SUIJI GUOCHENG XITIJI

随机过程习题集

周荫清　李春升　编

北京航空學院出版社

随机过程习题集

周荫清　李春升　编

北京航空學院出版社

内 容 提 要

本书是一本关于随机过程理论的例题和习题汇编，它概括了随机过程及其应用中的基本内容。

全书共分七章，内容包括随机过程的基本概念，线性变换，窄带随机过程，高斯随机过程，泊松过程，马尔可夫过程和估计理论。

每章分为三部分：内容提要、例题和练习题。内容提要部分对每章的基本内容以及读者应该掌握的主要内容作了较深入的概括。针对各章中的重要课题编选了约170道例题和170道练习题。所有练习题书末均附有答案。

本书文字通俗，概念清晰，可供学习随机过程理论的工科大学师生使用，亦可供有关科技人员学习随机过程理论时参考。

随机过程习题集

周荫清　李春升　编

责任编辑　杨昌竹

•

北京航空学院出版社出版

新华书店北京发行所发行　各地新华书店经售

关西庄印刷厂印装

•

850×1168　1/32　　印张：10.25　字数：276千字

1987年12月第一版　1987年12月第一次印刷　印数：4000册

ISBN 7-81012-034-4/TN·002　　　定价：2.00元

前　言

随机过程理论是现代概率论中一个重要课题，已广泛应用于通信、自动控制、生物物理、系统工程、空间技术等许多工程科学技术中，并且在这些领域中显示出十分重要的作用。目前随机过程理论已经成为工科院校的一门重要基础理论课程。

在学习随机过程理论时，为了透彻理解随机过程的基本理论，掌握随机过程的分析方法，做习题是不可缺少的。为此，我们在编写《随机过程导论》一书的同时编写了本书，它是《随机过程导论》一书的的扩展。

全书共分七章，主要涉及随机过程的基本理论及其应用。第1至2章介绍随机过程的基本概念及其通过线性系统的分析方法；第3至6章分别介绍了窄带过程、高斯过程、泊松过程和马尔可夫过程；第7章为估计理论，它是随机过程应用的一个方面，也是目前随机过程应用比较广泛的一个领域。

本书每章由内容提要、例题、练习题三部分组成。内容提要部分对每章的基本内容以及读者应该掌握的重点作了较深入的概括。针对各章中的重要课题选编了适量的例题，用例题的形式体现各章的基本内容与具体要求，并从概念、推演、证明及应用四个方面对随机过程中的典型问题进行剖析，帮助读者深入理解基本概念，打开思路，提高分析问题和解决问题的能力。需要指出的是，例题部分的解法不是唯一的，也许读者会有更好的解法。做习题是学习随机过程理论的重要环节，因此，在练习题部分列出了一定量的习题。练习题的编排由浅入深，凡是难度大一些的题目都标上星号“•”。书末附有全部练习题的答案。如果努力亲自求解本书中的习题，我们相信，对于学好随机过程的基本理论

是十分有效的，将会大大提高读者解决实际问题的能力。

本书收入的例题和习题是作者近几年来为北京航空学院电子工程系本科生和研究生开设《随机过程理论》课程期间，从国内外有关书籍中精心挑选，反复推敲和设计而逐渐积累起来的。多数题目选择意在注重培养学生分析问题和解决问题的综合能力，少数较难的例题和习题用以开拓和深化随机过程理论及其应用方面的内容，同时也开阔读者视野。

本书第1至6章的内容提要部分以及第7章由周荫清编写；第1至6章的例题和练习题由李春升编写。最后，由周荫清统编了全书。

在编写过程中曾得到北京航空学院电子工程系邵定蓉副教授、卢维杨副教授的关心与支持；同时还得到了毛士艺教授的许多帮助。本书例题部分中一些例题的解法参考了苗楠同志编写的《随机信号与检测理论》习题集。编者在此一并致谢。

由于编者水平有限，书中可能有不少构思上、计算上的错误和不妥之处，恳请读者批评、指正。

编　者

1987年7月5日

目　　录

第一章　随机过程的基本概念

一、内容提要

（一）随机过程的描述

1．定义

设$E=\{e\}$是一样本空间，若对每一时刻$t\in T$都有定义在E上的随机变量$X(e,t)$，则称一族随机变量$\{X(e,t),e\in E,t\in T\}$为随机过程。通常简化为$\{X(t),\ t\in T\}$。

2．统计描述

随机过程在时刻t的概率分布函数为

$$F_X(x,t)\triangleq P\{X(t)\leqslant x\}$$

相应的概率密度函数为

$$p_X(x,t)\triangleq\frac{\partial F_X(x,\ t)}{\partial x}$$

并且有

$$F_X(x,t)=\int_{-\infty}^{x}p_X(x,\ t)dx$$

相应的特征函数为

$$\phi_X(v,\ t)\triangleq E[\exp\{jX(t)v\}]$$

随机过程的联合概率分布函数为

$$F_n(x_1,\ \cdots,\ x_n;\ t_1,\ \cdots,\ t_n)\triangleq P\{X(t_1)\leqslant x_1,\cdots,X(t_n)\leqslant x_n\}$$

其联合概率密度函数为

$$p_n(x_1,x_2,\cdots,x_n;t_1,t_2,\cdots,t_n)$$

$$\triangleq \frac{\partial^n F_n(x_1, x_2, \cdots, x_n;\ t_1, t_2, \cdots, t_n)}{\partial x_1 \partial x_2 \cdots \partial x_n}$$

相应的特征函数为

$$\phi_n(v_1, t_1;\ v_2, t_2;\ \cdots,\ v_n,\ t_n)$$

$$\triangleq E\left[\exp\left\{j\sum_{k=1}^{n} X(t_k) v_k\right\}\right]$$

3. 一般分类

(1) 连续随机过程　状态连续、时间参数连续的随机过程称为连续随机过程；

(2) 离散随机过程　状态离散、时间参数连续的随机过程称为离散随机过程；

(3) 连续随机序列　状态连续、时间参数离散的随机过程称为连续随机序列；

(4) 离散随机序列　状态离散、时间参数离散的随机过程称为离散随机序列。

(二) 随机过程的数字特征

设随机过程$\{X(t),\ t\in T\}$在t_1、t_2时刻的取值为x_1、x_2，其数字特征分别定义为：

1. 均值（数学期望）

$$m_X(t) = E[X(t)] = \int_{-\infty}^{\infty} x p(x,\ t) dx$$

2. 均方值

$$\psi_X^2(t) = E[X^2(t)] = \int_{-\infty}^{\infty} x^2 p(x,\ t) dx$$

3. 方差

$$\sigma_X^2(t) = E\{[X(t) - m_X(t)]^2\}$$

$$= \int_{-\infty}^{\infty} [x - m_X(t)]^2 p(x,\ t) dx$$

4. 自相关函数

$$R_X(t_1, t_2) = E[X(t_1)X(t_2)]$$
$$= \int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty} x_1 x_2 p(x_1, x_2; t_1, t_2) dx_1 dx_2$$

5. 协方差

$$C_X(t_1, t_2) = E\{[X(t_1) - m_X(t_1)][X(t_2) - m_X(t_2)]\}$$
$$= R_X(t_1, t_2) - m_X(t_1)m_X(t_2)$$

当$t_1 = t_2 = t$时，有

$$C_X(t, t) = \sigma_X^2(t) = R_X(t, t) - m_X^2(t)$$

如果随机过程$\{X(t), t \in T\}$是平稳随机过程，则有：

1. $m_X(t) = m_X$
2. $\psi_X^2(t) = \psi_X^2$
3. $\sigma_X^2(t) = \sigma_X^2$
4. $R_X(t_1, t_2) = R_X(\tau) \qquad \tau = t_1 - t_2$
5. $C_X(t_1, t_2) = R_X(\tau) - m_X^2$

$$C_X(t, t) = \sigma_X^2$$

随机过程可以是复函数，定义复随机过程为

$$Z(t) = X(t) + jY(t)$$

复随机过程的数字特征分别定义为：

1. 均值

$$m_Z(t) = m_X(t) + jm_Y(t)$$

2. 自相关函数

$$R_Z(t_1, t_2) = E[Z(t_1)Z^*(t_2)]$$

3. 协方差

$$\mathrm{cov}[Z(t_1), Z(t_2)] = E[\mathring{Z}(t_1)\mathring{Z}^*(t_2)]$$

当$t_1 = t_2 = t$时，有

$$\mathrm{cov}[Z(t), Z(t)] = \mathrm{var}[Z(t)]$$

$$= \text{var}[X(t)] + \text{var}[Y(t)]$$

4. 互相关函数

若有两个复随机过程

$$Z_1(t) = X_1(t) + jY_1(t)$$

$$Z_2(t) = X_2(t) + jY_2(t)$$

则互相关函数定义为

$$R_{Z_1Z_2}(t_1, t_2) = E[Z_1(t_1)Z_2^*(t_2)]$$

（三）平稳随机过程

定义 设$\{X(t), t\in T\}$为一随机过程，若对任一正整数n和任意实数$t_1, t_2, \cdots, t_n, t_i\in T, i=1, 2, \cdots, n$，以及实数$\tau$为任意值，有分布函数

$$F_n(x_1, x_2, \cdots, x_n; t_1, t_2, \cdots, t_n)$$

$$= F_n(x_1, x_2, \cdots, x_n; t_1+\tau, t_2+\tau, \cdots, t_n+\tau)$$

或概率密度函数

$$p_n(x_1, x_2\cdots, x_n; t_1, t_2, \cdots, t_n)$$

$$= p_n(x_1, x_2, \cdots, x_n; t_1+\tau, t_2+\tau, \cdots, t_n+\tau)$$

则称这类过程为严格平稳随机过程。

平稳随机过程分为严格平稳随机过程和广义平稳随机过程。

定义 设$\{X(t), t\in T\}$是一平稳随机过程，$E[X^2(t)]<\infty$，且

$$E[X(t)] = m_X = \text{常数}$$

$$R(t_1, t_2) = R(\tau) \qquad \tau = t_1 - t_2$$

则称$\{X(t), t\in T\}$为广义平稳随机过程。

广义平稳随机过程是一个二阶矩过程。二阶矩过程定义如下：

定义 设$\{X(t), t\in T\}$为一随机过程，若对一切$t\in T$，有

$$E\{X^2(t)\}<\infty$$

则称$\{X(t), t\in T\}$为二阶矩过程.

1. 平稳随机过程相关函数的性质

设随机过程$X(t)$、$Y(t)$为单独及联合平稳，则

(1) $R_X(\tau)=R_X^*(-\tau)$

如果随机过程为实过程，那么自相关函数是偶函数，亦即

$$R_X(\tau)=R_X(-\tau)$$

(2) $|R_X(\tau)|\leqslant R_X(0)=\psi_X^2$

(3) $R_X(\infty)=\lim\limits_{|\tau|\to\infty} R_X(\tau)=m_X^2$

(4) $\sum\limits_{i,j=1}^{\infty}R_X(t_i-t_j)\lambda(t_i)\lambda(t_j)\geqslant 0$

(5) $R_{XY}(\tau)=R_{YX}^*(-\tau)$

(6) $|R_{XY}(\tau)|\leqslant[R_X(0)R_Y(0)]^{1/2}$

2. 遍历性

样本函数$x(t)$的时间平均定义为

$$\overline{x(t)}=\lim_{T\to\infty}\frac{1}{2T}\int_{-T}^{T}x(t)\,dt$$

若随机过程$\{X(t),\ t\in T\}$是遍历的，则样本集的各种统计平均以概率1等于相应的时间平均。

(1) 均值

$$m_X=\overline{x(t)}=\lim_{T\to\infty}\frac{1}{2T}\int_{-T}^{T}x(t)\,dt$$

(2) 自相关函数

$$R_X(\tau)=\overline{x(t)x^*(t-\tau)}=\lim_{T\to\infty}\frac{1}{2T}\int_{-T}^{T}x(t)x^*(t-\tau)\,dt$$

(3) 互相关函数

$$R_{XY}(\tau)=\lim_{T\to\infty}\frac{1}{2T}\int_{-T}^{T}x(t)y^*(t-\tau)\,dt$$

3. 平稳过程的功率谱密度

（1）广义平稳随机过程功率谱密度定义为

$$S_X(\omega)=\int_{-\infty}^{\infty} R_X(\tau)e^{-j\omega\tau}d\tau$$

式中 $$R_X(\tau)=\frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty} S_X(\omega)e^{j\omega\tau}d\omega$$

上述公式称为维纳-辛钦定理。

由于$R_X(\tau)=R_X(-\tau)$，故有

$$S_X(\omega)=2\int_0^{\infty} R_X(\tau)\cos\omega\tau d\tau$$

$$R_X(\tau)=\frac{1}{\pi}\int_0^{\infty} S_X(\omega)\cos\omega\tau d\tau$$

（2）功率谱密度性质　不论随机过程是实过程或复过程，均有

$$S_X^*(\omega)=S_X(\omega)$$

这表明功率谱密度必为实函数。

若$X(t)$是实函数，则有

$$S_X(\omega)=S_X(-\omega)$$

这表明功率谱密度必为偶函数。

（3）互谱密度　若两个随机过程$X(t)$、$Y(t)$是联合广义平稳的，则它们的互功率谱密度定义为

$$S_{XY}(\omega)=\int_{-\infty}^{\infty} R_{XY}(\tau)e^{-j\omega\tau}d\tau$$

式中 $$R_{XY}(\tau)=\frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty} S_{XY}(\omega)e^{j\omega\tau}d\omega$$

一般而言，有

$$S_{XY}^*(\omega)=S_{YX}(\omega)$$

若$X(t)$、$Y(t)$为实过程，则有

$$S_{YX}(\omega)=S_{XY}(-\omega)$$

（四）矢量随机过程

设$\{\mathbf{X}(t),\ t\in T\}$为$m$维矢量随机过程，定义为

$$\mathbf{X}(t)=[X_1(t),\ X_2(t),\ \cdots,\ X_m(t)]^T$$

1．统计描述

矢量随机过程$\mathbf{X}(t)$在时刻t的概率分布函数为

$$F_X(\mathbf{x},\ t)\triangleq P\{\mathbf{X}(t)\leqslant \mathbf{x}\}$$

相应的概率密度函数为

$$p_X(\mathbf{x},\ t)=\frac{\partial^m F_X(\mathbf{x},\ t)}{\partial \mathbf{x}}=\frac{\partial^m F_X(\mathbf{x},\ t)}{\partial x_1\partial x_2\cdots\partial x_m}$$

式中 $\mathbf{x}=[x_1,x_2,\cdots,x_m]^T$

矢量随机过程的联合概率分布函数为

$$F_{X^1,\ \cdots,\ X^n}(\mathbf{x}^1,\ t_1;\ \mathbf{x}^2,\ t_2;\ \cdots;\ \mathbf{x}^n,\ t_n)$$

$$\triangleq P\{\mathbf{X}(t_1)\leqslant \mathbf{x}^1,\ \mathbf{X}(t_2)\leqslant \mathbf{x}^2,\ \cdots,\ \mathbf{X}(t_n)\leqslant \mathbf{x}^n\}$$

式中 $\mathbf{X}^i=[X_1^i,\ X_2^i,\ \cdots,\ X_m^i]^T$

$$\mathbf{x}^i=[x_1^i,\ x_2^i,\ \cdots,\ x_m^i]^T$$

$$i=1,2,\cdots,n$$

相应的概率密度函数为

$$p_{X^1,\ \cdots,\ X^n}(\mathbf{x}^1,\ t_1;\ \mathbf{x}^2,t_2;\ \cdots;\ \mathbf{x}^n,\ t_n)$$

$$\triangleq\frac{\partial^{mn}F_{X^1,\cdots,X^n}(\mathbf{x}^1,\ t_1;\ \mathbf{x}^2,\ t_2;\ \cdots;\ \mathbf{x}^n,\ t_n)}{\partial\mathbf{x}^1\partial\mathbf{x}^2\cdots\partial\mathbf{x}^n}$$

$$=\frac{\partial^{mn}F_{X^1,\ \cdots,X^n}(\mathbf{x}^1,t_1;\mathbf{x}^2,t_2;\ \cdots;\ \mathbf{x}^n,t_n)}{\partial x_1^1\cdots\partial x_m^1\cdots\partial x_1^n\cdots\partial x_m^n}$$

2．特征函数

矢量随机过程在时刻t_i的特征函数为

$$\phi_X(\mathbf{v},t_i)\triangleq E[\exp\{j\mathbf{X}^T(t_i)\mathbf{v}\}]$$

式中 $\mathbf{X}(t_i)=[X_1(t_i),\ X_2(t_i),\ \cdots,\ X_m(t_i)]^T$

$$\mathbf{v}=[v_1, v_2, \cdots, v_m]^T$$

矢量随机过程联合特征函数为

$$\phi_{X^1, \cdots, X^n}(\mathbf{v}^1, t_1; \mathbf{v}^2, t_2; \cdots; \mathbf{v}^n, t_n)$$

$$\triangleq E[\exp\{j\sum_{k=1}^{n}\mathbf{X}^T(t_k)\mathbf{v}^k\}]$$

式中 $\mathbf{v}^k \quad k=1, 2, \cdots, n$

$$\mathbf{X}(t_k)=[X_1(t_k), X_2(t_k), \cdots, X_m(t_k)]^T$$

3. 数字特征

设矢量随机过程$\mathbf{Z}(t)$定义为

$$\mathbf{Z}(t)=\begin{pmatrix} X_1(t) \\ X_2(t) \\ \vdots \\ X_m(t) \end{pmatrix}$$

(1) 均值矢量

$$\mathbf{m}_Z(t)=E[\mathbf{Z}(t)]$$

$$=[E\{X_1(t)\}, E\{X_2(t)\}, \cdots, E\{X_m(t)\}]^T$$

(2) 协方差阵

$$\mathbf{P}_{ZZ}(t_1, t_2)=\mathrm{cov}[\mathbf{Z}(t_1), \mathbf{Z}(t_2)]$$

$$\triangleq E\{[\mathbf{Z}(t_1)-\mathbf{m}_Z(t_1)][\mathbf{Z}(t_2)-\mathbf{m}_Z(t_2)]^T\}$$

$$=E[\mathbf{Z}(t_1)\mathbf{Z}^T(t_2)]-\mathbf{m}_Z(t_1)\mathbf{m}_Z^T(t_2)$$

矩阵

(3) 自相关阵

$$\mathbf{R}_Z(t_1, t_2)=E[\mathbf{Z}(t_1)\mathbf{Z}^T(t_2)]$$

上式中，令$t_1=t_2=t$，则可得到均方阵为

$$\mathbf{P}_Z(t)=E[\mathbf{Z}(t)\mathbf{Z}^T(t)]$$

(4) 方差阵

$$\mathbf{P}_{ZZ}(t)=E[\mathbf{Z}(t)\mathbf{Z}^T(t)]-\mathbf{m}_Z(t)\mathbf{m}_Z^T(t)$$

(5) 互协方差阵

$$\mathbf{P}_{Z_1Z_2}(t_1, t_2)=\mathrm{cov}[\mathbf{Z}_1(t_1), \mathbf{Z}_2(t_2)]$$

$$\triangleq E\{[\mathbf{Z}_1(t_1)-\mathbf{m}_{Z_1}(t_1)][\mathbf{Z}_2(t_2)-\mathbf{m}_{Z_2}(t_2)]^T\}$$

(6) 互相关阵

$$\mathbf{R}_{Z_1Z_2}(t_1, t_2)\triangleq E[\mathbf{Z}_1(t_1)\mathbf{Z}_2^T(t_2)]$$

4. 平稳性

若一个矢量随机过程$\{\mathbf{Z}(t), t\in T\}$的均值矢量与方差阵和时间$t$无关，而自协方差阵仅与时间差$\tau=t_1-t_2$有关，即：

(1) $\mathbf{m}_Z(t)=\mathbf{m}_Z$

(2) $\mathbf{P}_{ZZ}(t)=\mathbf{P}_{ZZ}$

(3) $\mathbf{P}_{ZZ}(t_1, t_2)=\mathbf{P}_{ZZ}(t_1-t_2)=\mathbf{P}_{ZZ}(\tau)\quad \tau=t_1-t_2$

则称此矢量随机过程为广义平稳矢量过程。显然有

$$\mathbf{R}_{ZZ}(\tau)=E[\mathbf{Z}(t)\mathbf{Z}^T(t-\tau)]=\mathbf{P}_{ZZ}(\tau)+\mathbf{m}_Z\mathbf{m}_Z^T$$

5. 统计独立和不相关

(1) 独立矢量随机过程

定义 若一个矢量随机过程$\{\mathbf{X}(t), t\in T\}$，在$t\in T$的任意$n$个时刻点$t_1, t_2, \cdots, t_n$上，其联合概率分布函数为

$$F_{X^1, X^2, \cdots, X^n}(\mathbf{x}^1, t_1; \mathbf{x}^2, t_2; \cdots; \mathbf{x}^n, t_n)$$

$$=\prod_{k=1}^{n}F_{X^k}(\mathbf{x}^k, t_k)$$

则称此类矢量过程为独立矢量随机过程。

显然，对应的联合概率密度函数为

$$p_{X^1, \cdots, X^n}(\mathbf{x}^1, t_1; \cdots; \mathbf{x}^n, t_n)=\prod_{k=1}^{n}p_{X^k}(\mathbf{x}^k, t_k)$$

(2) 统计独立

定义 若两个矢量随机过程$\{\mathbf{X}(t), t\in T\}$和$\{\mathbf{Y}(t), t\in T\}$在$t\in T$内的任意$n$个时刻点，其联合概率分布函数为

$$F_{X^1, \cdots, X^n; Y^1, \cdots, Y^n}(\mathbf{x}^1, t_1; \cdots; \mathbf{x}^n, t_n; \mathbf{y}^1,$$