac{\partial^2 F}{(\partial y')^2}\delta y'^2\right] \\
&\quad + \frac{1}{3!}\left[\frac{\partial^3 F}{\partial y^3}\delta y^3 + 3\frac{\partial^3 F}{\partial y^2\partial y'}\delta y^2\delta y' + 3\frac{\partial^3 F}{\partial y\partial y'^2}\delta y\delta y'^2 + \frac{\partial^3 F}{\partial y'^3}\delta y'^3\right] \\
&\quad + \frac{1}{4!}\left[\frac{\partial^4 F}{\partial y^4}\delta y^4 + 4\frac{\partial^4 F}{\partial y^3\partial y'}\delta y^3\delta y' + 6\frac{\partial^4 F}{\partial y^2\partial y'^2}\delta y^2\delta y'^2\right. \\
&\quad \left. + 4\frac{\partial^4 F}{\partial y\partial y'^3}\delta y\delta y'^3 + \frac{\partial^4 F}{\partial y'^4}\delta y'^4\right] + \cdots\Big\}dx \\
&= \delta J + \frac{1}{2}\delta^2 J + \frac{1}{3!}\delta^3 J + \frac{1}{4!}\delta^4 J + \cdots \qquad (1\text{-}2\text{-}7)
\end{aligned}$$

式中

$$\delta J = \int_{x_0}^{x_1}\left[\frac{\partial F}{\partial y}\delta y + \frac{\partial F}{\partial y'}\delta y'\right]dx \tag{1-2-8}$$

$$\delta^2 J = \int_{x_0}^{x_1}\left[\frac{\partial^2 F}{\partial y^2}\delta y^2 + 2\frac{\partial^2 F}{\partial y\partial y'}\delta y\delta y' + \frac{\partial^2 F}{\partial y'^2}\delta y'^2\right]dx \tag{1-2-9}$$

$$\delta^3 J = \int_{x_0}^{x_1}\left[\frac{\partial^3 F}{\partial y^3}\delta y^3 + 3\frac{\partial^3 F}{\partial y^2\partial y'}\delta y^2\delta y' + 3\frac{\partial^3 F}{\partial y\partial y'^2}\delta y\delta y'^2 + \frac{\partial^3 F}{\partial y'^3}\delta y'^3\right]dx \tag{1-2-10}$$

$$\begin{aligned}
\delta^4 J = \int_{x_0}^{x_1}\Big[&\frac{\partial^4 F}{\partial y^4}\delta y^4 + 4\frac{\partial^4 F}{\partial y^3\partial y'}\delta y^3\delta y' + 6\frac{\partial^4 F}{\partial y^2\partial y'^2}\delta y^2\delta y'^2 \\
&+ 4\frac{\partial^4 F}{\partial y\partial y'^3}\delta y\delta y'^3 + \frac{\partial^4 F}{\partial y'^4}\delta y'^4\Big]dx
\end{aligned} \tag{1-2-11}$$

$\delta J, \delta^2 J, \delta^3 J, \delta^4 J$ 分别是函数 $y(x)$ 的变分 δy 及其导数 $\delta y'$ 的一阶变分，二阶变分，三阶变分，四阶变分. 有时把泛函一阶变分 δJ 简称为泛函 $J[y]$ 的变分.

以上简单泛函变分的求取方法可以推广到复杂的泛函中去.

我们把泛函的一阶变分称为传统的泛函变分. 传统泛函变分一般问题是求泛函的稳定值(或驻值).

运用变分概念,对泛函 $J[y]$ 极值的必要条件可以有简洁的描述.

设函数 $y(x) \in C^3[x\ ,x_.]$ 给出最简泛函

$$J[y] = \int_{x_0}^{x_1} F(x,y,y')dx \tag{1-2-12}$$

在边界条件 $y(x_0) = y_0, y(x_1) = y_1$ 下的极值,必须对任意函数 $\delta y(x) \in C^3[x_0,x_1]$, $\delta y(x_0) = \delta y(x_1) = 0$,其一阶变分

$$\delta J = \int_{x_0}^{x_1} (\frac{\partial F}{\partial y}\delta y + \frac{\partial F}{\partial y'}\delta y')dx = 0 \tag{1-2-13}$$

泛函的二阶变分,可以称为突变变分. 泛函突变变分一般问题是求泛函的不稳定值(或突变值).

如上式(1-2-12)泛函及其边界条件下求其突变极值. 其必要条件为一阶变分 δJ 和二阶变分 $\delta^2 J$ 都等于零. $\delta J = 0$ 等价于函数中的 $DF(x,y,y')|u$(或 $\nabla F(x,y,y') = 0$); $\delta^2 J = 0$ 等价于 $\det(HF(x,y,y')|u)$(或 $\det \nabla^2 F(x,y,y')) = 0$.)

这是把函数的托姆分裂引理扩展到泛函中的结果. 我们把泛函突变这一基本必要条件作为一个定理.

定理(泛函突变定理) 设函数 $y(x) = \in C^3[x_0,x_1]$ 给出最简泛函

$$J[y] = \int_{x_0}^{x_1} F(x,y,y')dx$$

在边界条件 $y(x_0) = y_0, y(x_1) = y_1$ 下,并且必须对任意函数 $\delta y(x) \in C^3[x_0,x_1], \delta y(x_0) = \delta y(x_1) = 0$,求 $J[y]$ 的不稳定极值,或 $J[y]$ 发生突变,其必要条件为

$$\left.\begin{aligned} \delta J &= \int_{x_0}^{x_1} (\frac{\partial F}{\partial y}\delta y + \frac{\partial F}{\partial y'}\delta y')dx = 0 \\ \delta^2 J &= \int_{x_0}^{x_1} (\frac{\partial^2 F}{\partial y^2}\delta y^2 + 2\frac{\partial^2 F}{\partial y \partial y'}\delta y \delta y' + \frac{\partial^2 F}{\partial y'^2}\delta y'^2)dx = 0 \end{aligned}\right\} \tag{1-2-14}$$

证明 根据托姆分裂引理式((1-1-16)),设 $F(x,y,y'): R^n \to R$ 是一充分光滑函数,且满足条件

$$\left.\begin{aligned} &DF|_0 = 0 \qquad (\text{或 } \nabla F = 0) \\ &\det(HF|_0) = 0\ (\text{或 } \det(\nabla^2 F) = 0) \end{aligned}\right\} \tag{1-2-15}$$

则 F 在 0 有一非莫尔斯临界点,即不稳定的退化点,此时 $F(x,y,y')$ 不稳定,发生突变.

当 F 达到突变极值, $J[y] = \int_{x_0}^{x_1} F(x,y,y')dx$ 也同步达到突变极值,发生突变. 此时有

$$\begin{aligned} \delta J &= \int_{x_0}^{x_1} (\frac{\partial F}{\partial y}\delta y + \frac{\partial F}{\partial y'}\delta y')dx \\ &= \int_{x_0}^{x_1} \left\{ \begin{bmatrix} \frac{\partial F}{\partial y} & \frac{\partial F}{\partial y'} \end{bmatrix} \begin{pmatrix} \delta y \\ \delta y' \end{pmatrix} \right\} dx = 0 \end{aligned} \tag{1-2-16}$$

因为,已设 $\nabla F = \begin{bmatrix} \frac{\partial F}{\partial y} & \frac{\partial F}{\partial y'} \end{bmatrix} = 0$;还有

$$\delta^2 J = \int_{x_0}^{x_1} (\frac{\partial^2 F}{\partial y^2}\delta y^2 + 2\frac{\partial^2 F}{\partial y \partial y'}\delta y \delta y' + \frac{\partial^2 F}{\partial y'^2}) dx = 0$$

$$= \int_{x_0}^{x_1} \left\{ [\delta y \quad \delta y'] \begin{bmatrix} \frac{\partial^2 F}{\partial y^2} & \frac{\partial^2 F}{\partial y \partial y'} \\ \frac{\partial^2 F}{\partial y \partial y'} & \frac{\partial^2 F}{\partial y'^2} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \delta y \\ \delta y' \end{bmatrix} \right\} dx = 0 \qquad (1\text{-}2\text{-}17)$$

因为已设 $\det(\nabla^2 F) = \begin{bmatrix} \frac{\partial^2 F}{\partial y^2} & \frac{\partial^2 F}{\partial y \partial y'} \\ \frac{\partial^2 F}{\partial y \partial y'} & \frac{\partial^2 F}{\partial y'^2} \end{bmatrix} = 0$

因此，泛函 $J[y]$ 突变极值或不稳定极值的必要条件是 $\delta J = 0, \delta^2 J = 0$. 这一结论在复杂的泛函中照样可以推导出来.

第三节　固定边界的突变变分问题

从本章起，推导泛函突变(弱)极值更具体的必要条件. 推导的起点是传统变分(弱)极值问题. 涉及到传统变分的定理、公式这里一般只是引用，不证明. 本章推导固定边界的突变变分必要条件，列出变分突变的几种模型.

一、二阶变分的突变欧拉方程

1. 基本引理

引理1　设函数 $f(x) \in C[x_0, x_1]$，以及对任意函数 $\eta(x) \in C[x_0, x_1], \eta(x_0) = \eta(x_1) = 0$ 都有

$$\int_{x_0}^{x_1} f(x)\eta(x) dx = 0 \qquad (1\text{-}3\text{-}1)$$

则在区间 $[x_0, x_1]$ 上，$f(x) \equiv 0$.

(证明略)

引理2　设 D 为某平面区域，它的边界为 Γ，函数 $f(x,y) \in C(D)$，以及对任意函数 $\eta(x, y) \in C(D)$，且 $\eta(x,y)|_\Gamma = 0$，都有

$$\iint_D f(x,y)\eta(x,y) dx dy = 0 \qquad (1\text{-}3\text{-}2)$$

则在区域 D 上，$f(x,y) \equiv 0$.

(证明略)

对于三重积分和多重积分的情形，也有类似引理.

2. 欧拉方程的推导

设函数 $y(x) \in C^3[x_0, x_1]$ 给出泛函

$$J[y] = \int_{x_0}^{x_1} F(x, y, y') dx \qquad (1\text{-}3\text{-}3)$$

在边界条件 $y(x_0) = y_0, y(x_1) = y_1$ 下的极值，必须对任意函数 $\delta y(x) \in C^2[x_0, x_1], \delta y(x_0) = \delta y(x_1) = 0$，其变分