



初等函数的定义域

何 显 端 编

福建人民出版社

.62

7

3499

序 言

函数概念是整个数学课程里最主要的概念之一，它不仅在初等数学里占有极其重要的地位，而且也是学习高等数学不可缺少的基础知識。

函数是中学数学的主要内容之一，而函数的定义域又是确定变量之間函数关系的两个要素之一。同时，不管是研究数的概念的发展与代数式的恒等变形，或者是研究方程与不等式，其本质都与函数的定义域有密切的关系。例如：数的概念的发展与研究就是为了能在給定的条件之下，正确地寻求函数的定义域；代数式恒等变形的实质就是探討在进行函数解析式变形的过程，函数的定义域是否扩大或縮小的問題；解方程（組）与解不等式（組）又是寻求函数的定义域的必經途径。甚至判定解析式有无意义，方程的解的討論及产生增减根的原因，不等式的同解性……等問題，也可以从函数的定义域获得解析。所以說，如果我們能够抓住这个关键問題，并围绕它进行研究，那么对全面、系統地复习与研究上述有关内容无疑是有好处的。編写本书的目的，正是为了帮助中学学生对函数的定义域問題能作进一步的复习与研究。

除此之外，为了能围绕函数的定义域問題对中学数学内容作比較全面的复习，因此在編写本书的取材与写法上遵循下列三个原則：

（1）尽量把高中数学各科課本里有关的数学公式列入本书，使读者能全面地复习高中数学。

（2）尽量介紹解方程（組）、解不等式（組）的几种主要方法，使读者能进一步掌握解方程（組）、解不等式（組）

的技能技巧，并提高求函数的定义域的能力。

(3) 尽量做到，对同一問題用各种不同方法叙述，对同一概念用各种不同术语来表达，使读者在读过本书之后能增长一些数学知識。

由于作者的水平限制，錯誤或不妥之处在所难免，希各位读者給予指正。

ENGG 61

目 录

第一章	基本概念.....	(1)
§ 1	函数概念及其表示法.....	(1)
§ 2	函数的定义域及其表示法.....	(1)
§ 3	反函数的概念及其定义域问题.....	(4)
第二章	初等函数的定义域的求法.....	(5)
§ 1	基本初等函数的定义域.....	(5)
§ 2	初等函数的定义域的求法.....	(8)
第三章	用初等函数的定义域来解析某些问题.....	(29)
第四章	求定义域问题的几种常见形式.....	(38)
附录:	练习题答案.....	(40)

第一章 基本概念

§ 1. 函数概念及其表示法

如果对于变量 x 的每一个可取的值, 变量 y 总有确定的值与之对应, 那么就称变量 y 是变量 x 的函数. 变量 x 叫做自变量.

变量 y 是变量 x 的函数, 可以用记号 $y=f(x)$ 来表示. 应该注意的是字母 f 在这里并不是表示量, 而是表示函数的关系. 也就是表示自变量 x 与函数 y 之间的对应法则.

表示函数关系有各种不同的方法, 通常有下列三种:

1 解析法: 用一个含有这两个变量和各种数学运算符号的等式来表示这两个变量间的函数关系. 例如函数 $y = \frac{1}{x}$.

2 列表法: 把自变量的一系列的值和函数 y 的对应值列成表来表示这两个变量间的函数关系. 例如三角函数表、对数表.

3 图象法: 用坐标平面上合于函数关系的点的轨迹 (也叫做点的集合) 来表示函数的对应法则.

§ 2. 函数的定义域及其表示法

1. 确定函数的两个要素: 由 § 1 所给的函数的定义, 可以看出确定函数的两个要素是:

(1) 对应法则 (函数的依从关系);

(2) 自变量的允许值范围.

有了这两个要素, 就可以确定出一个函数. 反之, 缺乏这两个要素中的任何一个都不能确定出一个函数.

2. 函数的定义域的意义: 对于函数 $y=f(x)$ 来说,能使函数 y 有意义的所有自变量 x 的值的集合,叫做自变量 x 的允许值范围(或叫做可取值范围)。简称为函数的定义域。

3. 函数的定义域的表示法: 函数的定义域的表示法一般有三种。即: 不等式表示法、区间表示法、叙述法。

(1) 不等式表示法: 用不等式表示函数的自变量允许值的范围,就叫做不等式表示法。

例1. 函数 $y=\sqrt{x}$ 定义域是 $0 \leq x < \infty$ 。

例2. 函数 $y=\lg x$ 定义域是 $x > 0$ 。

例3. 函数 $y=\frac{1}{x}$ 定义域是 $x \neq 0$ 。

(2) 区间表示法:

区间的定义: 设有二实数 a 与 b ,且 $a < b$,所有满足不等式 $a \leq x \leq b$ 的 x 的实数集合,称为闭区间 $[a, b]$; 所有满足不等式 $a < x < b$ 的 x 的实数集合,称为开区间 (a, b) ; 所有满足不等式 $a \leq x < b$ 的 x 的实数集合,称为右开区间(或半闭区间) $[a, b)$; 满足不等式 $a < x \leq b$ 的 x 的实数集合,称为左开区间(或半开区间) $(a, b]$ 。

有时候还会遇到用符号“ $+\infty$ ”(正无限大)和“ $-\infty$ ”(负无限大)为一端或两端的区间。例如: $(-\infty, +\infty)$ 它表示满足不等式 $-\infty < x < +\infty$ 的 x 的实数集合(就是实数全体),以 $(-\infty, b)$ 与 $(-\infty, b]$ 分别表示所有满足不等式 $-\infty < x < b$ 与 $-\infty < x \leq b$ 、 $(a, +\infty)$ 与 $[a, +\infty)$ 分别表示所有满足不等式 $a < x < +\infty$ 与 $a \leq x < +\infty$ 的 x 的实数集合。这些区间都称为无限区间。

函数的定义域是用区间表示的,叫做区间表示法。

例4 函数 $y=\sqrt{1-x^2}$,我们知道这个函数的定义域是满

足不等式 $-1 \leq x \leq +1$ 的实数集合。所以說这个函数的定义域是閉区間 $[-1, +1]$ 。在写法上往往把它写成如下几种形式:

- i 函数 $y = \sqrt{1-x^2}$ 的定义域是 $[-1, 1]$;
- 或 ii 函数 $y = \sqrt{1-x^2} [-1, 1]$;
- 或 iii 定义在 $[-1, 1]$ 上的函数 $y = \sqrt{1-x^2}$ 。

这样看来,凡是可以不等式来表示的函数的定义域,一定也可以用区間来表示,有时也用不等号来代替区間的符号,例如函数 $y = \sqrt{1-x^2}$ 的定义域是閉区間 $-1 \leq x \leq 1$, 函数 $y = \operatorname{tg} x$ 的定义域是开区間 $-\frac{\pi}{2} + k\pi < x < \frac{\pi}{2} + k\pi$ (k 是整数)。

(3) 叙述法:有些函数的定义域,不便于用不等式来表示,只能用叙述来说明它,这种表示函数的定义域的方法叫做叙述法。

例 5 凸 n 边形的內角和 S 是边数 n 的函数。

$$\text{即 } S = (n-2) \cdot 180^\circ$$

这里自变量 n 的允許值范围,就难于用不等式来表示,所以只好用叙述方法来表示它,那就是函数 S 的自变量 n 的允許值范围是不小于 3 的自然数。(∵多边形的边数至少是 3)。

例 6 数列的通項公式是一个数列的第 n 項 a_n 和項数 n 間的函数关系的表达式,例如自然数列的通項公式: $a_n = n$ 的定义域是一切自然数 (n 是一切自然数)。

例 7 将 27 分为两个整数,以这两个整数作为矩形的两条邻边,則这矩形的面积 S 为其一边长 x 的函数。即

$$S = x(27-x)$$

按題意可知 S 的定义域是所有满足不等式 $1 \leq x < 27$ 的 x 的整数集合。

§3. 反函数的概念及其定义域問題

1. 反函数的概念: 如果变量 y 是自变量 x 的函数, 即 $y=f(x)$, 以变量 y 改作为自变量, 而以自变量 x 改作为变量 y 的函数 $x=g(y)$, 那么称函数 $x=g(y)$ 为函数 $y=f(x)$ 的反函数. 一般地说, 函数 $y=f(x)$ 也是函数 $x=g(y)$ 的反函数. 因此, 我們常說函数 $y=f(x)$ 与函数 $x=g(y)$ 互为反函数. 习惯上自变量用 x 来表示, 函数用 y 来表示, 因此通常把 $y=f(x)$ 的反函数写成 $y=g(x)$. 例如:

$$(I) \quad y=ax+b \quad \text{与} \quad x=\frac{1}{a}y-\frac{b}{a}; \quad (a \neq 0)$$

$$(II) \quad y=a^x \quad \text{与} \quad x=\log_a y; \quad (1 \neq a > 0)$$

$$(IX) \quad y=\sin x \quad \text{与} \quad x=\text{Arcsin } y$$

等都是互为反函数.

从这些例来看, 反函数的定义域是它的原来函数的函数值域. (即所有的函数值的集合)

从例(I)(II)看, 一次函数 $y=ax+b$ 是单值函数, 它的反函数 $x=\frac{1}{a}y-\frac{b}{a}$ 也是单值函数. 指数函数 $y=a^x$ 是单值函数, 它的反函数 $x=\log_a y$ 也是单值函数. 但从例(IX)看, 正弦函数 $y=\sin x$ 是单值函数, 而它的反函数 $x=\text{Arcsin } y$ (反正弦函数)却是多值函数. 多值函数的性质比较复杂, 通常我們不研究多值函数. 因此我們設法来规定反三角函数的单值性.

由于正弦函数 $y=\sin x$ 当自变量 x 允許值只規定在区間 $-\frac{\pi}{2} \leq x \leq \frac{\pi}{2}$ 时, 对于 y 从-1到1的每一个确定的值, x 都有一个并且只有一个确定的值与它对应. 所以我們可以規定:

函数 $y=\sin x$ 在区間 $-\frac{\pi}{2} \leq x \leq \frac{\pi}{2}$ 内的反函数叫做反正弦函

数的主值，区间 $-\frac{\pi}{2} \leq x \leq \frac{\pi}{2}$ 称为反正弦函数的主值区间。在主值区间里的反正弦函数就成为单值函数了，此时记作：

$$x = \arcsin y, \quad (-1 \leq y \leq 1, \quad -\frac{\pi}{2} \leq x \leq \frac{\pi}{2})$$

因此必须明确：反正弦函数是正弦函数的反函数。正弦函数也是反正弦函数的反函数。但是正弦函数的定义域与反正弦函数的主值区间是不相同的，因为反正弦函数的主值区间仅是正弦函数定义域的一部分。

因此还必须了解，反正弦函数的主值区间 $[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}]$ 不是正弦函数的定义域。同理反余弦函数的主值区间 $(0, \pi)$ 也不是余弦函数的定义域；反正切函数的主值区间 $(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2})$ 也不是正切函数的定义域；反余切函数的主值区间 $(0, \pi)$ 也不是余切函数的定义域等。

第二章 初等函数的定义域的求法

§1. 基本初等函数的定义域

1. 基本初等函数：以下所列的各种函数都称为基本初等函数。

(1) 常数函数： $y = f(x) = C$ ，其中 C 为常数。

(2) 幂函数： $y = x^n$ ，其中 n 为不等 0 的任何实数。

(3) 指数函数： $y = a^x$ ，其中 $a > 0$ 且 $a \neq 1$ 。

(4) 对数函数： $y = \log_a x$ ，其中 $a > 0$ 且 $a \neq 1$ 。

(5) 三角函数： $y = \sin x$ ； $y = \cos x$ ； $y = \operatorname{tg} x$ ；

$y = \operatorname{ctg} x$ ； $y = \sec x$ ； $y = \operatorname{cosec} x$ 。

(6)反三角函数: $y=\arcsin x$; $y=\arccos x$;

$y=\arctg x$; $y=\operatorname{arctg} x$;

$y=\operatorname{arcsec} x$; $y=\operatorname{arccosec} x$.

2.初等函数: 由基本初等函数经过有限次的初等运算所构成的函数, 统称为初等函数(当然也包括基本初等函数在内).

所谓初等运算, 就是指代数运算(加、减、乘、除、整数次的乘方、开方)和初等超越运算(无理数次乘方, 对数化, 三角运算, 反三角运算等).

例如: $y=2x^2+bx+c$ $y=\log_a \frac{1}{x}$ $y=2x^2+\lg x$

$y=\frac{\sqrt{x}+1}{\sin x}$ 等等都是初等函数.

由此看来, 初等函数的对应法则(即函数关系)总可以用有限个的初等运算符号连接常量和自变量所组成的数学式子来表达它. 也就是说初等函数都可以用解析法来表示.

初等函数按其函数关系式(数学式子)中所含的运算符号, 可作如下的分类:

初等函数	{	代数函数	{	有理函数	{	有理整函数
		无理函数		有理分函数		
		...	...	(表达式里只含有代数运算的符号)		
		初等超越函数	(指数函数, 对数函数, 三角函数, 反三角函数)			
		...	...	(表达式里含有初等超越运算的符号)		

3.基本初等函数的定义域: 由于我们所讨论的对象都是初等函数, 而初等函数又都是由几种基本初等函数经过有限次的代数运算而构成的. 所以要寻求初等函数的定义域, 首先就要

記熟各种基本初等函数的定义域。(仅以中学数学所介紹的内容为限)

(1) 常数函数 $y=f(x)=C$, 其定义域是一切实数.

(2) 幂函数 $y=x^n$, 当 n 为正整数时, 其定义域是一切实数; 当 n 为零或 n 为负整数时, 其定义域是除零以外的一切实数.

(3) 指数函数 $y=a^x$, 其中 $a>0$ 且 $a\neq 1$, 其定义域是一切实数.

(4) 对数函数 $y=\log_a x$, 其中 $a>0$ 且 $a\neq 1$, 其定义域是一切正实数.

(5) 三角函数:

1. 正弦函数 $y=\sin x$ 的定义域是一切角度值 (若用弧度表示角度, 即为一切实数).

2. 余弦函数 $y=\cos x$ 的定义域是一切角度 (若用弧度表示角度, 即为一切实数).

3. 正切函数 $y=\operatorname{tg} x$ 的定义域是 $x\neq K\pi + \frac{\pi}{2}$ (K 为整数).

4. 余切函数 $y=\operatorname{ctg} x$ 的定义域是 $x\neq K\pi$ (K 为整数).

5. 正割函数 $y=\sec x$ 的定义域是 $x\neq K\pi + \frac{\pi}{2}$ (K 为整数).

6. 余割函数 $y=\operatorname{cosec} x$ 的定义域是 $x\neq K\pi$ (K 为整数).

(6) 反三角函数:

1. 反正弦 $y=\arcsin x$, 其定义域是 $-1\leq x\leq 1$.

2. 反余弦 $y=\arccos x$, 其定义域是 $-1\leq x\leq 1$.

3. 反正切 $y=\operatorname{arctg} x$, 其定义域是 $-\infty < x < +\infty$.

4. 反余切 $y=\operatorname{arccotg} x$, 其定义域是 $-\infty < x < +\infty$.

5. 反正割 $y=\operatorname{arcsec} x$, 其定义域是 $|x|\geq 1$.

6. 反余割 $y=\operatorname{arccosec} x$, 其定义域是 $|x|\geq 1$.

§2. 初等函数的定义域的求法

初等函数既然都可以用解析式来表示它（第二章§1），因此在一般情况下，如果给定一个初等函数，且不附加其他条件，那么这个初等函数的定义域就是指那些能使函数的解析式有意义的变量允许值的集合（也称为它的解析式的存在域）。

例 8 函数 $f(x) = \frac{1}{x}$ 的定义域就是使分式 $\frac{1}{x}$ 有意义的 x 的允许值的集合（即 $x \neq 0$ 的实数）。

如果有了附加条件，那么函数的定义域往往比它的解析式的存在域小的多。比如说函数关系是反映某一个实际问题，这时就会出现这种情况。

例 9 圆周长 C 是圆半径 r 的一次函数

$$\text{即} \quad C = 2\pi r$$

若按这个解析式， r 取一切实数时，解析式 $2\pi r$ 都有意义，所以解析式的存在域是全体实数的集合。但按实际问题来考虑，半径 r 只能取正值才有意义，所以定义域是取 $r > 0$ 的所有正实数。这个定义域所含的元素只是全体实数集合里的一部分元素。

由此可见，对于某个函数关系式来说，求它的定义域，如果只从数学本身的意义来考虑时，它的定义域就是它的解析式的存在域；如果是反映某一个实际问题时，它的定义域是它的解析式的存在域里符合实际问题意义的一部分的数的集合。但不论函数关系是只从数学本身的意义出发也好，或是反映实际问题也好，求函数的定义域，一般总是先求出它的解析式的变量允许值范围（即存在域）。

但是使一个解析式有意义的变量允许值，与所研究的数的范围有关。

例如：对于解析式 $\sqrt{-2-x^2}$ 来讲，若在实数范围内来讨论它，解析式 $\sqrt{-2-x^2}$ 总是没有意义的。若在复数范围内来讨论它，那么对于变量 x 的任何值，解析式 $\sqrt{-2-x^2}$ 都是有意义的。又如解析式 $\sqrt{x-1}$ ，在实数范围内来研究它，变量 x 又能取不小于1（即 $x \geq 1$ ）的一切值才有意义。如果在复数范围内来研究，即 x 可以取一切复数值。所以我们在考虑解析式何时有意义时，首先要明确在怎样的数的范围内来讨论它。

我们所讨论的初等函数，都是在实数范围内进行研究的。今后我们在研究解析式的变量允许值时，都是指在实数范围内的允许值。

由此看来，虽然初等函数都可以用解析式来表示。但是，未必每个解析式都表示出一个初等函数。例如解析式 $\sqrt{-2-x^2} + \lg(-1-x^2)$ 在实数范围内都不表示任何初等函数。因为这些式子在实数范围内来讲，不论 x 取任何值，它们都是没有意义的。

当我们进一步明确了函数的定义域的意义之后，就可以着手来解决求函数的定义域的问题。

具体的求法，一般说有如下几种：

1. 从各种数学式子的定义出发，再借助于解方程或解不等式，求出使函数的解析式有意义的变量的允许值范围。

（1）一般说，用代数整式所表示的函数关系，它的定义域是一切实数。

例10 一次函数 $y=kx+b$ ，这里 k, b 都是常数，且 $k \neq 0$ ，其定义域是 $-\infty < x < +\infty$ 。

例11 二次函数 $y=ax^2+bx+c$ ，这里 a, b, c 都是常数，且 $a \neq 0$ ，其定义域是 $-\infty < x < +\infty$ 。

（2）一般地说，用分式所表示的函数关系，它的定义域是使其分母的值不为零且使其分子有意义的所有实数集合。

例12 反比例函数 $y = \frac{1}{x}$ ，其定义域是 $x \neq 0$ 的任何实数，即 $-\infty < x < 0$ 与 $0 < x < +\infty$ 。

例13 函数 $y = \frac{1}{\sin x - \frac{1}{2}}$ ，其定义域是满足 $\sin x - \frac{1}{2} \neq 0$ 的 x 值的集合。由于三角方程 $\sin x - \frac{1}{2} = 0$ 的解是 $x = n\pi + (-1)^n \frac{\pi}{6}$ (n 为整数)，所以 y 的定义域是 $x \neq n\pi + (-1)^n \frac{\pi}{6}$ 的一切角度值 (n 为整数)。

例14 函数 $y = \frac{1}{x + |x|}$ 其定义域是 $x > 0$ 。(由解 $x + |x| \neq 0$ 而得)

例15 函数 $y = \frac{1}{x^3 - 7x + 6}$ 其定义域是满足 $x^3 - 7x + 6 \neq 0$ 的 x 值的集合。

解方程 $x^3 - 7x + 6 = 0$ ，得其三个根是：1，2，-3。

所以函数 y 的定义域是 $x \neq 1, 2, -3$ 的任何实数。

(3) 一般地说，用偶次根式所表示的函数关系，它的定义域是必须使根号内式子的值是非负实数。

例16 函数 $y = \sqrt{x^2 - 4}$ 其定义域是不等式 $x^2 - 4 \geq 0$ 的解。

解 $x^2 - 4 \geq 0$ 得 $x \geq 2$ 或 $x \leq -2$ 。

所以函数 y 的定义域是 $x \geq 2$ 与 $x \leq -2$ 。

例17 函数 $y = \sqrt{3^x - 9}$ ，其定义域是不等式 $3^x - 9 \geq 0$ 的解。

解 $3^x - 9 \geq 0$ 即 $3^x \geq 9 = 3^2$ ，得 $x \geq 2$ 。

所以函数 y 的定义域是 $x \geq 2$ 。

(4) 一般地说，用奇次根式所表示的函数关系，其定义

域是一切实数。

例18 函数 $y = \sqrt{x-2}$ ，因为 $x-2$ 可以是任何实数，所以函数 y 的定义域是 $-\infty < x < +\infty$ 。

(5) 一般地说，当方幂的指数是无理数或含有变数时，方幂的底式应该是正数，方幂才有意义。

例19 函数 $y = x^{\sqrt{2}}$ ，其定义域是 $x > 0$ 。

例20 函数 $y = x^x$ ，其定义域是 $x > 0$ 。

(6) 一般地说，用对数式所表示的函数关系，其定义域是使真数为正数的实数集合。

例21 函数 $y = \lg|x|$ ，其定义域是不等式 $|x| > 0$ 的解，即 $x \neq 0$ 。所以函数 y 的定义域是 $x \neq 0$ 的任何实数。

例22 函数 $y = \lg(x^2 + 4x - 5)$ ，其定义域是不等式 $x^2 + 4x - 5 > 0$ 的解。

而 $x^2 + 4x - 5 = (x+5)(x-1) > 0$ 。

所以不等式 $x^2 + 4x - 5 > 0$ 的解是 $x > 1$ 和 $x < -5$ 。

则函数 y 的定义域是 $x > 1$ 与 $x < -5$ 。

例23 函数 $y = a^{1-\lg x}$ ($a > 0$)，因为恒等式 $n = a^{\lg a^n}$ 成立的条件是 $n > 0$ ，所以其定义域是 $x > 0$ 。

(7) 一般地说，用三角函数式表示的函数关系，对于正弦和余弦，其自变量可以为一切实数（用弧度表示角）；对于正切和正割，其自变量应取使角 $\alpha \neq k\pi + \frac{\pi}{2}$ 的一切实数值；

对于余切和余割，其自变量应使角 $\alpha \neq k\pi$ (k 为整数)。

例24 函数 $y = \sin(x+1)$ ， $x+1$ 可以是一切实数，所以其定义域是 x 为任何实数。

例25 函数 $y = \sec(3x+45^\circ)$ ，其定义域是 $3x+45^\circ \neq k \cdot 180^\circ + 90^\circ$ ，即 $x \neq k \cdot 60^\circ + 15^\circ$ (k 为整数)。

例25 函数 $y = \operatorname{ctg} x^2$ ，其定义域是 $x^2 \neq k\pi$ 的解，即 $x \neq \pm\sqrt{k\pi}$ (k 为整数)。所以函数 y 的定义域是无限个开区间的并集：

$$\cdots, -\sqrt{3\pi} < x < -\sqrt{2\pi}, -\sqrt{2\pi} < x < -\sqrt{\pi}, \\ -\sqrt{\pi} < x < 0, 0 < x < \sqrt{\pi}, \sqrt{\pi} < x < \sqrt{2\pi}, \cdots$$

(8) 一般地说，用反三角函数符号表示的函数关系，对于反正弦和反余弦，其中自变量应使“ $\arcsin$ ”和“ $\arccos$ ”符号后面式子的绝对值不大于 1；对于反正切和反余切来说在符号“ arctg ”和“ arcctg ”后面式子的值可以是任何实数；对于反正割和反余割来说，在符号“ arcsec ”和“ $\operatorname{arccosec}$ ”后面式子的值的绝对值不小于 1。

例27 函数 $y = \arccos(1-x)$ ，其定义域是不等式 $|1-x| \leq 1$ 的解。

解之，得 $-1 \leq 1-x \leq 1$ ，即 $2 \geq x \geq 0$ 。

所以函数 y 的定义域是 $2 \geq x \geq 0$ 。

例28 函数 $y = \operatorname{arctg}(x-1)$ ， $(x-1)$ 可以是任何实数，所以其定义域是 $-\infty < x < \infty$ 。

例29 函数 $y = \operatorname{arcsec} 2x$ ，其定义域是不等式 $|2x| \geq 1$ 的解。

解不等式 $|2x| \geq 1$ 得 $x \geq \frac{1}{2}$ 或 $x \leq -\frac{1}{2}$ 。所以函数 y 的定义域是 $x \geq \frac{1}{2}$ 与 $x \leq -\frac{1}{2}$ 。

练 习 题 一

求下列各函数的定义域：

$$1. y = \frac{1}{(x-1)(2x-1)}; \quad 2. y = \frac{x^2+2}{x-|x|},$$

3. $y = \frac{1}{|x-2| + |x-1|}$; 4. $y = \sqrt{|x|}$;
 5. $y = \sqrt{x}$; 6. $y = 2\sqrt{x-1}$;
 7. $y = \log_2(-x)$; 8. $y = \log_a(|x| - x)$;
 9. $y = \sin(2x + 270^\circ)$; 10. $y = \cos(x + 1)$;
 11. $y = \operatorname{tg}(2x + 1)$; 12. $y = \operatorname{ctg}(5x)$;
 13. $y = \operatorname{cosec}(x - \pi)$; 14. $y = \arcsin 2x$;
 15. $y = \operatorname{arcctg}(x + 1)$; 16. $y = (x - 1)^{x-2}$.

2. 要求初等函数的定义域，一般不会象上面的例子那样简单，而必须借助于解方程组或解不等式组才能求得其定义域。例如求复合函数的定义域。

(1) 复合函数的定义：如果 $y = f(u)$ 是表示变量 y 关于变量 u 的函数， $u = \varphi(x)$ 是表示变量 u 关于变量 x 的函数，那么， $y = f[\varphi(x)]$ 就是表示变量 y 关于变量 x 的函数。用这种方式给出的函数叫做复合函数。其中变量 u 称为中间变量（或称中间函数），变量 x 称为自变量。例如

函数 $y = \lg u$ ，中间函数 $u = \sqrt{x}$ ，则变量 $y = \lg \sqrt{x}$ 就是自变量 x 的复合函数。

这里必须指出，复合函数的中间变量可以不止一个。例如函数 $y = \lg(1 + \sqrt{1 + x^2})$ ，可以看作它是由函数 $y = \lg u$ ， $u = 1 + z$ ， $z = \sqrt{v}$ ， $v = 1 + w$ ， $w = x^2$ “复合”而成的。它的中间变量就有四个，即 u ， z ， v ， w 。

(2) 复合函数的定义域：复合函数 $y = f[\varphi(x)]$ 的定义域就是指 $\varphi(x)$ 的定义域里那些能使 $u = \varphi(x)$ 的值属于函数 $f(u)$ 的定义域的 x 值的集合。所以说，在求复合函数的定义域时，应先确定函数 $\varphi(x)$ 的定义域，然后再求出可使 $f(u)$ 有意义的 x 可取值的范围。