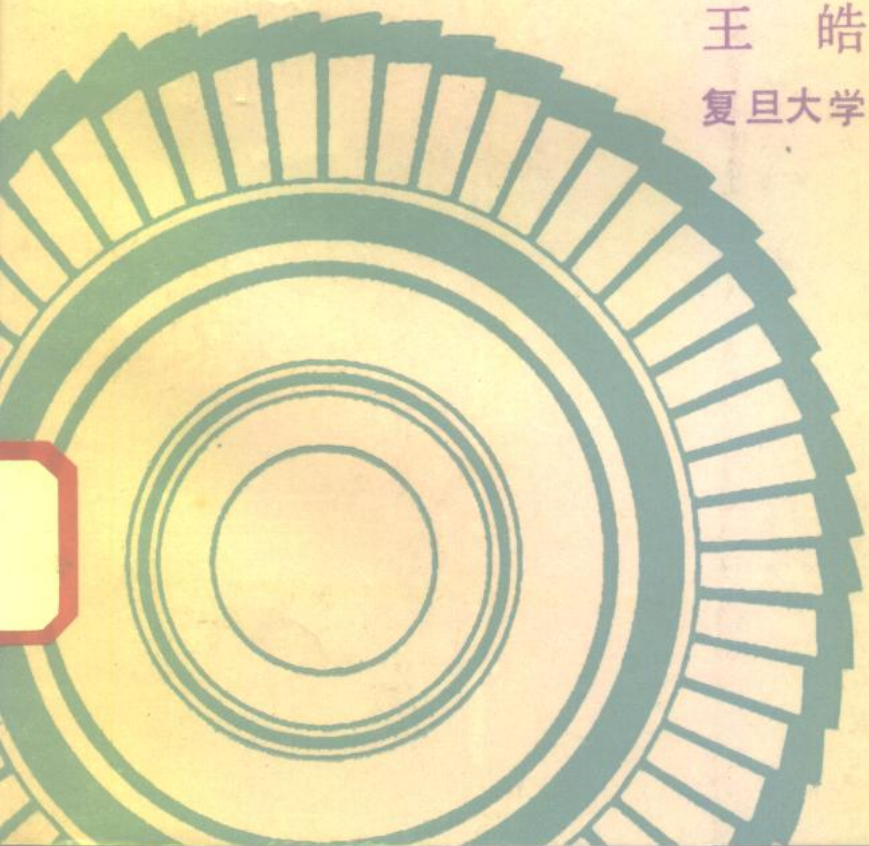


# 结构动力学

复旦大学出版社

王文亮  
张文  
罗惟德 编著  
陈守吉  
王皓

复旦大学出版社



# 结构动力学

王文亮 张文 编著  
罗惟德 陈守吉 王皓

复旦大学出版社

(沪)新登字 202 号

**结 构 动 力 学**

王文亮等 编著

复旦大学出版社出版

(上海国权路 579 号)

新华书店上海发行所发行 江苏句容县排印厂印刷

开本 850×1168 1/32 印张 14.5 字数 429,000

1993 年 8 月第 1 版 1993 年 8 月第 1 次印刷

印数 1—1 500

ISBN7-309-01023-X/O·118

定价: 16.00 元

## 内 容 提 要

05  
D299/7

全书共分九章，前五章介绍结构动力学的基本理论和工程结构动态分析的数值方法，后四章反映当前动力学研究有关论题的发展水平，其中有转子动力学、盘片系统的固有振动、动态子结构技术等。

本书可作为高等学校理工专业高年级学生、研究生的教材和参考书，亦可供在宇航、航空、海洋、机械、土木等工程领域中从事结构动力分析与试验研究的有关工程技术人员参考。

# 前 言

工程技术和结构工艺的突飞猛进，需要对复杂结构的动态特性作出精确细致的分析，数值方法和相应计算程序的发展为解决结构动力学的实际问题提供了强有力的手段。在上述因素的推动下，结构动力学的论题和有关知识也发生了巨大进展与深刻的变化，其应用价值也日益显著，人们对该学科的兴趣与日俱增，它已成为工程结构设计的创造性与合理化的关键技术。我们编写这本教材，力图在阐明基本理论的同时，及时反映当今动力学研究领域中有有关论题的发展水平。

本书限于阐述结构动力学中的“正问题”。全书共分九章，第一、二章讲述单自由度和多自由度系统线性振动的基本概念和研究方法，其中包含了机械振动和结构动力学的基础知识。由罗惟德、陈守吉编写。对于少学时的本科生或大专学生，可以只学这两章。

第三章介绍多自由度系统振动分析的数值计算方法，提供了相应的模态分析和求强迫响应的程序，目的是使读者在数值计算方面得到一定的训练，有助于培养解决工程实际问题的能力。本章由罗惟德编写。

第四、五章讲述连续系统振动分析的分析方法和实用方法，由罗惟德、陈守吉编写。在内容的安排上我们不求全求多，而是着重于对研究方法和原理的介绍。如在第四章中分别用到的偏微分方程、拉格朗日方程和哈密顿变分原理，读者可以毫无困难地将这些方法引用到其他相对复杂的单元或结构中去。在这两章我们还有意识地补充了若干例子，如支承运动引起的动力响应和循环对称结构的刚度矩阵，目的是为第六、第七章的内容作些铺垫。这两章内容(加上前三章)适用于多学时的本科教学，亦可作为有关研究生的基础教材。

第六章介绍了动态子结构方法，讲解了子结构法的策略思想、运算步骤、主要类别，以及不同子结构法之间的关系。由王文亮编写。

第七章讲解回转结构模态分析的“群论”算法，及其与子结构技术的结合。由王文亮编写。

第八章介绍涡轮机械转子系统振动分析的一种方法，这是第六、七两章内容在工程中的应用实例，取自于航空航天部的一个实际课题。由王皓编写。

第九章阐述近代转子动力学的一些基本概念和分析方法，介绍了有关涡动、临界转速，陀螺效应、陀螺特征值问题、旋转柔性系统以及转子系统的模态综合法等。由张文编写。

本书还附有若干振动分析的计算程序，可以有助于训练学员们的计算能力。

本书的前两章和第四、五、六、九章在复旦大学应用力学系的本科生和研究生教学中已用过，并根据他们的评论和意见作了修改。在本书编写过程中曾得到复旦大学应用力学系唐国安老师及其他同志的热情帮助，也得到了复旦大学出版社的大力协助，特此致以衷心感谢。

恳切希望得到读者的批评、指正。

作 者

一九九一年十二月  
于上海 复旦大学

# 目 录

前 言	1
第一章 单自由度系统	1
§ 1.1 振动系统的元件和运动方程	1
§ 1.2 振动系统的模型化	15
§ 1.3 简谐激励下的响应	23
§ 1.4 等效粘性阻尼	32
§ 1.5 任意激励下的响应、褶积积分	37
§ 1.6 频率域中的响应分析	43
§ 1.7 用拉普拉斯变换求解动力响应	54
习题	59
第二章 多自由度系统	67
§ 2.1 主模态分析	67
§ 2.2 结构的特性矩阵	83
§ 2.3 主模态近似计算的原理和方法	89
§ 2.4 初始激励下的响应	105
§ 2.5 模态(振型)叠加法求响应	109
§ 2.6 状态空间中的响应分析	117
§ 2.7 谐波激励下的稳态响应	121
§ 2.8 支承激励下的响应	128
习题	134
第三章 多自由度系统的数值计算	141
§ 3.1 用逐步积分法求解动力响应	141
§ 3.2 化为一阶方程组求解动力响应——龙格-库塔方法和基尔方法	151

§ 3.3	固有频率和振型的计算	156
附录	振动分析程序及使用说明	169
<b>第四章</b>	<b>连续系统的振动分析</b>	<b>232</b>
§ 4.1	杆的纵向(伸缩)振动	232
§ 4.2	圆轴的扭振和弦线的振动	243
§ 4.3	梁的横向(弯曲)振动	245
§ 4.4	主振型函数的正交性、振型叠加法求响应	251
§ 4.5	哈密顿变分原理的应用、铁木辛柯梁	272
	习题	281
<b>第五章</b>	<b>连续系统振动分析的实用方法</b>	<b>286</b>
§ 5.1	瑞利法	286
§ 5.2	李兹法	290
§ 5.3	有限元素法简介	300
§ 5.4	传递矩阵法	320
	习题	329
<b>第六章</b>	<b>动态子结构方法</b>	<b>333</b>
§ 6.1	约束子结构方法	333
§ 6.2	双协调动态子结构法	343
§ 6.3	本飞特-鲁脱模态综合技术	355
	习题	357
<b>第七章</b>	<b>回转周期结构的模态综合</b>	<b>359</b>
§ 7.1	回转周期结构的质量矩阵和刚度矩阵	361
§ 7.2	轮换矩阵的有关性质	364
§ 7.3	$C_N$ 系统的固有振动分析	367
§ 7.4	$C_N$ 系统的无阻尼强迫振动	370
§ 7.5	厄米特矩阵特征值问题的一种通行解法	371
§ 7.6	$C_N$ 系统的模态综合	377
	习题	384
<b>第八章</b>	<b>涡轮机转子系统的固有振动分析</b>	<b>386</b>
§ 8.1	涡轮机转子系统的模型归结与结构离散	387



§ 8.2	叶片的运动特征 .....	390
§ 8.3	轴-盘-片系统模态综合的一般方法 .....	393
§ 8.4	转轴与具有回转对称性叶片的耦合振动分析 .....	398
	习题 .....	402
<b>第九章</b>	<b>转子动力学基础</b> .....	<b>403</b>
§ 9.1	基本概念 .....	403
§ 9.2	卡丹角 .....	408
§ 9.3	涡动方程和涡动频率 .....	411
§ 9.4	圆涡动 .....	416
§ 9.5	临界转速 .....	418
§ 9.6	陀螺效应 .....	419
§ 9.7	连续转轴的涡动方程(铁木辛柯梁-轴模型) .....	423
§ 9.8	铁木辛柯梁-轴模型的有限单元法 .....	428
§ 9.9	传递矩阵法 .....	433
§ 9.10	陀螺特征值问题的性质与解法 .....	439
§ 9.11	旋臂的振动 .....	442
§ 9.12	转子系统的模态综合法 .....	446
<b>●</b>	<b>考书目及文献</b> .....	<b>452</b>

# 第一章 单自由度系统

本章研究最简单的振动问题——单自由度系统的振动。单自由度系统只需用一个坐标就可以描述它的运动。工程实际问题中有许多构件,在一定精度条件下,也可以模型化成为动力等效的单自由度系统。本章所介绍的基本概念和分析方法不仅可以解决单自由度系统的振动问题,也是解决其他复杂结构振动问题的基础。

## § 1.1 振动系统的元件和运动方程

### 一、质量-弹簧-阻尼系统

图 1.1 所示是一个最基本的振动系统模型,它由三个基本的元件,即弹簧、质量和阻尼所组成,称为质量-弹簧-阻尼系统,简称 M-K-C 系统。下面先讨论一下这些基本元件的特性。

#### 1. 弹簧(无质量)

弹簧是反映系统弹性特征的元件。

在平衡时,作用于弹簧两端的力应大小相等、方向相反,将其大小记作  $F_s$ ,如图 1.2 (a) 所示,图中沿直线伸长的弹簧,其伸长等于两端点的位移差  $x_2 - x_1$ 。图 1.2 (b) 显示了  $F_s$  与弹簧伸长的关系曲线。在弹簧变形较小时,  $F_s$  与  $(x_2 - x_1)$  成正比,比例常数即图示直线部分的斜率  $k$ ,称为弹簧常数或弹簧刚度。在这个范围内工作的弹簧叫做线性弹簧。图示曲线当变形增大时,  $F_s$  增长的速率变慢,这种弹簧称为软弹簧,反之则称为硬弹簧,它们都属于非线性弹簧。本书若不作专门说

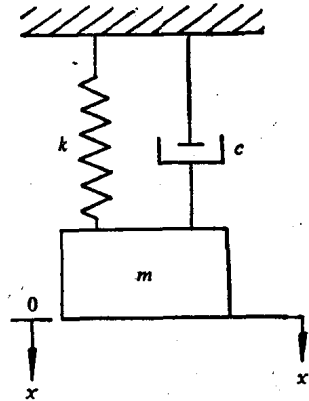


图 1.1

明时都只考虑无质量的线性弹簧。对于线性弹簧，用弹簧刚度  $k$  就可以描述它的特征。 $k$  的单位是  $N/m$ 。

由此可见，弹簧是联系力和位移的元件。在振动过程中，弹簧的伸长和缩短交替进行，它起了贮藏和释放弹性势能的作用。弹簧势能的表达式为  $V = \frac{k}{2}(x_2 - x_1)^2$ 。

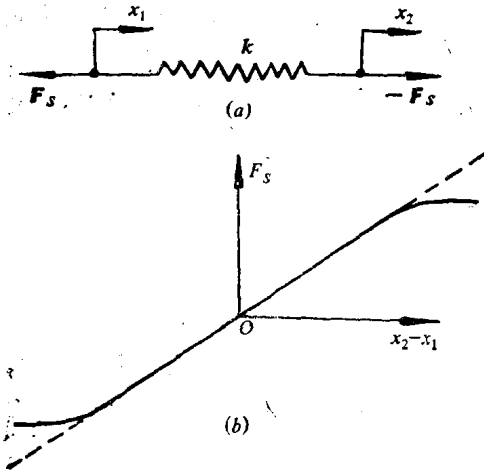


图 1.2

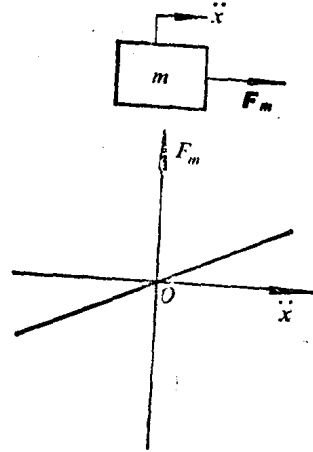


图 1.3

## 2. 质量

质量是联系力和加速度的元件。图 1.3 所示为一质量块，它所受到的力  $F_m$  与其加速度  $\ddot{x}$  成正比例，比例常数就是质量  $m$ ，单位是  $kg$ 。在振动问题中，质量元件起了贮藏和释放动能的作用，质点的动能为

$$T = \frac{1}{2}m\dot{x}^2。$$

质量元件不一定是质点，对于某些以角位移  $\theta$  描述的定轴旋转运动，力矩和角加速度的关系为  $L = J\ddot{\theta}$ ，比例常数  $J$  是物体绕定轴的转动惯量。此时动能的表达式也相应变为  $T = \frac{1}{2}J\dot{\theta}^2$ 。转动惯量的单位是  $N \cdot m \cdot s^2$ 。同理，在以角位移描述的运动中，弹簧（扭转弹簧）是联系力矩和角位移的元件，弹簧刚度的单位为  $N \cdot m$ 。

### 3. 阻尼器

它是联系力和速度的元件。通常假定它自身是没有质量的，作用在其两端的力  $F_d$  (力的大小) 与两端的速率差  $\dot{x}_2 - \dot{x}_1$  成比例，如图 1.4 所示。这种阻尼器称为粘性阻尼，比例系数  $c$  称为粘性阻尼系数，单位是  $\text{N}\cdot\text{s}/\text{m}$ 。物体在粘性流体中运动时所受的阻力就属于粘性阻尼。阻尼器是消耗能量的元件，在分析力学中可以用瑞利(Rayleigh) 散逸函数  $R = \frac{1}{2}c(\dot{x}_2 - \dot{x}_1)^2$  来表示消耗能量的程度(见 §2.1)，它的物理意义是机械能降低的速率的一半。

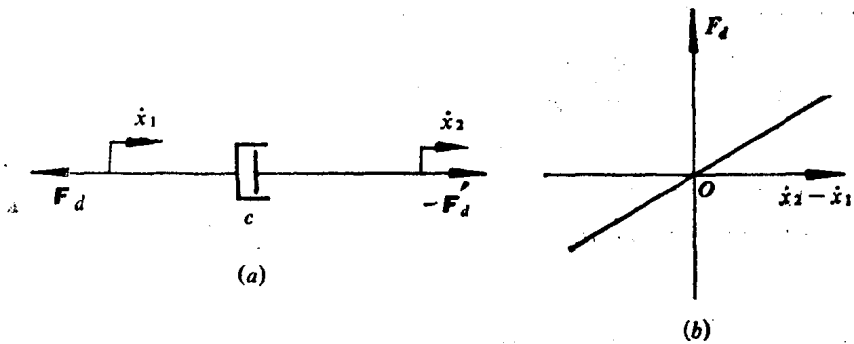


图 1.4

在实际问题中，有各种形形色色的阻尼，如库仑(Coulomb)阻尼、结构阻尼、平方阻尼等等，它们并不满足上述力和速度的线性关系。对于它们的精细的研究属于非线性力学的范畴。我们在本书中主要考虑线性情况，即讨论粘性阻尼系统的振动，对于某些其他类型的阻尼仅介绍如何化为等效的粘性阻尼，即化成相同能量的线性系统进行研究，以避免数学处理上的困难。

具有上述各种元件的系统组成了典型的振动系统，即所谓  $M-K-C$  系统。对于不考虑阻尼的情况，称作  $M-K$  系统。但必需注意，这些元件都是抽象化了的理想模型，我们掌握了它们的本质特性就可以学习将实际的振动问题归结为理想化的  $M-K-C$  系统。

## 二、运动方程

对于图 1.1 所示的系统, 当它处于平衡时, 质量  $m$  的位置称为静平衡位置, 此时质量  $m$  所受到的重力与弹簧静伸长所产生的弹性力相平衡。若以此平衡位置为坐标原点, 取质量  $m$  偏离静平衡位置的距离为广义坐标  $x$ , 则根据牛顿第二定律或拉格朗日 (Lagrange) 方程就可以方便地列出该系统的运动微分方程。具有散逸函数的拉格朗日方程的形式为

$$\frac{d}{dt} \left( \frac{\partial T}{\partial \dot{x}} \right) - \frac{\partial T}{\partial x} + \frac{\partial R}{\partial \dot{x}} + \frac{\partial V}{\partial x} = Q. \quad (1.1.1)$$

其中  $T, V$  和  $R$  分别为系统的动能、势能和散逸函数,  $Q$  是与广义坐标相应的非有势广义力。在不受到非有势力和支承激励时,  $Q=0$ , 则  $M-K-C$  系统自由振动的微分方程为

$$m\ddot{x} + c\dot{x} + kx = 0 \quad (1.1.2)$$

### 1. 无阻尼振动

对于无阻尼的情况, 方程 (1.1.2) 化为

$$m\ddot{x} + kx = 0 \quad (1.1.3)$$

记  $\omega_n = \sqrt{\frac{k}{m}}$ , 方程 (1.1.3) 的通解为

$$x = C_1 \cos \omega_n t + C_2 \sin \omega_n t, \quad (1.1.4)$$

其中积分常数  $C_1$  和  $C_2$  由初始条件确定。设初始条件为

$$t=0 \text{ 时, } x(0) = x_0, \quad \dot{x}(0) = \dot{x}_0. \quad (1.1.5)$$

则成立

$$x = x_0 \cos \omega_n t + \frac{\dot{x}_0}{\omega_n} \sin \omega_n t. \quad (1.1.6)$$

上述自由振动的解也可以写为简谐振动的形式

$$x = A \sin(\omega_n t + \varphi), \quad (1.1.7)$$

其中

$$A = \sqrt{x_0^2 + \left( \frac{\dot{x}_0}{\omega_n} \right)^2} \quad \varphi = \arctg \left( \frac{\omega_n x_0}{\dot{x}_0} \right). \quad (1.1.8)$$

式(1.1.7)所示的简谐振动可用一个作等速圆周运动的点  $M$  在直线上的投影来表示,如图 1.5 所示。式中  $A$  为位移  $x$  的最大值,称为振幅;

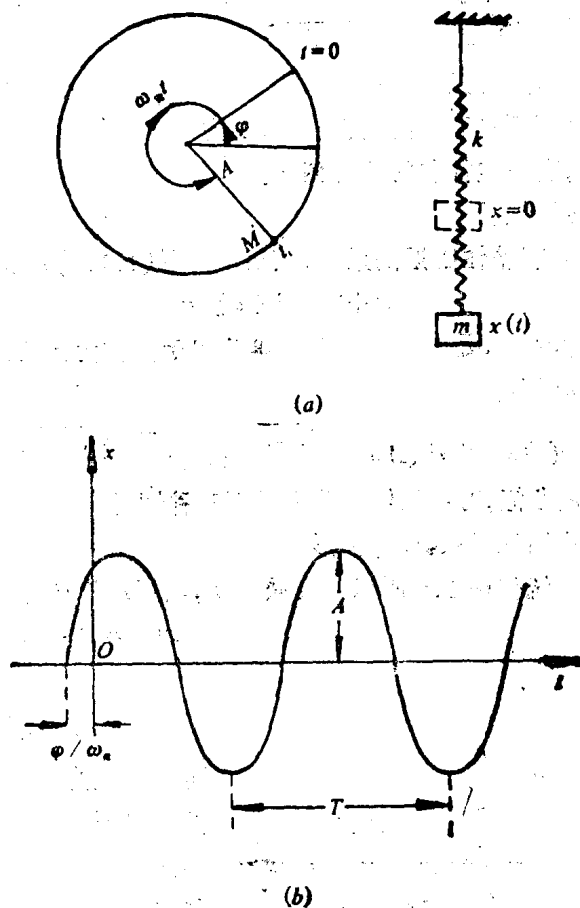


图 1.5 简谐振动

$\omega_n$  表示每秒中振动的幅角增量(1/s 或 rad/s),称为角频率或圆频率;

以  $f = \frac{\omega_n}{2\pi}$  表示每秒中振动的周数,称为频率,其单位是 r/s 或 Hz,

它的倒数  $T = 1/f = 2\pi/\omega_n$ (s),表示振动一周所需的时间,称作周期,而(1.1.8)中的  $\varphi$  则称为初相位。振幅  $A$ 、频率  $f$ (或  $\omega_n$ )以及相位  $\varphi$  称为

简谐振动的三要素。其中振幅  $A$  和相位  $\varphi$  由初始条件(1.1.5)式所确定。根据定义有

$$\omega_n = \sqrt{\frac{k}{m}}, \quad f = \frac{1}{2\pi} \sqrt{\frac{k}{m}}, \quad T = 2\pi \sqrt{\frac{m}{k}} \quad (1.1.9)$$

可见,圆频率  $\omega_n$  只由系统本身的特征  $m$  和  $k$  决定,而与初始条件无关,它反映了振动系统的内在特性,称为固有圆(角)频率。在不致混淆的情况下,有时也简称为固有频率。

## 2. 阻尼振动

对于具有粘性阻尼的系统,其运动方程(1.1.2)可以写为

$$\ddot{x} + 2\zeta\omega_n\dot{x} + \omega_n^2x = 0, \quad (1.1.10)$$

其中  $\zeta = c/2m\omega_n$ , 是一个无量纲的阻尼因子,称为阻尼比。方程(1.1.10)的通解可写作

$$x(t) = e^{-\zeta\omega_n t} (A_1 e^{\omega_n \sqrt{1-\zeta^2} t} + A_2 e^{-\omega_n \sqrt{1-\zeta^2} t}). \quad (1.1.11)$$

对于不同的  $\zeta$  值,方程的解可分为以下三种情况:

### (1) 小阻尼 ( $0 < \zeta < 1$ ) 情形

此时系统作图 1.6 所示的衰减运动,其振动规律是

$$x(t) = A e^{-\zeta\omega_n t} \sin(\omega_d t + \varphi), \quad (1.1.12)$$

$$\omega_d = \omega_n \sqrt{1 - \zeta^2}.$$

可见质点的振幅按  $A = A_0 e^{-\zeta\omega_n t}$  的规律而衰减,严格地说质点的运动是非周期性的,不过由(1.1.12)式可知,质点仍以相等的时间间隔  $T = \frac{2\pi}{\omega_d}$  通过其平衡位置,因此我们记  $\omega_d = \omega_n \sqrt{1 - \zeta^2}$  为阻尼系统的固有

(圆)频率。当阻尼很小时,即  $\zeta \ll 1$  时,  $\omega_d$  与  $\omega_n$  非常接近。振动的振幅和相位角依赖于初始条件。设初始时刻有  $x(0) = x_0$ ,  $\dot{x}(0) = v_0$ , 则

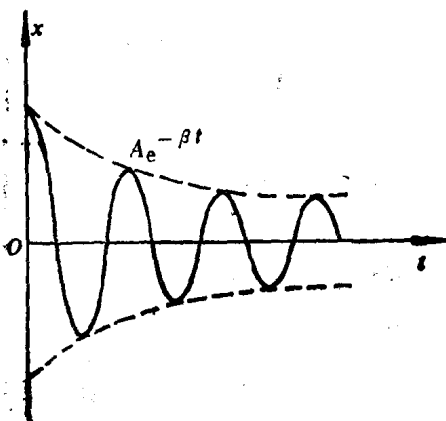


图 1.6

(1.1.12)式可以改写为

$$x(t) = e^{-\zeta\omega_n t} \left( x_0 \cos\omega_d t + \frac{v_0 + \zeta\omega_n x_0}{\omega_d} \sin\omega_d t \right). \quad (1.1.13)$$

在实际问题中, 阻尼系数  $c$  或阻尼因子  $\zeta$  往往是未知的, 需要通过实验测定。我们可以通过一个振动周期  $T = 2\pi/\omega_d$  中振幅下降的比值来求阻尼因子  $\zeta$  的值。

设  $t_1$  时刻,  $x_1 = Ae^{-\zeta\omega_n t_1} \sin(\omega_d t_1 + \varphi)$ 。令  $t_2 = t_1 + 2\pi/\omega_d$ , 则在  $t_2$  时刻有  $x_2 = Ae^{-\zeta\omega_n(t_1 + \frac{2\pi}{\omega_d})} \sin(\omega_d t_1 + \varphi)$ 。引进对数衰减率

$$\delta = \ln \frac{x_1}{x_2}, \quad (1.1.14)$$

则可得 
$$\delta = \frac{2\pi\zeta\omega_n}{\omega_d} = \frac{2\pi\zeta}{\sqrt{1-\zeta^2}}, \quad (1.1.15)$$

或

$$\zeta = \frac{\delta}{\sqrt{4\pi^2 + \delta^2}}, \quad (1.1.16)$$

当  $\delta \ll 1$  时, 成立关系式

$$\zeta \approx \frac{\delta}{2\pi}. \quad (1.1.17)$$

(1.1.17)式是工程问题中经常使用的公式, 即用一个周期内振幅的对数衰减率  $\delta$  来表示  $\zeta$  的大小。为了减少测量误差, 可以测取若干个 ( $j$ ) 周期后的振幅比值, 即令  $t_2 = t_1 + \frac{2\pi}{\omega_d} j$  ( $j$  为整数), 则可得

$$\delta = \frac{1}{j} \ln \frac{x(t_1)}{x(t_1 + \frac{2\pi}{\omega_d} j)}, \quad (1.1.18)$$

然后仍然由(1.1.17)式求得  $\zeta$  值, 从而也可求得系统的阻尼系数  $c$ 。

## (2) 临界阻尼 ( $\zeta=1$ ) 情形

此时阻尼系数  $c = 2m\omega_n$ , 亦称为临界阻尼系数, 方程(1.1.10)的通解为

$$x(t) = (A + Bt)e^{-\omega_n t}. \quad (1.1.19)$$

代入初始条件可得

$$x(t) = e^{-\omega_n t} [x_0 + (v_0 + \omega_n x_0)t]. \quad (1.1.20)$$



上式所对应的是一种非振荡的衰减运动，其图形按不同的初始条件可分为三种情况，如图 1.7 所示。

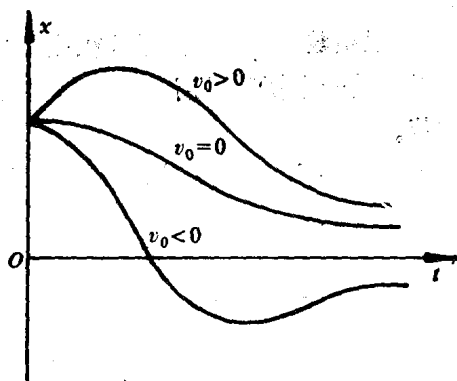


图 1.7 临界阻尼三种初始条件的曲线

### (3) 大阻尼( $\zeta > 1$ )情形

此时方程的解(1.1.11)成为

$$x(t) = C_1 \text{ch} \bar{\omega} t + C_2 \text{sh} \bar{\omega} t, \quad (1.1.21)$$

$$\bar{\omega} = \omega_n \sqrt{\zeta^2 - 1}.$$

代入初始条件后可得

$$x(t) = e^{-\zeta \omega_n t} \left( x_0 \text{ch} \bar{\omega} t + \frac{v_0 + \zeta \omega_n x_0}{\bar{\omega}} \text{sh} \bar{\omega} t \right).$$

当  $x_0 > 0, v_0 > 0$  时，其运动图形如图 1.8 所示。显然这也是一种非振荡的衰减运动。

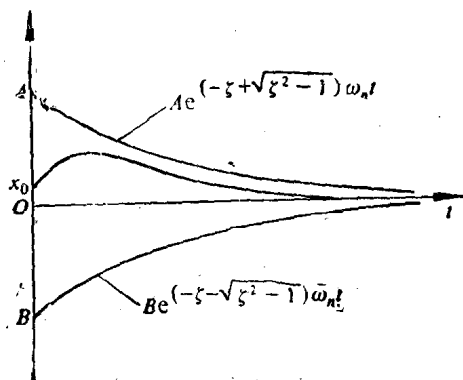


图 1.8