

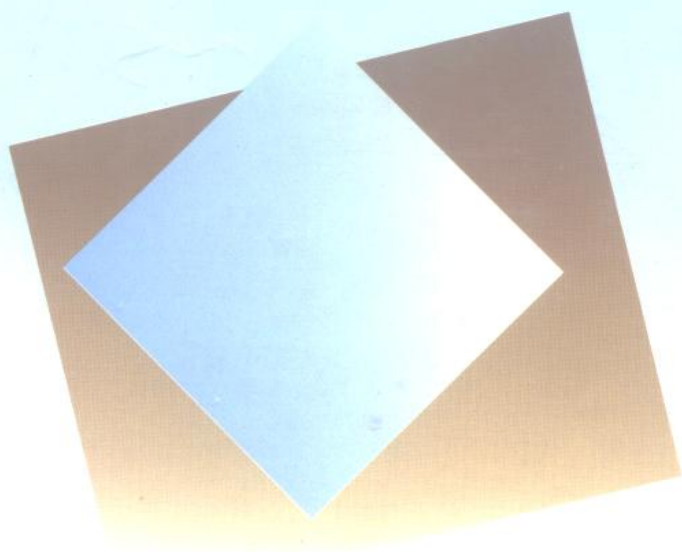
高等学校辅导教材

新编高等数学题解

(下册)

(第二版)

同济高等数学(四版)习题选解
是非题题解 · 综合题题解



■ 王东生 周泰文 刘后邗 俞政 编

华中理工大学出版社

013-44

V116-2

(2) 2

415912

高等学校辅导教材

新编高等数学题解

(第二版)

(下册)

同济高等数学(四版)习题选解

是非题题解 · 综合题题解

王东生 周泰文 编
刘后刊 俞 政



00415912

华中理工大学出版社

图书在版编目(CIP)数据

新编高等数学题解(下册)/王东生等编. -2 版
武汉:华中理工大学出版社,1998 年 11 月
ISBN 7-5609-0902-7

I. 新…

II. ①王… ②周… ③刘… ④俞…

III. 高等数学-自学参考资料

IV. O13

新编高等数学题解(下册)

王东生 周泰文 刘后邗 俞 政 编
责任编辑:李立鹏

*

华中理工大学出版社出版发行

(武昌喻家山 邮编:430074)

新华书店湖北发行所经销

华中理工大学印刷厂印刷

*

开本:850×1168 1/32 印张:16.125 字数:400 000

1998 年 11 月第 2 版 1999 年 1 月第 8 次印刷

印数:65 001—75 000

ISBN 7-5609-0902-7/O · 118

定价:16.80 元

(本书若有印装质量问题,请向出版社发行部调换)

内 容 简 介

本书是学习工科“高等数学”、准备“高等数学”考试以及“高等数学”教学的参考书。本书题解详细,很多题给出多种解法,并附有思路分析等内容,能起到深入学习“高等数学”的辅导作用。

本书分上下两册出版,下册内容为多元函数微分法及其应用;重积分;曲线积分与曲面积分;无穷级数;微分方程等。每章内容由四部分组成:①内容提要;②习题选解;③是非题题解;④综合题解。

DV72/15

第二版前言

本书自 1994 年 10 月出版以来,已发行 5 万余套,1996 年 2 月被全国大学出版社协会评为“畅销书”并授予“荣誉奖”。

几年来,本书配合同济大学主编的《高等数学》(三版)教材,对学生学习高等数学和报考研究生者复习高等数学均起到了积极的辅导作用;对教师备课和批改作业,亦提供了有益的参考。

为了更好地贯彻国家教委关于高等工科院校的《高等数学课程教学基本要求》,同济高数已由三版改为四版,作为辅导教材,也应作相应的改变。

本版的特点是:

一、密切配合同济四版教材,对原书内容作了相应的调动和增删;

二、反映了近年来各类考试的要求,对原书的“是非题题解”、“综合题题解”、“各类试题选”作了更新;

三、对原书疏漏之处作了相应的完善或更正。

第二版由王东生、周泰文主编,刘后邰、俞政参加了修改工作。

借此机会,我们谨向对原书的疏漏之处提出宝贵意见的师生和读者;对第二版工作提出有益建议的老师;对为本书的出版、发行付出巨大辛劳的华中理工大学出版社的有关同志,表示衷心的感谢。

编者

1997 年 8 月 10 日

前 言

“高等数学”是工科院校的一门重点基础课,近年来被许多部委和省市列为教学的重点评估课程之一. 在全国硕士学位研究生考试中被指定为全国统考科目. 每年有一大批新同学升入高等院校本科、专科、电大、职大、函大、夜大学习高等数学,他们渴望有一本切合实际的参考书;每年还有一批同志准备硕士学位研究生考试,他们渴望有一本针对性强的复习资料. 本书编者根据多年来从事“高等数学”教学的经验,力图靠近这一目标.

本书分上、下册,每章由四部分组成:

第一部分是“内容提要”. 书应该越读越薄,每一章中真正应该牢记并成为解题武器的内容其实并不多,这一部分就是为这方面准备的,特别对那些曾经学过高等数学,而又急于捡起这门课的同志,无疑将起到立竿见影的效果;

第二部分是“习题选解”. 高等数学学习效果的一个重要标志是会不会做题. 我们采用同济大学主编的“高等数学”第三版,对其中大部分习题(包括所有较难解和带*号的题)给出了解答. 值得强调的是,我们采用该书的习题,是因为该书是我国高等学校使用量最大的一本数学教材;它在全国优秀教材评选中荣获国家教委一等奖;并被许多院校指定为研究生考试的复习教材. 该书的习题难易适度,联系实际,比较准确地反映了学习高等数学应达到的水平. 我们从多年习题课教学的经验出发,在许多习题的解答前后加了“思路分析”、“注意”,并且给出了多种解法. 我们希望读者重视这些方面. 在使用这部分时,初学者应该先独立思考,自己解答,然后与题解对照,做到理解原理、明确步骤、掌握方法和技巧. 只有这样,才能有效地提高自己的解题能力. 如果只是抄袭而不求理解,那就使我们大大地失望了;

第三部分是“是非题题解”. 在这一部分里, 我们汇集了一些重要的正误判断题, 弄清这些问题, 学习就深入了一步;

第四部分是“综合题题解”. 培养学生解综合题的能力, 是教学中的一个难点, 针对这一点, 我们编写了这一部分.

为了便于查找各章、各部分的题解, 对题号的意义规定如下:

“习题”题号由表示章序、习题序、题序(小题序)的三个或四个数码构成, 例如, 4. 4. 1(2)是指同济“高等数学”(第三版)第四章习题 4—4 中第 1 题的第(2)小题, 题解中所指教材, 也都是指同济“高等数学”(第三版);

“是非题”题号由表示章序、题序的两个数码构成, 加圆括号. 例如(4—6)是指本书中第四章是非题部分的第 6 题;

“综合题”题号由表示章序、题序的两个数码构成, 加方括号. 例如[5—14]是指本书中第五章综合题部分的第 14 题.

由于水平有限, 时间仓促, 不足之处一定难免, 恳请广大读者指正.

编 者

1994 年 5 月

目 录

第八章 多元函数微分法及其应用	(1)
一、内容提要	(1)
二、习题选解	(6)
习题 8-1	(6)
习题 8-2	(9)
习题 8-3	(11)
习题 8-4	(14)
习题 8-5	(19)
习题 8-6	(26)
习题 8-7	(30)
习题 8-8	(32)
习题 8-9	(36)
习题 8-10	(38)
总习题八	(40)
三、是非题题解	(48)
四、综合题题解	(56)
第九章 重积分	(79)
一、内容提要	(79)
二、习题选解	(85)
习题 9-1	(85)
习题 9-2(1)	(88)
习题 9-2(2)	(94)
习题 9-2(3)	(98)
习题 9-3	(103)
习题 9-4	(108)
习题 9-5	(111)
习题 9-6	(118)
总习题九	(121)
三、是非题题解	(128)
四、综合题题解	(132)
第十章 曲线积分与曲面积分	(156)
一、内容提要	(156)
二、习题选解	(163)
习题 10-1	(163)
习题 10-2	(167)
习题 10-3	(170)
习题 10-4	(176)
习题 10-5	(179)
习题 10-6	(183)
习题 10-7	(186)
总习题十	(191)

三、是非题题解	(198)
四、综合题题解	(205)
第十一章 无穷级数	(234)
一、内容提要	(234)
二、习题选解	(243)
习题 11-1	(243)
习题 11-2	(247)
习题 11-3	(252)
习题 11-4	(256)
习题 11-5	(261)
习题 11-6	(265)
习题 11-7	(269)
习题 11-8	(273)
习题 11-9	(277)
习题 11-10	(280)
总习题十一	(281)
三、是非题题解	(297)
四、综合题题解	(307)
第十二章 微分方程	(333)
一、内容提要	(333)
二、习题选解	(339)
习题 12-1	(339)
习题 12-2	(342)
习题 12-3	(347)
习题 12-4	(351)
习题 12-5	(360)
习题 12-6	(366)
习题 12-7	(374)
习题 12-8	(379)
习题 12-9	(384)
习题 12-10	(392)
习题 12-11	(395)
习题 12-12	(401)
总习题十二	(406)
三、是非题题解	(421)
四、综合题题解	(423)
各类试题选	
考试题选(一)	(454)
考试题选(二)	(460)
考试题选(三)	(468)
考试题选(四)	(478)
考试题选(五)	(486)
参考文献	(504)

第八章 多元函数微分法及其应用

一、内 容 提 要

本章内容与一元函数微分法有很多类似之处,学习时应对比一元,搞清异同.

1. 基本概念和性质

(1) 多元函数

若点 P 是 $n(n \geq 2)$ 维空间内的一点,则 $u=f(P)$ 便是 n 元函数的一般形式;与一元函数相似,定义域和对应法则是多元函数的两要素.

(2) 二重极限

$$\lim_{\substack{x \rightarrow x_0 \\ y \rightarrow y_0}} f(x, y) = A \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} \forall \epsilon > 0, \text{总存在 } \delta > 0, \text{使得} \\ \text{当 } 0 < \sqrt{(x-x_0)^2 + (y-y_0)^2} < \delta \text{ 时} \\ |f(x, y) - A| < \epsilon \end{array} \right]$$

注意 此处 $\begin{matrix} x \rightarrow x_0 \\ y \rightarrow y_0 \end{matrix}$ 表示动点 $P(x, y)$ 沿任何线路趋于定点 $P(x_0, y_0)$,亦可用 $(x, y) \rightarrow (x_0, y_0)$ 或 $P \rightarrow P_0$ 来表示;

$\lim_{\substack{x \rightarrow x_0 \\ y \rightarrow y_0}} f(x, y)$ 与 $\lim_{\substack{P \text{ 沿某} \\ \text{线路} \rightarrow P_0}} f(x, y)$ 仅当前者存在时方能相等;

一元函数极限的运算法则,可推广到二重极限.

(3) 连续

$$u=f(P) \text{ 在点 } P_0 \text{ 处连续} \Leftrightarrow \lim_{P \rightarrow P_0} f(P) = f(P_0).$$

与一元函数类似,有最大(小)值、介值定理;一切多元初等函数在其定义区域内连续. 利用连续定义求极限是求二重极限的一

个重要方法.

(4) 偏导数

设 $z=f(x,y)$ 在 $P(x_0, y_0)$ 的某邻域内有定义, 则

$$\left. \frac{\partial z}{\partial x} \right|_{(x_0, y_0)} \triangleq \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{f(x_0 + \Delta x, y_0) - f(x_0, y_0)}{\Delta x} \quad (\text{存在时});$$

类似地, 有 $\left. \frac{\partial z}{\partial y} \right|_{(x_0, y_0)}$ 的定义. 所以, 偏导数是双侧极限.

几何意义:

$\left. \frac{\partial z}{\partial x} \right|_{(x_0, y_0)}$ 表示平面 $y=y_0$ 上的曲线 $z=f(x, y_0)$ 在点 $(x_0, y_0,$

$z_0)$ 处的切线对 x 轴的斜率;

$\left. \frac{\partial z}{\partial y} \right|_{(x_0, y_0)}$ 表示平面 $x=x_0$ 上的曲线 $z=f(x_0, y)$ 在点 $(x_0, y_0,$

$z_0)$ 处的切线对 y 轴的斜率.

求偏导数法则同一元函数;

当二阶混合偏导数 $\frac{\partial^2 z}{\partial y \partial x}$ 与 $\frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y}$ 在区域 D 内连续时, 则在 D 内

$$\text{有 } \frac{\partial^2 z}{\partial y \partial x} = \frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y}.$$

(5) 全微分

设 $z=f(x,y)$, 当 $\Delta z=f(x+\Delta x, y+\Delta y)-f(x,y)$ 可表成

$$A \cdot \Delta x + B \cdot \Delta y + o(\rho)$$

(此处, A, B 与 $\Delta x, \Delta y$ 无关, $\rho = \sqrt{(\Delta x)^2 + (\Delta y)^2}$) 时, 则称 Δx 与 Δy 的线性组合 $A \cdot \Delta x + B \cdot \Delta y$ 为此函数在点 (x, y) 处 (相应于 $\Delta x, \Delta y$) 的全微分, 记成 $dz = A \cdot \Delta x + B \cdot \Delta y$, 并称函数在点 (x, y) 处可微.

$$\text{可证明: } A = \frac{\partial z}{\partial x}, B = \frac{\partial z}{\partial y}.$$

无论 u, v 是自变量还是中间变量, 均有全微分形式的不变性

$$dz = \frac{\partial z}{\partial u} du + \frac{\partial z}{\partial v} dv.$$

极限、连续、可导、可微的关系如图 8-1.

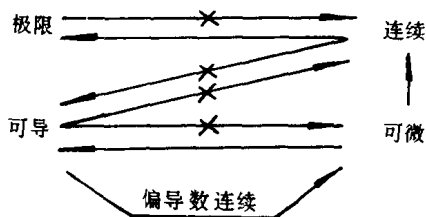


图 8-1

(6) 方向导数

$$\frac{\partial f}{\partial l} \triangleq \lim_{\rho \rightarrow 0} \frac{f(x + \Delta x, y + \Delta y) - f(x, y)}{\rho}$$

[此处动点 $(x + \Delta x, y + \Delta y)$ 在起点为 (x, y) 的向量 l 的方向上, 所以方向导数是单侧极限]

$$= \frac{\partial f}{\partial x} \cos \alpha + \frac{\partial f}{\partial y} \cos \beta.$$

[此处 $\alpha = \langle i, l \rangle$ ①, $\beta = \langle j, l \rangle$.]

当 $\alpha = 0$ 时, $\frac{\partial f}{\partial l} = \frac{\partial f}{\partial x}$ 不一定成立;

当 $\alpha = \frac{\pi}{2}$ 时, $\frac{\partial f}{\partial l} = \frac{\partial f}{\partial y}$ 不一定成立.

(7) 梯度

$$\text{grad} f(x, y) \triangleq \frac{\partial f}{\partial x} i + \frac{\partial f}{\partial y} j,$$

若 $l^\circ = \frac{l}{|l|}$, 则

$$\begin{aligned} \frac{\partial f}{\partial l} &= \left\{ \frac{\partial f}{\partial x}, \frac{\partial f}{\partial y} \right\} \cdot \{ \cos \alpha, \cos \beta \} = \text{grad} f(x, y) \cdot l^\circ \\ &= |\text{grad} f(x, y)| \cos \langle \text{grad} f(x, y), l^\circ \rangle. \end{aligned}$$

2. 求导运算

(1) 复合函数的求导法则.

① $\langle a, b \rangle$ 表示两向量 a, b 的夹角, 且 $\langle a, b \rangle \in [0, \pi]$.

1° 设 $z=f(u,v), u=u(x,y), v=v(x,y)$, 则

$$\frac{\partial z}{\partial x} = \frac{\partial f}{\partial u} \cdot \frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial f}{\partial v} \cdot \frac{\partial v}{\partial x};$$

$$\frac{\partial z}{\partial y} = \frac{\partial f}{\partial u} \cdot \frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial f}{\partial v} \cdot \frac{\partial v}{\partial y}.$$

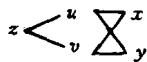


图 8-2

2° 设 $z=f(u,v,x), u=u(x,y), v=v(x,y)$,

则

$$\frac{\partial z}{\partial x} = \frac{\partial f}{\partial u} \cdot \frac{\partial u}{\partial x}$$

$$+ \frac{\partial f}{\partial v} \cdot \frac{\partial v}{\partial x} + \frac{\partial f}{\partial x}.$$

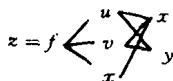


图 8-3

注意 上式中最后一项 $\frac{\partial f}{\partial x}$ 不能写成 $\frac{\partial z}{\partial x}$.

3° 设 $z=f(u,v,t) \quad u=u(t), v=v(t)$, 则

$$\frac{dz}{dt} = \frac{\partial f}{\partial u} \cdot \frac{du}{dt}$$

$$+ \frac{\partial f}{\partial v} \cdot \frac{dv}{dt} + \frac{\partial f}{\partial t}.$$

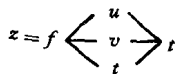


图 8-4

(2) 隐函数的求导法则

1° 一个方程的情形

若 $F(x,y)=0$ 能确定 $y=y(x)$, 则 $\frac{dy}{dx} = -\frac{F_x}{F_y}$;

若 $F(x,y,z)=0$ 能确定 $z=z(x,y)$, 则

$$\frac{\partial z}{\partial x} = -\frac{F_x}{F_z}; \quad \frac{\partial z}{\partial y} = -\frac{F_y}{F_z}.$$

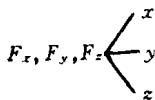


图 8-5

注意 此处的 F_z 是 F 中将 x, y 均当作常量仅对 z 求导的结果, 一般地 F_z 的结构中, 仍然有 x, y, z , 所以 F_z 仍应看作是 x, y, z 的函数, 图示如右; 对 F_x, F_y 也应作类似的理解。

2° 方程组的情形

若方程
$$\begin{cases} F(x,y,z)=0; & \text{①} \\ G(x,y,z)=0 & \text{②} \end{cases}$$

能确定两个一元隐函数: $y=y(x), z=z(x)$, 无须求出 $y=y(x)$ 或 $z=z(x)$, 只要在①, ②两边分别对 x 求导, 得

$$\begin{cases} F_x + F_y \cdot \frac{dy}{dx} + F_z \cdot \frac{dz}{dx} = 0; \\ G_x + G_y \cdot \frac{dy}{dx} + G_z \cdot \frac{dz}{dx} = 0. \end{cases}$$

解上述关于 $\frac{dy}{dx}, \frac{dz}{dx}$ 的二元一次方程组, 即可求出 $\frac{dy}{dx}$ 与 $\frac{dz}{dx}$;

若方程
$$\begin{cases} F(x, y, u, v) = 0; \\ G(x, y, u, v) = 0. \end{cases}$$

能确定两个二元隐函数: $u = u(x, y)$, $v = v(x, y)$, 无须求出 $u = u(x, y)$ 或 $v = v(x, y)$, 仿上法即可求出 $\frac{\partial u}{\partial x}, \frac{\partial v}{\partial x}$ 及 $\frac{\partial u}{\partial y}, \frac{\partial v}{\partial y}$.

(3) 高阶偏导数的求法

求高阶偏导数时还须树立下列观点:

若 $z = f(u, v)$, 则 $\frac{\partial z}{\partial u}$ 或 $\frac{\partial z}{\partial v}$ 仍然是 u, v 的函数, 图 8-6 示如:

$$\begin{array}{l} z = f \begin{array}{l} \swarrow u \\ \searrow v \end{array} \quad \begin{array}{l} \frac{\partial z}{\partial u} = \frac{\partial f}{\partial u} = f_u = f'_1 < \begin{array}{l} u \\ v \end{array} \\ \frac{\partial z}{\partial v} = \frac{\partial f}{\partial v} = f_v = f'_2 < \begin{array}{l} u \\ v \end{array} \end{array} \end{array}$$

图 8-6

有了上述观点, 利用求导法则就可以正确地求出高阶偏导数.

3. 应用

(1) 几何应用

- 1° 求空间曲线的切线和法平面方程;
- 2° 求空间曲面的法线和切平面方程.

(2) 极值应用

- 1° 求一个多元函数的极值.

利用必要条件求出各驻点; 再用充分条件分别对各驻点进行判定.

- 2° 求一个多元函数在某一个或 m 个条件限制下的条件极值.

若 目标函数为 $u = f(x, y, z)$,

条件方程为 $\varphi_1(x, y, z) = 0; \varphi_2(x, y, z) = 0,$

令 $F(x, y, z, \lambda_1, \lambda_2) = f(x, y, z) + \lambda_1 \varphi_1(x, y, z) + \lambda_2 \varphi_2(x, y, z),$

$$\text{解方程组} \quad \begin{cases} F_x = 0, \\ F_y = 0, \\ F_z = 0, \\ F_{\lambda_1} = 0, \\ F_{\lambda_2} = 0, \end{cases} \quad \text{求出 } x, y, z,$$

则 (x, y, z) 就是可能的极值点; 再根据具体问题就可判定 (x, y, z) 为极大(或极小)值点.

*(3) 近似计算和最小二乘法

二、习题选解

习 题 8-1

8.1.1 已知函数 $f(x, y) = x^2 + y^2 - xy \tan \frac{x}{y}$, 试求 $f(tx, ty)$.

$$\begin{aligned} \text{解} \quad f(tx, ty) &= (tx)^2 + (ty)^2 - tx \cdot ty \cdot \tan \frac{tx}{ty} \\ &= t^2 \left(x^2 + y^2 - xy \tan \frac{x}{y} \right) \\ &= t^2 f(x, y). \end{aligned}$$

8.1.4 求下列各函数的定义域:

分析 二元函数的定义域一般是平面区域, 三元函数的定义域一般是空间区域, 这些点集可用使函数有定义的自变量所应满足的不等式或不等式组表示. 怎样去找用不等式或不等式组具体表示的这种区域呢? 可用“试点法”. 以 $\varphi(x, y) > 0$ 或 $\varphi(x, y) < 0$ 为

例,先用曲线 $\varphi(x,y)=0$ 将平面分为两个区域,在一个区域内任取一点 (x_0,y_0) 代入 $\varphi(x,y)$,如果 $\varphi(x_0,y_0)$ 为正,则在此区域内恒有 $\varphi(x,y)>0$;如果 $\varphi(x_0,y_0)$ 为负,则在此区域内恒有 $\varphi(x,y)<0$. (读者可用反证法证明).

$$(3) \quad z = \sqrt{x - \sqrt{y}}.$$

$$\text{解} \quad y \geq 0 \text{ 和 } x - \sqrt{y} \geq 0,$$

$$\text{即} \quad x \geq \sqrt{y}, \quad x^2 \geq y,$$

$$\text{得} \quad D = \{(x,y) \mid x \geq 0, y \geq 0, x^2 \geq y\}, \text{ 如}$$

图8-7.

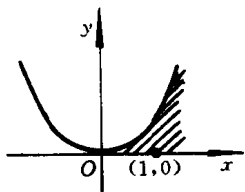


图8-7

$$(6) \quad u = \arccos \frac{z}{\sqrt{x^2 + y^2}}.$$

解 $x^2 + y^2 \neq 0$, 即 x, y 不同时为零; 且 $\left| \frac{z}{\sqrt{x^2 + y^2}} \right| \leq 1$, 即 $z^2 \leq x^2 + y^2$, 所以有

$$D = \{(x,y,z) \mid z^2 \leq x^2 + y^2, x^2 + y^2 \neq 0\}.$$

8.1.5 求下列各极限:

分析 求多元函数的极限可利用函数的连续性和一元函数求极限的一些方法.

$$(1) \quad \lim_{\substack{x \rightarrow 0 \\ y \rightarrow 1}} \frac{1-xy}{x^2+y^2}.$$

解 用函数的连续性得

$$\lim_{\substack{x \rightarrow 0 \\ y \rightarrow 1}} \frac{1-xy}{x^2+y^2} = \frac{1-0}{0+1} = 1.$$

$$(3) \quad \lim_{\substack{x \rightarrow 0 \\ y \rightarrow 0}} \frac{2 - \sqrt{xy+4}}{xy}.$$

解 用一元函数求极限的方法.

$$\begin{aligned} \lim_{\substack{x \rightarrow 0 \\ y \rightarrow 0}} \frac{2 - \sqrt{xy+4}}{xy} &= \lim_{\substack{x \rightarrow 0 \\ y \rightarrow 0}} \frac{4 - (xy+4)}{xy(2 + \sqrt{xy+4})} \\ &= \lim_{\substack{x \rightarrow 0 \\ y \rightarrow 0}} \frac{-1}{2 + \sqrt{xy+4}} = -\frac{1}{4}. \end{aligned}$$

$$(5) \lim_{\substack{x \rightarrow 2 \\ y \rightarrow 0}} \frac{\sin xy}{y}.$$

解 用一元函数的重要极限.

$$\lim_{\substack{x \rightarrow 2 \\ y \rightarrow 0}} \frac{\sin xy}{y} = \lim_{\substack{x \rightarrow 2 \\ y \rightarrow 0}} \frac{\sin xy}{xy} \cdot \lim_{x \rightarrow 2} x = 1 \cdot 2 = 2.$$

$$(6) \lim_{\substack{x \rightarrow 0 \\ y \rightarrow 0}} \frac{1 - \cos(x^2 + y^2)}{(x^2 + y^2)x^2 y^2}.$$

$$\begin{aligned} \text{解 } \lim_{\substack{x \rightarrow 0 \\ y \rightarrow 0}} \frac{1 - \cos(x^2 + y^2)}{(x^2 + y^2)x^2 y^2} &= \lim_{\substack{x \rightarrow 0 \\ y \rightarrow 0}} \frac{2 \sin^2 \frac{x^2 + y^2}{2}}{\left(\frac{x^2 + y^2}{2}\right)^2} \cdot \frac{x^2 + y^2}{4x^2 y^2} \\ &= \frac{1}{2} \lim_{\substack{x \rightarrow 0 \\ y \rightarrow 0}} \left(\frac{1}{x^2} + \frac{1}{y^2} \right) = +\infty. \end{aligned}$$

8.1.6 证明下列极限不存在:

分析 因为二重极限 $\lim_{\substack{x \rightarrow x_0 \\ y \rightarrow y_0}} f(x, y) = A$ 存在, 是指 $P(x, y)$ 以

任何方式趋于 $P_0(x_0, y_0)$ 时, 函数都无限接近于某常数 A . 所以证明极限不存在, 只要 P 以某一特殊方式趋于 P_0 时, 函数不趋于某一确定值, 或以两个不同方式趋于 P_0 时, 函数趋于不同的值, 便可断定函数的极限不存在.

$$(1) \lim_{\substack{x \rightarrow 0 \\ y \rightarrow 0}} \frac{x+y}{x-y}.$$

证 如果动点 $P(x, y)$ 沿 $y=2x$ 趋于 $(0, 0)$, 则

$$\lim_{\substack{x \rightarrow 0 \\ y=2x \rightarrow 0}} \frac{x+y}{x-y} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{x+2x}{x-2x} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{3x}{-x} = -3;$$

如果动点 $P(x, y)$ 沿 $x=2y$ 趋于 $(0, 0)$, 则

$$\lim_{\substack{y \rightarrow 0 \\ x=2y \rightarrow 0}} \frac{x+y}{x-y} = \lim_{y \rightarrow 0} \frac{3y}{y} = 3.$$

所以 $\lim_{\substack{x \rightarrow 0 \\ y \rightarrow 0}} \frac{x+y}{x-y}$ 不存在.