吴德涛 主编

管理数学

下册

上海科学普及出版社

管 理 数 学

下 册

主　编　吴德涛

副主编　岑詠霆　崔晓明　汪瑞华

编　委　汪瑞华　岑詠霆　张黛华　吴德涛

徐克绍　崔晓明　蒋仲刚

上海科学普及出版社

责任编辑　陈泽加

(沪)新登字第305号

管 理 数 学

下 册

吴德涛　主编

上海科学普及出版社出版
(上海曹杨路500号　邮政编码200063)

新华书店上海发行所发行　　上海长鹰印刷厂印刷
开本787×1092　1/16　印张21.25　字数514000
1991年11月第1版　1991年11月第1次印刷
印数1—5000

ISBN 7-5427-0457-5/G·139　　定价：8.70元

目　　录

第十三章 行 列 式

本章先介绍二阶及三阶行列式的概念和性质，然后将其推广到 n 阶行列式，在此基础上讨论 n 阶线性方程组的克莱姆法则解法。

§13-1 二阶与三阶行列式

本节从讨论方程组着手，引入二阶及三阶行列式的概念。

一、二阶行列式

给定的一个二元线性方程组

$$\begin{cases} a_1x+b_1y=c_1 & (13\text{-}1)\\ a_2x+b_2y=c_2 & (13\text{-}2)\end{cases}$$

用加、减消元法来解上述方程组，先以 b_2 乘第一个方程，以 b_1 乘第二个方程，然后两式相减，就能消去 y. 得到：

$$(a_1b_2-a_2b_1)x=c_1b_2-c_2b_1 \tag{13-3}$$

以 a_2 乘第一个方程，以 a_1 乘第二个方程，然后两式相减，得到：

$$(a_1b_2-a_2b_1)y=a_1c_2-a_2c_1 \tag{13-4}$$

设 $a_1b_2-a_2b_1\neq0$，则由(13-3)和(13-4)得到原方程组的解为：

$$\begin{cases} x=\dfrac{c_1b_2-c_2b_1}{a_1b_2-a_2b_1} & (13\text{-}5)\\[2ex] y=\dfrac{a_1c_2-a_2c_1}{a_1b_2-a_2b_1} & (13\text{-}6)\end{cases}$$

在上面解中，分母都是 $a_1b_2-a_2b_1$，可用以下记号

$$\begin{vmatrix} a_1 & b_1\\ a_2 & b_2\end{vmatrix}$$

来表示，即 $D=\begin{vmatrix} a_1 & b_1\\ a_2 & b_2\end{vmatrix}=a_1b_2-a_2b_1$

其中，a_1、a_2、b_1、b_2 叫做行列式的元素，a_1，b_1 在第一行，a_2，b_2 是第二行；同样分别称 a_1，a_2；b_1，b_2 依次是第一列，第二列 $a_1b_2-a_2b_1$ 叫做行列式的展开式，亦是此行列式的值. 由于行列式 D 是由原方程组中未知数 x，y 的系数按原来的位置次序组成的，故称 D 为这个方程组的系数行列式。

显见，(13-5)式的分子是把 D 中的 a_1，a_2 依次换成 c_1，c_2 的结果；

同样，(13-6)式的分子是把 D 中的 b_1，b_2 换成 c_1，c_2 的结果。于是 (13-5)(13-6) 两式的分子依次为两个二阶行列式。

$$D_1=\begin{vmatrix} c_1 & b_1 \\ c_2 & b_2 \end{vmatrix} \qquad D_2=\begin{vmatrix} a_1 & c_1 \\ a_2 & c_2 \end{vmatrix}$$

由 $D\neq 0$，可得

$$x=\frac{D_1}{D}, \qquad y=\frac{D_2}{D} \tag{13-7}$$

把(13-7)式中的 x, y 值代入原方程组，可以验证 $x=\frac{D_1}{D}$, $y=\frac{D_2}{D}$ 是方程组的唯一的一组解.

例 13-1 解下列线性方程组

$$\begin{cases} 2x+4y=1 \\ x+3y=2 \end{cases}$$

［解］ ∵ $D=\begin{vmatrix} 2 & 4 \\ 1 & 3 \end{vmatrix}=2\times 3-1\times 4=2\neq 0$

$$\therefore \begin{cases} x=\dfrac{D_1}{D}=\dfrac{\begin{vmatrix} 1 & 4 \\ 2 & 3 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} 2 & 4 \\ 1 & 3 \end{vmatrix}}=\dfrac{-5}{2} \\ y=\dfrac{D_2}{D}=\dfrac{\begin{vmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 2 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} 2 & 4 \\ 1 & 3 \end{vmatrix}}=\dfrac{3}{2} \end{cases}$$

二、三阶行列式

给出一个三元线性方程组

$$\begin{cases} a_1x+b_1y+c_1z=k_1 \\ a_2x+b_2y+c_2z=k_2 \\ a_3x+b_3y+c_3z=k_3 \end{cases} \tag{13-8}$$

仍采用加减消元法，先从第一、第二两方程中消去 z，再从第一，第三两方程中消去 z，在所得的两个方程中，再消去 y，就可得到：

$$\begin{aligned} &(a_1b_2c_3-a_1b_3c_2+a_2b_3c_1-a_2b_1c_3+a_3b_1c_2-a_3b_2c_1)x \\ &=k_1b_2c_3-k_1b_3c_2+k_2b_3c_1-k_2b_1c_3+k_3b_1c_2-k_3b_2c_1 \end{aligned} \tag{13-9}$$

我们把(13-9)式中 x 的系数叫做三阶行列式的展开式，记为

$$D=\begin{vmatrix} a_1 & b_1 & c_1 \\ a_2 & b_2 & c_2 \\ a_3 & b_3 & c_3 \end{vmatrix}=a_1b_2c_3-a_1b_3c_2+a_2b_3c_1-a_2b_1c_3+a_3b_1c_2-a_3b_2c_1$$

三阶行列式有 9 个元素，分别在三个行和三个列上，它的展开式共有六项，其中三个是正项，三个负项，而且每一项是不同的行与列的元素的乘积，据此构造，可得到三阶行列式的展开法如下：

在行列式 D 中，另写第一行，第二行，则成

$$\begin{vmatrix} a_1 & b_1 & c_1 \\ a_2 & b_2 & c_2 \\ a_3 & b_3 & c_3 \\ a_1 & b_1 & c_1 \\ a_2 & b_2 & c_2 \end{vmatrix}$$

取在实线上的三个元素的积，加"+"号，取虚线上的三个元素之积，加"−"号，然后相加就得到这个三阶行列式的展开式

$$D=a_1b_2c_3+a_2b_3c_1+a_3b_1c_2-a_3b_2c_1-a_1b_3c_2-a_2b_1c_3$$

这种展开法叫做对角线展开法。应该注意的是，此法仅限于三阶行列式的计算。

回过来观察(13-9)式，容易看出，(13-9) 式的右边刚好是D中的a_1，a_2，a_3分别换成k_1，k_2，k_3后的三阶行列式的展开式，即

$$D_1=\begin{vmatrix} k_1 & b_1 & c_1 \\ k_2 & b_2 & c_2 \\ k_3 & b_3 & c_3 \end{vmatrix}$$

的展开式。

这样，(13-9)式就可写成

$$D_x=D_1$$

同样也可得到

$$D_y=D_2$$

$$D_z=D_3$$

这里的D_2是D中的b_1，b_2，b_3分别换以k_1，k_2，k_3所得到的一个三阶行列式，D_3是D中的c_1，c_2，c_3分别换以k_1，k_2，k_3所得到的三阶行列式。这样，当$D\neq 0$时，则可得到：

$$\begin{cases} x=\dfrac{\begin{vmatrix} k_1 & b_1 & c_1 \\ k_2 & b_2 & c_2 \\ k_3 & b_3 & c_3 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} a_1 & b_1 & c_1 \\ a_2 & b_2 & c_2 \\ a_3 & b_3 & c_3 \end{vmatrix}}=\dfrac{D_1}{D} \\ y=\dfrac{\begin{vmatrix} a_1 & k_1 & c_1 \\ a_2 & k_2 & c_2 \\ a_3 & k_3 & c_3 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} a_1 & b_1 & c_1 \\ a_2 & b_2 & c_2 \\ a_3 & b_3 & c_3 \end{vmatrix}}=\dfrac{D_2}{D} \\ z=\dfrac{\begin{vmatrix} a_1 & b_1 & k_1 \\ a_2 & b_2 & k_2 \\ a_3 & b_3 & k_3 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} a_1 & b_1 & c_1 \\ a_2 & b_2 & c_2 \\ a_3 & b_3 & c_3 \end{vmatrix}}=\dfrac{D_3}{D} \end{cases} \qquad (13\text{-}10)$$

把(13-10)代入(13-8)，可以验证它们是原三元线性方程组的唯一的一组解。

以上用行列式求解二元、三元线性方程组的方法也称为克莱姆法则。

例 13-2　计算下列行列式

(1) $\begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 2 & 1 \\ 3 & 1 & 2 \end{vmatrix}$　　　(2) $\begin{vmatrix} 0 & a & b \\ -a & 0 & c \\ -b & -c & 0 \end{vmatrix}$

[解]　用对角线展开法计算如下：

(1) $\begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 2 & 1 \\ 3 & 1 & 2 \end{vmatrix} = 4+6+6-18-1-8=-11$

(2) $\begin{vmatrix} 0 & a & b \\ -a & 0 & c \\ -b & -c & 0 \end{vmatrix} = 0+abc-abc-0-0-0=0$

例 13-3　利用行列式解下列线性方程组

$$\begin{cases} 2x_1-4x_2+x_3=1 \\ x_1-5x_2+3x_3=2 \\ x_1-x_2+x_3=-1 \end{cases}$$

[解]　用对角线展开法，可求得系数行列式

$$D=\begin{vmatrix} 2 & -4 & 1 \\ 1 & -5 & 3 \\ 1 & -1 & 1 \end{vmatrix}=-8\neq 0$$

所以方程组有唯一解，同样，可计算得

$$D_1=\begin{vmatrix} 1 & -4 & 1 \\ 2 & -5 & 3 \\ -1 & -1 & 1 \end{vmatrix}=11 \quad D_2=\begin{vmatrix} 2 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 3 \\ 1 & -1 & 1 \end{vmatrix}=9 \quad D_3=\begin{vmatrix} 2 & -4 & 1 \\ 1 & -5 & 2 \\ 1 & -1 & -1 \end{vmatrix}=6$$

由克莱姆法则，得到方程组的解为

$$x_1=\frac{D_1}{D}=-\frac{11}{8},\quad x_2=\frac{D_2}{D}=-\frac{9}{8},\quad x_3=\frac{D_3}{D}=-\frac{3}{4}$$

§13-2　行列式的性质

用对角线法计算行列式比较麻烦，因此，有必要研究行列式的性质，以简化行列式的计算。

为方便起见，用记号 a_{ij} 来表示行列式中第 i 行第 j 列的元素，这样，可把二阶、三阶行列式写成下面形式：

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix}=a_{11}a_{22}-a_{12}a_{21}$$

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{21} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix}=a_{11}a_{22}a_{33}-a_{11}a_{23}a_{32}+a_{12}a_{23}a_{31}-a_{12}a_{21}a_{33}+a_{13}a_{21}a_{32}-a_{13}a_{22}a_{31}$$

以下介绍的三阶行列式的各条性质，都可以用对角线展开法加以证明。

如果把行列式D的行列互换，而不改变各行各列的顺序，得到的行列式叫做D的转置行列式，记为D'，如

$$D=\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix}$$

的转置行列式为

$$D'=\begin{vmatrix} a_{11} & a_{21} & a_{31} \\ a_{12} & a_{22} & a_{32} \\ a_{13} & a_{23} & a_{33} \end{vmatrix}$$

性质 13-1 行列式转置后其值不变，即

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix}=\begin{vmatrix} a_{11} & a_{21} & a_{31} \\ a_{12} & a_{22} & a_{32} \\ a_{13} & a_{23} & a_{33} \end{vmatrix}$$

由此性质可知，对于行列式的行成立的性质，对于列也一定成立，反过来也一样。

性质 13-2 行列式的任意两行(列)互换，行列式仅改变符号。

例如，交换行列式中一、三两行，就有

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix}=-\begin{vmatrix} a_{31} & a_{32} & a_{33} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{11} & a_{12} & a_{13} \end{vmatrix}$$

推论 如果行列式中某两行(列)的对应元素相同，则此行列式的值为零。

例如

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \end{vmatrix}=0$$

其中第三行与第二行相同。

性质 13-3 把行列式的某行(列)的所有元素乘上常数k，等于用k乘行列式。

例如

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ ka_{21} & ka_{22} & ka_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix}=k\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix}$$

推论 13-1 行列式中某一行(列)所有元素的公因子可以提到行列式符号的外面。

推论 13-2 如果行列式中某一行(列)的元素都为零，则此行列式的值为零。

性质 13-4 如果行列式的某两行(列)的对应元素成比例，则此行列式的值为零。

例如，

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ ka_{11} & ka_{12} & ka_{13} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix}=0$$

事实上，

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ ka_{11} & ka_{12} & ka_{13} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix}=k\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix}=k\cdot 0=0$$

性质 13-5 若行列式某一行(列)各元素是二项之和(差)，则可将此行列式写成两个行

列式之和(差)。

例如
$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21}+a'_{21} & a_{22}+a'_{22} & a_{23}+a'_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a'_{21} & a'_{22} & a'_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix}$$

性质 13-6 把行列式的某一行(列)的每个元素乘以常数 k 后加到另一行(列)的对应元素上去,行列式的值不变。

例如:
$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21}+ka_{11} & a_{22}+ka_{12} & a_{23}+ka_{13} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix}$$

事实上,由性质 4 和性质 5 直接可证得。

上述性质是简化行列式计算的最常用,最有效的性质。今后为简单起见,规定用记号 (i)表示行列式的第 i 行,用 $[j]$ 表示行列式的第 j 列,而 $(i)+k(j)$ 表示第 j 行各元素乘以常数 k 后再加到第 i 行的对应元素上去, $[i]+k[j]$ 表示第 j 列的各元素乘以常数 k 后再加到第 i 列的对应元素上去。

例 13-4 利用性质计算行列式的值
$$D=\begin{vmatrix} 3 & 2 & -4 \\ 2 & 1 & 5 \\ 12 & 7 & 7 \end{vmatrix}$$

[解]
$$D=\begin{vmatrix} 3 & 2 & -4 \\ 2 & 1 & 5 \\ 12 & 7 & 7 \end{vmatrix} \overline{\overline{(3)+(-2)\times(1)}} \begin{vmatrix} 3 & 2 & -4 \\ 2 & 1 & 5 \\ 6 & 3 & 15 \end{vmatrix} = 0$$

在三阶行列式
$$D=\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix}$$
中,划去 a_{ij} 所在的行和列的元素,余下的元素按原来次序构成一个二阶行列式叫做元素 a_{ij} 的余子式,称作 M_{ij},我们把 $(-1)^{i+j}M_{ij}$ 叫做 a_{ij} 的代数余子式,记作 A_{ij},例如在上式中,a_{23} 的余子式 M_{23} 为
$$M_{23}=\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{31} & a_{32} \end{vmatrix}$$
a_{23} 的代数余子式 A_{23} 为
$$A_{23}=(-1)^{2+3}M_{23}=-\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{31} & a_{32} \end{vmatrix}$$

又例如,a_{21} 的代数余子式及 a_{13} 的代数余子式分别为
$$A_{21}=(-1)^{2+1}M_{21}=-\begin{vmatrix} a_{12} & a_{13} \\ a_{32} & a_{33} \end{vmatrix}$$
$$A_{13}=(-1)^{1+3}M_{13}=\begin{vmatrix} a_{21} & a_{22} \\ a_{31} & a_{32} \end{vmatrix}$$

性质13-7 行列式等于它的任意一行(列)中各元素与其对应的代数余子式乘积之和。

例如，行列式按第一行展开，就有

$$D=a_{11}A_{11}+a_{12}A_{12}+a_{13}A_{13}$$

事实上，

$$\begin{aligned}D&=a_{11}a_{22}a_{33}+a_{13}a_{21}a_{32}+a_{12}a_{23}a_{31}-a_{13}a_{22}a_{31}-a_{11}a_{23}a_{32}-a_{12}a_{21}a_{33}\\&=a_{11}(a_{22}a_{33}-a_{23}a_{32})-a_{12}(a_{21}a_{33}-a_{23}a_{31})+a_{13}(a_{21}a_{32}-a_{22}a_{31})\\&=(-1)^{1+1}a_{11}\begin{vmatrix}a_{22}&a_{23}\\a_{32}&a_{33}\end{vmatrix}+(-1)^{1+2}a_{12}\begin{vmatrix}a_{21}&a_{23}\\a_{31}&a_{33}\end{vmatrix}+(-1)^{1+3}a_{13}\begin{vmatrix}a_{21}&a_{22}\\a_{31}&a_{32}\end{vmatrix}\\&=a_{11}A_{11}+a_{12}A_{12}+a_{13}A_{13}\end{aligned}$$

不仅如此，行列式还可按其它行(列)展开，即

$$D=a_{i1}A_{i1}+a_{i2}A_{i2}+a_{i3}A_{i3}=\sum_{k=1}^{3}a_{ik}A_{ik},\qquad i=1,\ 2,\ 3 \tag{13-11}$$

$$D=a_{1j}A_{1j}+a_{2j}A_{2j}+a_{3j}A_{3j}=\sum_{k=1}^{3}a_{kj}A_{kj},\qquad j=1,\ 2,\ 3 \tag{13-12}$$

(13-11)式与(13-12)式分别叫做行列式D按第i行的展开式及按第j列的展开式，这个性质叫做行列式按行(列)展开性质，利用它可把任意一个三阶行列式化为二阶行列式来计算。

性质 13-8 在行列式D中，任一行(列)的元素与另一行(列)对应元素的代数余子式的乘积之和等于零，即

$$a_{i1}A_{j1}+a_{i2}A_{j2}+a_{i3}A_{j3}=\sum_{k=1}^{3}a_{ik}A_{jk}=0,\qquad (i\neq j,\ i,\ j=1,\ 2,\ 3) \tag{13-13}$$

$$a_{1i}A_{1j}+a_{2i}A_{2j}+a_{3i}A_{3j}=\sum_{k=1}^{3}a_{ki}A_{kj}=0,\qquad (i\neq j,\ i,\ j=1,\ 2,\ 3) \tag{13-14}$$

例 13-5 计算下列行列式的值

(1) $\begin{vmatrix}6&42&27\\8&-28&36\\20&35&135\end{vmatrix}$ (2) $\begin{vmatrix}a&b&c\\a&a+b&a+b+c\\a&2a+b&3a+2b+c\end{vmatrix}$

解 (1) $\begin{vmatrix}6&42&27\\8&-28&36\\20&35&135\end{vmatrix}=3\times4\times5\begin{vmatrix}2&14&9\\2&-7&9\\4&7&27\end{vmatrix}$

$$=3\times4\times5\times2\times7\times9\begin{vmatrix}1&2&1\\1&-1&1\\2&1&3\end{vmatrix}$$

$$\xlongequal[(3)-2\times(1)]{(2)-1\times(1)}3\times4\times5\times2\times7\times9\begin{vmatrix}1&2&1\\0&-3&0\\0&-3&1\end{vmatrix}$$

$$=3\times4\times5\times2\times7\times9\times\begin{vmatrix}-3&0\\-3&1\end{vmatrix}$$

$$=3\times4\times5\times2\times7\times9\times(-3)=-22680$$

(2) $\begin{vmatrix} a & b & c \\ a & a+b & a+b+c \\ a & 2a+b & 3a+2b+c \end{vmatrix} = a\begin{vmatrix} 1 & b & c \\ 1 & a+b & a+b+c \\ 1 & 2a+b & 3a+2b+c \end{vmatrix}$

$$\xrightarrow[\text{(3)}-1\times\text{(1)}]{\text{(2)}-1\times\text{(1)}} a\begin{vmatrix} 1 & b & c \\ 0 & a & a+b \\ 0 & 2a & 3a+2b \end{vmatrix} = a\begin{vmatrix} a & a+b \\ 2a & 3a+2b \end{vmatrix} = a^3.$$

§13-3　高阶行列式

我们知道，三阶行列式按第一行展开的表达式为

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} = a_{11}\begin{vmatrix} a_{22} & a_{23} \\ a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} - a_{12}\begin{vmatrix} a_{21} & a_{23} \\ a_{31} & a_{33} \end{vmatrix} + a_{13}\begin{vmatrix} a_{21} & a_{22} \\ a_{31} & a_{32} \end{vmatrix}$$

这说明，三阶行列式可以由三个二阶行列式来定义，仿此，同样可以利用若干个三阶行列式来定义具有四行四列的四阶行列式，例如，四阶行列式可以定义为

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & a_{14} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} & a_{24} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} & a_{34} \\ a_{41} & a_{42} & a_{43} & a_{44} \end{vmatrix} = a_{11}\begin{vmatrix} a_{22} & a_{23} & a_{24} \\ a_{32} & a_{33} & a_{34} \\ a_{42} & a_{43} & a_{44} \end{vmatrix} - a_{12}\begin{vmatrix} a_{21} & a_{23} & a_{24} \\ a_{31} & a_{33} & a_{34} \\ a_{41} & a_{43} & a_{44} \end{vmatrix}$$

$$+ a_{13}\begin{vmatrix} a_{21} & a_{22} & a_{24} \\ a_{31} & a_{32} & a_{34} \\ a_{41} & a_{42} & a_{44} \end{vmatrix} - a_{14}\begin{vmatrix} a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \\ a_{41} & a_{42} & a_{43} \end{vmatrix}$$

类似的，可以用若干低阶行列式通过归纳递推来定义高一阶的行列式，譬如，可以继续定义五阶、六阶…以至 n 阶行列式。

一般地，n($n\geqslant 2$, n 是任意确定的正整数）阶行列式可以用 n 个 $n-1$ 阶行列式来定义，如下有

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix} = a_{11}\begin{vmatrix} a_{22} & a_{23} & \cdots & a_{2n} \\ a_{32} & a_{33} & \cdots & a_{3n} \\ \vdots \\ a_{n2} & a_{n3} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix}$$

$$- a_{12}\begin{vmatrix} a_{21} & a_{23} & \cdots & a_{2n} \\ a_{31} & a_{33} & \cdots & a_{3n} \\ \vdots \\ a_{n1} & a_{n3} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix} + \cdots (-1)^{1+n} a_{1n}\begin{vmatrix} a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n-1} \\ a_{31} & a_{32} & \cdots & a_{3n-1} \\ \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn-1} \end{vmatrix}$$

对于 n 阶行列式，我们作如下几点说明：

1．n 阶行列式是由 n^2 个元素按一定的次序构造而成，记为

$$D = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix}$$

它们展开式一共含有 $n!$ 个乘积项，其中一半的项带"+"号，一半的项带"-"号，而每一乘积项中元素取自于行列式中不同的行与列。

2．前面介绍过的三阶行列式具有的性质与推论，对于三阶以上的行列式（称为高阶行列式）也都是成立的（证明从略）。

例如**性质 13-7** 就可推广为，n 阶行列式等于它的任意一行(列)的各个元素与其对应的代数余子式的乘积之和，若按第 i 行第 j 列展开，就分别有

$$D=a_{i1}A_{i1}+a_{i2}A_{i2}+\cdots+a_{in}A_{in}=\sum_{k=1}^{n}a_{ik}A_{ik}\quad(i=1,\ 2\cdots n)\tag{13-15}$$

$$D=a_{1j}A_{1j}+a_{2j}A_{2j}+\cdots+a_{nj}A_{nj}=\sum_{k=1}^{n}a_{kj}A_{kj}\quad(j=1,\ 2\cdots n)\tag{13-16}$$

同样的，**性质 13-8** 也可推广为：n 阶行列式的某一行(列)的各元素与另一行（列）对应元素的代数余子式的乘积之和为零。

按行的有

$$a_{i1}A_{j1}+a_{i2}A_{j2}+\cdots+a_{in}A_{jn}=\sum_{k=1}^{n}a_{ik}A_{jk}=0\quad(i\neq j\quad i,\ j=1,\ 2\cdots n)\tag{13-17}$$

按列的有

$$a_{1s}A_{1t}+a_{2s}A_{2t}+\cdots+a_{ns}A_{nt}=\sum_{k=1}^{n}a_{ks}A_{kt}=0\quad(s\neq t,\ s,\ t=1,\ 2\cdots n)\tag{13-18}$$

高阶行列式的计算一般比较复杂，随着阶数的增高，计算工作量将成倍增加，若能善于巧用行列式的性质，计算工作将会大大减少。

例 13-6　计算行列式
$$\begin{vmatrix}3&1&-1&2\\-5&1&3&-4\\2&0&1&-1\\1&-5&3&-3\end{vmatrix}$$

［解］
$$\begin{vmatrix}3&1&-1&2\\-5&1&3&-4\\2&0&1&-1\\1&-5&3&-3\end{vmatrix}\xlongequal[\text{[1]}-2\times\text{[3]}]{\text{[4]}+1\times\text{[3]}}\begin{vmatrix}5&1&-1&1\\-11&1&3&-1\\0&0&1&0\\-5&-5&3&0\end{vmatrix}$$

$$=(-1)^{3+3}\begin{vmatrix}5&1&1\\-11&1&-1\\-5&-5&0\end{vmatrix}=\begin{vmatrix}5&1&1\\-11&1&-1\\-5&-5&0\end{vmatrix}$$

$$\xlongequal{(2)+1\times(1)}\begin{vmatrix}5&1&1\\-6&2&0\\-5&-5&0\end{vmatrix}=\begin{vmatrix}-6&2\\-5&-5\end{vmatrix}=40$$

例 13-7　证明

$$\begin{vmatrix}b&a&a&a\\a&b&a&a\\a&a&b&a\\a&a&a&b\end{vmatrix}=(3a+b)(b-a)^3$$

［证明］　观察行列式的各行(列)的和都是 $3a+b$ 这个特点，可把其余各行都加到第一

行上去，得到

$$\begin{vmatrix} b & a & a & a \\ a & b & a & a \\ a & a & b & a \\ a & a & a & b \end{vmatrix} \xlongequal[(1)+(3)\atop(1)+(4)]{(1)+(2)} \begin{vmatrix} 3a+b & 3a+b & 3a+b & 3a+b \\ a & b & a & a \\ a & a & b & a \\ a & a & a & b \end{vmatrix}$$

$$= (3a+b)\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ a & b & a & a \\ a & a & b & a \\ a & a & a & b \end{vmatrix} = (3a+b)\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & b-a & 0 & 0 \\ 0 & 0 & b-a & 0 \\ 0 & 0 & 0 & b-a \end{vmatrix}$$

$$= (3a+b)\begin{vmatrix} b-a & 0 & 0 \\ 0 & b-a & 0 \\ 0 & 0 & b-a \end{vmatrix} = (3a+b)(b-a)^3$$

例 13-8 计算 n 阶行列式

$$D = \begin{vmatrix} x & y & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ 0 & x & y & \cdots & 0 & 0 \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & x & y \\ y & 0 & 0 & \cdots & 0 & x \end{vmatrix}$$

[解] 首先把 D 按第一列展开，得到

$$D = x\begin{vmatrix} x & y & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ 0 & x & y & \cdots & 0 & 0 \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & x & y \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 & x \end{vmatrix} + (-1)^{n+1}y\begin{vmatrix} y & 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ x & y & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & y & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & x & y \end{vmatrix}$$

前一个行列式依次按第一列展开，后一个行列式依次按第一行展开最终可得：

$$D = x\cdot x^{n-1} + (-1)^{n+1}y\cdot y^{n-1} = x^n + (-1)^{n+1}y^n$$

§13-4 线性方程组求解的克莱姆法则

在 §13-1 中，我们曾用二阶、三阶行列式给出了解二元线性方程组及三元线性方程组的公式。与此类似，对于 n 元线性方程组

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \cdots + a_{1n}x_n = b_1 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \cdots + a_{2n}x_n = b_2 \\ \vdots \\ a_{n1}x_1 + a_{n2}x_2 + \cdots + a_{nn}x_n = b_n \end{cases} \tag{13-19}$$

它的解也同样可以用 n 阶行列式来表示，这就是解一般的（n 阶）线性方程组的克莱姆(Gramer)法则。

克莱姆法则：如果线性方程组(13-19)的系数行列式不等于零，即

$$D=\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & & & \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix} \neq 0$$

那末它有唯一的解：

$$x_1=\frac{D_1}{D} \quad x_2=\frac{D_2}{D} \quad \cdots \quad x_n=\frac{D_n}{D}$$

这里 $D_j(j=1, 2\cdots n)$ 是把系数行列式 D 中第 j 列的元素用方程右端的常数项代替后所得到的 n 阶行列式，即

$$D_j=\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1j-1} & b_1 & a_{1j+1} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2j-1} & b_2 & a_{2j+1} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & & & & & & & \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nj-1} & b_n & a_{nj+1} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix}$$

证明：用 D 中第 j 列元素的代数余子式 $A_{1j}A_{2j}\cdots A_{nj}$ $(j=1, 2\cdots n)$ 依次乘方程组(13-19)的第一个，第二个…第 n 个方程然后把相乘后的各方程左、右两端分别相加，得

$$(a_{11}A_{1j}+a_{21}A_{2j}+\cdots+a_{n1}A_{nj})x_1+(a_{12}A_{1j}+a_{22}A_{2j}+\cdots+a_{n2}A_{nj})x_2+\cdots$$

$$+(a_{1j}A_{1j}+a_{2j}A_{2j}+\cdots+a_{nj}A_{nj})x_j+\cdots+(a_{1n}A_{1j}+a_{2n}A_{2n}A_{2j}+\cdots+a_{nn}A_{nj})x_n$$

$$=b_1A_{1j}+b_2A_{2j}+\cdots+b_nA_{nj} \quad (j=1, 2\cdots n)$$

根据代数余子式的重要性质(**性质 13-7，性质 13-8 的推广**)可知，上式中 x_j 的系数等于 D，x_1，$x_2\cdots x_{j-1}$，$x_{j+1}\cdots x_n$ 的系数均等于零，又等式右端即是 D_j，于是有

$$Dx_j=D_j \quad (j=1, 2\cdots n)$$

由于 $D\neq 0$，因此，原方程组有唯一的解

$$\begin{cases} x_1=\dfrac{D_1}{D} \\ x_2=\dfrac{D_2}{D} \\ \vdots \\ x_n=\dfrac{D_n}{D} \end{cases}$$

例 13-9 解线性方程组

$$\begin{cases} 2x_1+x_2-5x_3+x_4=8 \\ x_1-3x_2-6x_4=9 \\ 2x_2-x_3+2x_4=-5 \\ x_1+4x_2-7x_3+6x_4=0 \end{cases}$$

[解]

$$D=\begin{vmatrix} 2 & 1 & -5 & 1 \\ 1 & -3 & 0 & -6 \\ 0 & 2 & -1 & 2 \\ 1 & 4 & -7 & 6 \end{vmatrix} \xlongequal[(4)-(2)]{(1)-2(2)} \begin{vmatrix} 0 & 7 & -5 & 13 \\ 1 & -3 & 0 & -6 \\ 0 & 2 & -1 & 2 \\ 0 & 7 & -7 & 12 \end{vmatrix}$$

$$=-\begin{vmatrix} 7 & -5 & 13 \\ 2 & -1 & 2 \\ 7 & -7 & 12 \end{vmatrix} \xlongequal[[3]+2[2]]{[1]+2[2]} \begin{vmatrix} -3 & -5 & 3 \\ 0 & -1 & 0 \\ -7 & -7 & -2 \end{vmatrix}=\begin{vmatrix} -3 & 3 \\ -7 & -2 \end{vmatrix}=27$$

$$D_1=\begin{vmatrix} 8 & 1 & -5 & 1 \\ 9 & -3 & 0 & -6 \\ -5 & 2 & -1 & 2 \\ 0 & 4 & -7 & 6 \end{vmatrix}=81,\quad D_2=\begin{vmatrix} 2 & 8 & -5 & 1 \\ 1 & 9 & 0 & -6 \\ 0 & -5 & -1 & 2 \\ 1 & 0 & -7 & 6 \end{vmatrix}=-108$$

$$D_3=\begin{vmatrix} 2 & 1 & 8 & 1 \\ 1 & -3 & 9 & -6 \\ 0 & 2 & -5 & 2 \\ 1 & 4 & 0 & 6 \end{vmatrix}=-27\quad D_4=\begin{vmatrix} 2 & 1 & -5 & 8 \\ 1 & -3 & 0 & 9 \\ 0 & 2 & -1 & -5 \\ 1 & 4 & -7 & 0 \end{vmatrix}=27$$

由此得
$$x_1=3,\ x_2=-4,\ x_3=-1,\ x_4=1$$

当 n 元线性方程组(13-19)的常数项 $b_1,\ b_2\cdots b_n$ 均为零时这时方程组为

$$\begin{cases} a_{11}x_1+a_{12}x_2+\cdots+a_{1n}x_n=0 \\ a_{21}x_1+a_{22}x_2+\cdots+a_{2n}x_n=0 \\ \vdots \qquad\qquad\qquad\qquad \vdots \\ a_{n1}x_1+a_{n2}x_2+\cdots+a_{nn}x_n=0 \end{cases} \tag{13-20}$$

我们称方程组(13-20)为 n 元齐次线性方程组，相应地有，当方程组(13-19)的常数项不全为零时，我们称它为 n 元非齐次线性方程组。

$x_1=x_2=\cdots=x_n=0$ 显然是上述方程组的解，称为零解，若此方程组除零解外，还有 x_1，$x_2\cdots x_n$ 不全为零的解，称为非零解。

当方程组(13-20)的系数行列式

$$D=\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & & & \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix}\neq 0$$

时，按克莱姆法则，此方程组有唯一零解，反之，若方程组还有非零解，那末它的系数行列式 D 必定等于零。

例 13-10　问 k 取何值时，二元线性方程组

$$\begin{cases} kx_1+x_2=0 \\ x_1+kx_2=0 \end{cases}$$

才能有非零解：

[解]　若原方程组有非零解，则其系数行列式必有

$$\begin{vmatrix} k & 1 \\ 1 & k \end{vmatrix}=0$$

即
$$k=1 \text{ 或 } -1$$

所以，当 k 取上面任一个值时，方程组才能有非零解。

用克莱姆法则求解 n 元线性方程组需要计算 $n+1$ 个 n 阶行列式，其计算工作量是相当大的，故在实用计算中往往改用它法。仅管如此，克莱姆法则完整地给出了 n 元线性方程组的解(当 $D\neq 0$ 时)，而且行列式方法又是进一步学习线性代数的重要基础，这一点需充分注意。