复变函数专题选讲

(一)

余家荣　路见可　主编

余家荣　柏盛桄　肖修治
何育赞　路见可　编

复变函数专题选讲

(一)

余家荣　路见可　主编

余家荣　柏盛桄　肖修治
何育赞　路见可　编

高等教育出版社

(京)112号

内容简介

《复变函数专题选讲(一)》的内容是复变函数这一门专业基础课内容的进一步发展.《复变函数专题选讲(二)》包含复变函数论中一些比较专门的部分.

《复变函数专题选讲(一)》的内容分为9章，即Cauchy定理、最大模原理、整函数与亚纯函数、共形映射、解析开拓及Riemann曲面初步、调和函数与Dirichlet问题、Γ函数和B函数、椭圆函数及Cauchy型积分.

教师可以从《选讲(一)》中选用若干章和《选讲(二)》中选用若干部分作为数学类专业高年级大学生选修课教材或研究生的教材. 这两本书也可供广大数学工作者和有关科研人员参考.

责任编辑　丁鹤龄

复变函数专题选讲

余家荣　路见可　主编

余家荣　柏盛桄　肖修治　何育赞　路见可　编

*

高等教育出版社出版

新华书店总店科技发行所发行

河北省香河县印刷厂印装

*

开本 850×1168 1/32　印张 7　字数160 000

1993年4月第1版　1993年4月第1次印刷

印数 0001—1 523

ISBN7-04-003990-7/O·1167

定价 3.30 元

前 言

单复变函数论(简称复变函数论或复分析)的理论基础是在19世纪奠定的. 这门学科在上世纪及本世纪得到了蓬勃的发展. 自从本世纪30年代以来,特别是50—60年代以来,我国数学工作者也对这门学科作出了重要的贡献.

由于这门学科在理论及应用上具有重要意义,单复变函数已成为高等学校数学类专业以及一些理、工科专业必修的专业基础课. 然而在这门课程中,只包含复变函数论的最基本内容,对于进一步作理论探讨和实际应用都还不够. 为了满足这些需要,在一些同志建议下,国家教委高等学校理科数学、力学教材编审委员会决定组织编写《复变函数专题选讲》教材,邀请中国科学院数学研究所、北京大学、复旦大学、华东师大、江西师大、西北大学、福建师大、武汉大学及高等教育出版社有关同志共同制定该教材的编写提纲,决定教材分(一)、(二)两卷出版,并且委托我们担任主编.

《选讲(一)》共分九章,包含Cauchy定理的推广,最大模原理,整函数与亚纯函数,共形映射,解析开拓及Riemann曲面初步,调和函数,Γ函数与B函数,椭圆函数,Cauchy型积分. 上列最后三项与复变函数的应用有密切联系,其他各项都是专业基础课内容的进一步发展. 它们在复变函数论的理论研究和应用中都有重要意义.《选讲(一)》第一、二、六章是余家荣编写的,第三、四、五章分别是柏盛桄、肖修治、何育赞编写的,第七、八、九章是路见可编写的.

《选讲(二)》分为十一部分,包含复变函数论中一些比较专门

的部分，特别是我国数学工作者在其中作过一些贡献的部分，即亚纯函数的值分布，单叶函数，解析函数逼近，H^p 空间，自守函数，Riemann 曲面，拟共形映射，Dirichlet 级数，积分变换，解析函数的边值问题，连续介质力学中的复变方法．这些部分分别由庄圻泰、胡克、沈燮昌、任福尧、刘书琴、何育赞、何成奇、余家荣、戴崇基和魏国强、林玉波及路见可编写．

本书可作为高年级大学生选修课及研究生必修或选修课的教材，也可供广大数学工作者和科研人员参考．教师在选用本书作为教材时，可选用其中若干章或部分．《选讲(一)》各章之间及《选讲(二)》各部分之间大体上是彼此独立的；但《选讲(一)》中第三、四、五章分别是《选讲(二)》中第一、七、六部分的预修材料，而第九章是《选讲(二)》的第十、十一部分的预修材料．《选讲(二)》各部分之间的内容有一些重复；为了能独立选用各专题，这些重复我们认为是必要的．

任福尧教授和闻国椿教授仔细审阅了《选讲(一)》的书稿，提出了不少宝贵的意见，谨此表示衷心谢忱．

本书内容较多，涉及面广，其中可能有不少不妥当甚至错误的地方，请读者随时予以批评指正．

余家荣、路见可

1986 年 12 月

目　录

第一章　Cauchy定理

Cauchy 定理是复变函数论的重要基础之一，由它可导出解析函数的一系列重要性质①. 在复变函数基础课中，已经讲过这一定理，我们在本章中，讲述 Cauchy 定理的几种一般形式.

§1　同伦形式的 Cauchy 定理

1.1　解析函数沿连续曲线的积分　用 $\mathbb{R}$ 及 $\mathbb{C}$ 分别表示实数域及复数域. 从 $\mathbb{R}$ 中紧区间 $[a, b]$ 到 $\mathbb{C}$ 中的任何连续函数或映射 $z=\gamma(t)$，称为连续曲线或 C^0 类曲线，记作 $\gamma: t\longmapsto\gamma(t)$ 或 $\gamma:[a,b]\longrightarrow\mathbb{C}$. 曲线 $t\longmapsto\gamma(a+b-t)$ $(t\in[a,b])$ 叫做与曲线 γ 反向的曲线. 如果 γ 是常数，那么就说 γ 化为一点. 如果 $\gamma(t)$ 在 $[a,b]$ 上有连续的导数，而在 a 及 b 的导数分别理解为右导数及左导数，那么 γ 称为 C^1 类曲线. 如果有 $[a,b]$ 的一个分划

$$a=a_0<a_1<a_2<\cdots<a_n=b,$$

使得 γ 在紧区间 $[a_k, a_{k+1}]$ 上有连续的导数，而在 a_k 及 a_{k+1} 的导数象在 a 及 b 的导数那样去理解，那么 γ 称为分段 C^1 类曲线 $(k=0,1,2,\cdots,n-1)$.

设 Ω 是 $\mathbb{C}$ 中的开集，γ 是 Ω 内的分段 C^1 类曲线，$f:\Omega\longrightarrow\mathbb{C}$

---

① 例如由它可证明：解析函数有连续导数以及任意阶导数. 直到本世纪中期，这两结果才分别由 R. L. Plunkett (Bull. Amer. Math. Soc. 65, 1959) 及 E. H. Connell and P. Porcelli (Bull. Amer. Math. Soc. 67, 1961) 不用 Cauchy 定理，而用拓扑方法作出证明.

是连续函数. 那么

$$\int_\gamma f(z)dz=\int_a^b f(\gamma(t))\gamma'(t)dt, \tag{1.1}$$

其中 $f(\gamma(t))\gamma'(t)$在$[a,b]$上分段连续①; 设 $\psi(t)$是这一函数在$[a,b]$上的原函数,那么就有

$$\int_\gamma f(z)dz=\psi(b)-\psi(a). \tag{1.2}$$

如果 f 在Ω内有原函数 F,则可取$\psi(t)=F(\gamma(t))$. 这时如果 γ 是 C^0 类曲线,可把(1.2)取作定义. 下面讨论一般的情况.

定义 1.1 假设 f 是开集 $\Omega(\subset\mathbb{C})$ 内的解析函数,记作 $f\in H(\Omega)$; 设 γ 是 Ω 内 C^0 类曲线. 设有满足下列条件的一个连续映射$\psi:[a, b]\longrightarrow\mathbb{C}$: 对任何 $t_0\in[a,b]$, 存在着 f 在 $\gamma(t_0)$的邻域内的一个原函数 F_{t_0}, 使得在 t_0 的邻域内,

$$\psi(t)=F_{t_0}(\gamma(t)),$$

那么 ψ 称为f 沿曲线γ 的一个原函数.

定义 1.2 设 $f\in H(\Omega)$, γ 是Ω中一条 C^0 类曲线, ψ 是 f 沿 γ 的一个原函数, 那么取(1.2)作为积分$\int_\gamma f(z)dz$的定义.

为了说明定义 1.1 及定义 1.2 是合理的,在定义中的假设下,要证明: ψ 存在; 公式(1.2)的右端是一个确定的数; 而且当 γ 是分段 C^1 类曲线时,定义 1.2 与前面的结果相符. 下面定理将解决这些问题.

定理 1.1 设 $f\in H(\Omega)$, γ 是Ω内一条 C^0 类曲线, 其中Ω是 $\mathbb{C}$ 中的开集, 那么

1° f 一定有沿 γ 的原函数;

---

① 为了使积分$\int_\gamma f(z)dz$ 存在,只须设γ是可求长曲线, $f:\gamma\longrightarrow\mathbb{C}$是连续函数,参看本章§3. 这里及以下对 γ及 f 所作的假设,是为了使在§1及§2讨论时比较简便

2° 任何两个这样的原函数的差是一个常数;

3° 对于分段 C^1 类曲线 γ, 公式(1.1)必然成立.

证 设 C^0 类曲线 $\gamma:[a, b]\to\Omega$ 与Ω的余集的距离是 $\varepsilon>0$. 由于 $\gamma(t)$在$[a,b]$上一致连续, $\exists$①$\eta>0$, 使得 $\forall t$ 及 $t'\in[a,b]$, 而且$|t-t'|<\eta$, 我们有$|\gamma(t)-\gamma(t')|<\varepsilon$. 作$[a,b]$ 的一个分划 $a=a_0<a_1<\cdots<a_n=b$, 使 $a_{k+1}-a_k<\eta\ (k=0,1,2,\cdots,n-1)$. 令

$$D_k=\{z\big||z-\gamma(a_k)|<\varepsilon\},$$

则

$$D_k\subset\Omega,\quad \gamma([a_k,a_{k+1}])\subset D_k.$$

取 f 在 D_k 内的原函数 F_k, 使得在 $D_k\cap D_{k+1}$ 内, $F_k=F_{k+1}$. 定义函数 $\psi:[a,b]\to\mathbb{C}$ 如下: 在$[a_k,a_{k+1}]$上,

$$\psi(t)=F_k(\gamma(t)),$$

那么 ψ 是 f 沿 γ 的一个原函数. 1° 得证.

由解析函数的性质, 任意两个上述原函数的差是一常数, 即2°成立.

如果 γ 是分段 C^1 类曲线, 那么在 γ 的每一 C^1 类曲线段上 $\psi'(t)=f(\gamma(t))\gamma'(t)$. 于是(1.2)成立. 证完.

为了简单起见, 在本章中, 此后我们把 C^0 类曲线简称为曲线, 并设所有曲线的参数在$[0,1]$上变化, 即取本段中的 $a=0$, $b=1$.

1.2 同伦 我们往往要考虑相互可以连续变形而得的曲线. 先给出一个明确的定义.

定义 1.3 已给有相同端点的两条曲线:

$$\gamma_0:[0,1]\to\Omega \text{ 及 } \gamma_1:[0,1]\to\Omega.$$

其中Ω是 $\mathbb{C}$ 中的开集, $\gamma_0(0)=\gamma_1(0)$, $\gamma_0(1)=\gamma_1(1)$. 如果存在着从$[0,1]\times[0,1]$到Ω内的连续映射$(t,u)\longmapsto\delta(t,u)$, 使得

① 符号$\exists$表示"存在着; 符号$\forall$表示"对任何".

$$\begin{aligned}&\delta(t,0)=\gamma_0(t), \qquad \delta(t,1)=\gamma_1(t),\\&\delta(0,u)=\gamma_0(0)=\gamma_1(0),\ \delta(1,u)=\gamma_0(1)=\gamma_1(1),\end{aligned}\tag{1.3}$$

那么我们说 γ_0 及 γ_1 是(Ω 内的)有相同端点的同伦曲线.

设 γ_0 及 γ_1 是Ω内的封闭曲线. 如果存在着从$[0,1]\times[0,1]$到Ω内的连续映射$(t,u)\longmapsto\delta(t,u)$,使得

$$\begin{aligned}&\delta(t,0)=\gamma_0(t), \quad \delta(t,1)=\gamma_1(t),\\&\forall u\in[0,1], \quad \delta(0,u)=\delta(1,u),\end{aligned}\tag{1.4}$$

那么我们说 γ_0 及 γ_1 是(Ω 内的)同伦封闭曲线. 特别, 如果函数 $\gamma_1(t)=\alpha$(常数),我们说封闭曲线 γ_0 在Ω内与一点 α 同伦.

在上列定义中,固定 u, $t\longmapsto\delta(t,u)$是Ω内或者与 γ_0 及 γ_1 有相同端点的一条曲线 γ_u,或者是一条封闭曲线 γ_u. 直观看来, 当 u 从 0 连续变到 1 时,这条曲线从 γ_0 连续变形到 γ_1; 或者其端点不变,或者始终是一条封闭曲线.

例 1.1 设 γ_0 及 γ_1 是开集Ω内有相同端点的两条曲线. 设

$$(t,u)\longmapsto\delta(t,u)=(1-u)\gamma_0(t)+u\gamma_1(t)$$

是$[0,1]\times[0,1]$到Ω内的连续映射, 那么 γ_0 及 γ_1 是在Ω内有相同端点的同伦曲线.

设 $\Omega\supset\{z\,\big|\,|z|\leqslant R\}$ $(0<R<+\infty)$, 那么 $\gamma_0: t\longmapsto Re^{2\pi it}$ 及 $\gamma_1: t\longmapsto R'e^{2\pi it}(0<R'<R, t\in[0,1])$ 是Ω内的封闭曲线. 取$[0,1]\times[0,1]$到Ω内的连续映射

$$(t,u)\longmapsto\delta(t,u)=(uR'+(1-u)R)e^{2\pi it},$$

可见 γ_0 及 γ_1 是Ω内的同伦封闭曲线. 如果在 γ_1 中取 $R'=0$, 即 γ_1 化为原点,那么 γ_0 是与原点同伦的封闭曲线.

有了同伦概念, 可作出单连通区域的一个明确定义.

定义 1.4 如果区域 $D(\subset\mathbb{C})$ 内任何封闭曲线与D内一点同伦, 那么区域D称为单连通区域.

1.3 同伦形式的 Cauchy 定理 为了阐明同伦形式的 Cauchy 定理，先引进一个定义和一个引理；它们可看作定义 1.1 和定理 1.1 的推广.

定义 1.5 设 $f\in H(\Omega)$，其中开集 $\Omega\subset\mathbf{C}$. 设 $(t,u)\longmapsto\delta(t,u)$ 是从 $[0,\ 1]\times[0,\ 1]$ 到 Ω 的连续映射. f 关于映射 δ 的原函数 $\psi(t,u)$ 是在 $[0,1]\times[0,1]$ 上满足下列条件的连续函数:

$\forall(t_0,u_0)\in[0,1]\times[0,1]$，存在 f 在 $\delta(t_0,u_0)$ 的邻域内的一个原函数 F_{t_0,u_0}，使得在与 (t_0,u_0) 充分接近的任何点 (t,u)，我们有

$$\psi(t,u)=F_{t_0,u_0}(\delta(t,u)).$$

应用与定理 1.1 的证法相类似的方法，可以证明下列引理:

引理 1.1 **定义 1.5 中的原函数必然存在，并且任何两个这样的原函数相差是一个常数.**

证 由于 $[0,1]\times[0,1]$ 是紧的，可用点 t_k 及点 u_j 分别对 t 及 u 的变化的闭区间作分划，把 $[0,1]\times[0,1]$ 分成小矩形 $[t_k,t_{k+1}]\times[u_j,u_{j+1}]$，使得它被 δ 映射到 Ω 中的一个开圆盘 $D_{k,j}$ 内；在这开圆盘内，f 有一个原函数 $F_{k,j}$.

固定 j. 由于 $D_{k,j}\cap D_{k+1,j}$ 是连通的非空开集，对每个 $F_{k,j}$（j 固定，k 变化）可以加上一个常数，使得 $F_{k,j}$ 及 $F_{k+1,j}$ 在 $D_{k,j}\cap D_{k+1,j}$ 内恒等. 对于所有的 k 进行这一运算，于是对于 $u\in[u_j,u_{j+1}]$，$t\in[0,1]$，得到一个函数 $\psi_j(t,u)$，使得对于任何 k，当 $t\in[t_k,t_{k+1}]$ 时，

$$\psi_j(t,u)=F_{k,j}(\delta(t,u)).$$

这样，$\psi_j(t,u)$ 在矩形 $[0,1]\times[u_j,u_{j+1}]$ 上连续，它是 f 关于映射 δ_j 的原函数，这里 δ_j 是 δ 在上列矩形上的限制①. 让 j 变化，每个函数 ψ_j 除去差一个常数外是确定的. 对 j 递推，可加上适当

① 即 δ_j 在上列矩形上有定义，而且在这一矩形上，$\delta_j(t,u)=\delta(t,u)$.

的常数，使得当 $u=u_{j+1}$ 时，$\psi_j(t,u)=\psi_{j+1}(t,u)$. 设 $\psi(t,u)$ 是在 $[0,1]\times[0,1]$ 上如下确定的函数：对于任何上述 j，当 $u\in[u_j,u_{j+1}]$ 时，

$$\psi(t,u)=\psi_j(t,u)\quad(0\leqslant t\leqslant 1).$$

根据定义 1.5，$\psi(t,u)$ 是 f 关于映射 δ 的原函数. 由解析函数的唯一性，任何两个这样的原函数相差一个常数.

同伦形式的 Cauchy 定理可叙述如下：

定理 1.2 设 $f\in H(D)$，**其中** D **是** $\mathbb{C}$ **中一个区域，设** D **内的曲线** γ_0 **及** γ_1 **或者是有相同端点的同伦曲线，或者是同伦封闭曲线，那么**

$$\int_{\gamma_0} f(z)dz=\int_{\gamma_1} f(z)dz. \tag{1.5}$$

特别，如果封闭曲线 γ_0 与 D 内一点同伦，那么

$$\int_{\gamma_0} f(z)dz=0. \tag{1.6}$$

由上列定理及定义 1.4 可立即推出：

系 1.1 如果 $f\in H(D)$，**其中** D **是一单连通区域，那么对** D **内任何封闭曲线** γ，

$$\int_{\gamma} f(z)dz=0.$$

定理 1.2 的证 当 γ_0 及 γ_1 有相同端点的情形，设 δ 是满足条件(1.3)的连续映射. 设 ψ 是 f 关于 δ 的一个原函数，显然，在 $t=0$ 及 $t=1$ 时，ψ 是常数，从而

$$\psi(0,0)=\psi(0,1),\ \ \psi(1,0)=\psi(1,1).$$

又因

$$\int_{\gamma_0} f(z)dz=\psi(1,0)-\psi(0,0),\ \int_{\gamma_1} f(z)dz=\psi(1,1)-\psi(0,1),$$

在这种情形下，(1.5)得证.

当 γ_0 及 γ_1 是封闭曲线情形，设 δ 是满足(1.4)的连续映射，

ψ 是 f 关于 δ 的原函数. 于是 $u\longmapsto\delta(0,u)$ 及 $u\longmapsto\delta(1,u)$ 表示同一连续曲线，$\psi(0,u)$ 及 $\psi(1,u)$ 是 f 沿这一曲线的原函数；从而 $\forall u\in[0,1]$,

$$\psi(1,u)-\psi(0,u)=\text{常数}.$$

因此在这种情形下也得到(1.5).

公式(1.6)可由公式(1.5)推出.

1.4 封闭曲线的指标 现在引进封闭曲线关于一点的指标的概念. 在直观上，它是作曲线时围绕该点旋转的圈数. 这里给出一个严格的定义:

定义 1.6 设 $\gamma:[0,1]\to\mathbb{C}$ 是一封闭曲线. 设 $z\in\mathbb{C}\backslash\gamma$. 积分

$$\frac{1}{2\pi i}\int_\gamma\frac{d\zeta}{\zeta-z}$$

称为γ关于 z 的指标，记作 $I_\gamma(z)$；当 γ 化为一点时，取 $I_\gamma(z)=0$.

指标具有以下性质:

定理 1.3 在定义 1.6 中，$I_\gamma(z)$ 取整数值. 当 z 在 $\mathbb{C}\backslash\gamma$ 中变动时，$I_\gamma(z)$在 $\mathbb{C}\backslash\gamma$ 的每个连通支集内取整常数值，而在无界连通支集内为零.

证 设 $\psi(t)$是$\dfrac{1}{\zeta-z}$沿 γ 的一个原函数. 于是

$$\int_\gamma\frac{dz}{\zeta-z}=\psi(1)-\psi(0).$$

由于 $\psi(0)$及 $\psi(1)$是$\dfrac{1}{\zeta-z}$在同一点 $\gamma(0)=\gamma(1)$ 的邻域内两原函数，即 $\mathrm{Ln}(\zeta-z)$ 的两个解析分枝在 $\zeta=\gamma(0)=\gamma(1)$ 的值，可见 $\psi(1)-\psi(0)$是 $2\pi i$ 的整数倍，从而 $I_\gamma(z)$取整数值.

对于 z 及 $z+\Delta z\in\mathbb{C}\backslash\gamma$, 我们有

$$I_\gamma(z+\Delta z)-I_\gamma(z)=\frac{1}{2\pi i}\int_\gamma\frac{\Delta z}{(\zeta-z)(\zeta-z-\Delta z)}dz.$$

于是当 $\Delta z\to 0$ 时，$I_\gamma(z+\Delta z)-I_\gamma(z)\to 0$，即 $I_\gamma(z)$ 在 $\mathbb{C}\setminus\gamma$ 中任一点连续，从而它在 $\mathbb{C}\setminus\gamma$ 的任一连通支集内取整常数值。

在 $\mathbb{C}\setminus\gamma$ 的无界连通支集内，由 Cauchy 定理，$I_\gamma(z)=0$。

现在研究同伦封闭曲线对一点的指标。为此，先证明一个引理：

引理 1.2 **设封闭曲线 γ_0 及 γ_1 是 $[0,1]$ 到 $\mathbb{C}$ 的映射。如果 $\alpha\in\mathbb{C}$，并且 $\forall t\in[0,1]$，有**

$$|\gamma_1(t)-\gamma_0(t)|<|\alpha-\gamma_0(t)|, \tag{1.7}$$

那么 $I_{\gamma_0}(\alpha)=I_{\gamma_1}(\alpha)$.

证 由(1.7)，$\alpha\bar{\in}\gamma_0\cup\gamma_1$. 令

$$\gamma=(\gamma_1-\alpha)/(\gamma_0-\alpha),$$

那么由 (1.7)，$|\gamma-1|<1$. 于是封闭曲线 γ 在不含 0 的圆盘内，从而

$$\int_\gamma\frac{d\xi}{\xi}=0, \text{即 } I_\gamma(0)=0.$$

又因

$$\frac{\gamma'}{\gamma}=\frac{\gamma_1'}{\gamma_1-\alpha}-\frac{\gamma_0'}{\gamma_0-\alpha},$$

所以 $I_\gamma(0)=I_{\gamma_1}(\alpha)-I_{\gamma_0}(\alpha)=0$. 引理得证.

定理 1.4 **设 γ_0 及 γ_1：$[0,1]\to\mathbb{C}$ 是开集 Ω 内的同伦封闭曲线. 如果 $\alpha\bar{\in}\Omega$，那么 $I_{\gamma_0}(\alpha)=I_{\gamma_1}(\alpha)$.**

证 设 $\delta(t,u)$ 是定义 1.3 的第二部分中引进的函数. 于是 $\exists\varepsilon>0$，使得当 $(t,u)\in[0,1]\times[0,1]$ 时，

$$|\alpha-\delta(t,u)|>\varepsilon. \tag{1.8}$$

对于这一 $\varepsilon>0$，可对 $0\leqslant t\leqslant 1$ 及 $0\leqslant u\leqslant 1$ 作分划：$0=t_0<t_1<t_2<\cdots<t_n=1$ 及 $0=u_0<u_1<u_2<\cdots<u_m=1$，使得 $\forall j\in\{0,1,2,\cdots,m-1\}$，$\forall t\in[0,1]$，

$$|\delta(t,u_j)-\delta(t,u_{j+1})|<\varepsilon;$$

又由(1.8)，

$$|\delta(t,u_j)-\delta(t,u_{j+1})|<|\alpha-\delta(t,u_j)| \qquad (1.9)$$

令 $\delta_j(t)=\delta(t, u_j)(j=0, 1,\cdots, m)$，于是 $\gamma_0(t)=\delta_0(t)$，$\gamma_1(t)=\delta_m(t)$. 由(1.9)及引理1.2，$I_{\delta_j}(\alpha)=I_{\delta_{j+1}}(\alpha)$，从而 $I_{\gamma_0}(\alpha)=I_{\gamma_1}(\alpha)$.

定理1.4给出了同伦封闭曲线的一个必要条件，但它不是一个充分条件. 例如设两点 a 及 $b\in\mathbb{C}$ 在开集 $\mathbb{C}\setminus\{a, b\}$ 中作曲线 γ_0(走向为 $cdecfgchjcklc$)及 γ_1 如图1.1. 由直观看出，$I_{\gamma_0}(a)=I_{\gamma_0}(b)=0$，$I_{\gamma_1}(a)=I_{\gamma_1}(b)=0$. 但曲线 γ_0 及 γ_1 在 $\mathbb{C}\setminus\{a,b\}$ 内不同伦.

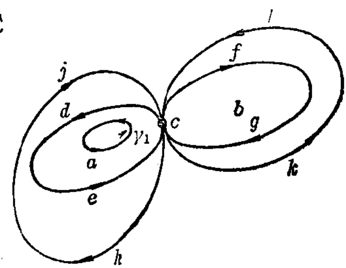

图 1.1

在下节中，我们将对 Cauchy 定理所适用的曲线的范围作进一步的推广.

§2 同调形式的 Cauchy 定理

2.1 链与闭链 现在要把定理1.2中所涉及的曲线加以推广.

设 Ω 为开集，曲线 $\gamma\subset\Omega\subset\mathbb{C}$. 设 $f\in H(\Omega)$，把 γ 分划成彼此相衔接的曲线 $\gamma_1,\gamma_2,\cdots,\gamma_n$，那么就有

$$\int_\gamma f(z)dz=\int_{\gamma_1} f(z)dz+\int_{\gamma_2} f(z)dz+\cdots+\int_{\gamma_n} f(z)dz.$$

我们把 γ 的上述分划写成"形式和"：

$$\gamma=\gamma_1+\gamma_2+\cdots+\gamma_n.$$

当 $\gamma_1,\gamma_2,\cdots,\gamma_n$ 是 Ω 中的曲线，而不一定构成某一曲线的分划时，