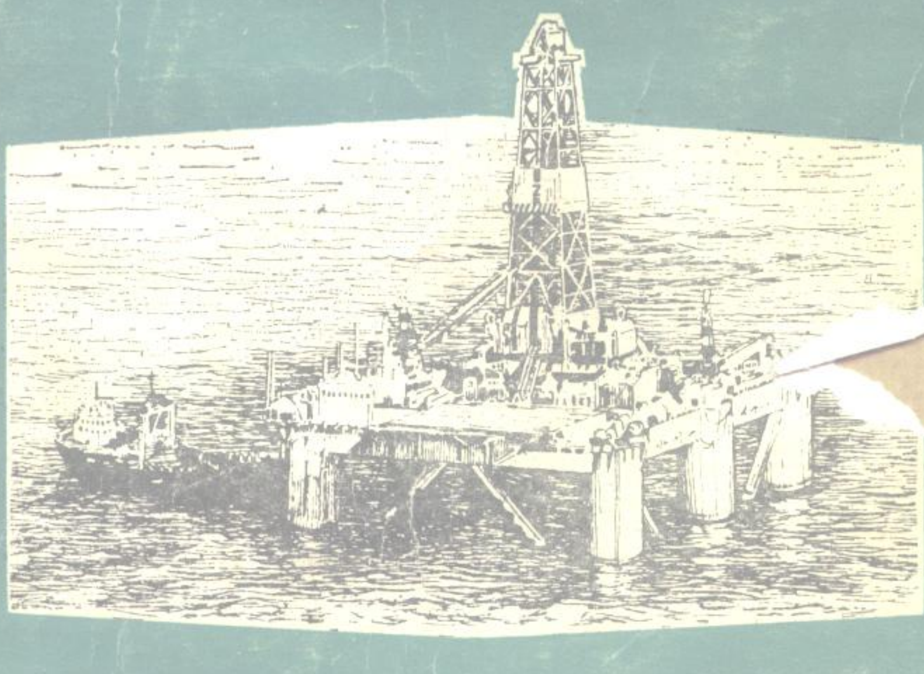
海洋石油钻采设备理论基础

方华灿 编



石油工业出版社

内 容 提 要

本书较系统地介绍了海浪的基本理论，钻井船及平台有关的运动学和动力学，海洋环境载荷的计算，钻机起升机件及钻采平台构件等强度和寿命计算问题。

为了使基础理论与专业内容衔接起来，本书结合专业课题，由浅入深地分别介绍了流体动力学、概率论、随机过程理论、机械振动学、断裂力学等基础理论。为了阐明分析与解决实际问题的方法，本书剖析专业中典型课题，分别就升沉补偿装置、动力定位系统、钻机起升机件、钻井隔水管柱、钻采平台构件等问题，介绍了数学、力学基础理论在实际工程中的具体应用。

本书可供海洋工程、石油机械工程等方面的科技人员参考，并可作为有关高等院校的研究生课及选修课教材。

海洋石油钻采设备理论基础

方 华 灿 编

石油工业出版社出版

（北京安定门外外馆东后街甲36号）

地质印刷厂排版

通县印刷厂印刷

新华书店北京发行所发行

787×1092毫米 16开本 38³/₄印张 921千字 印1—3,[illegible]

1984年12月北京第1版 1984年12月北京第1次[illegible]

书号：15037·2458 定价：3.90 元

前　　言

本书是为从事海洋石油钻采设备或工艺及工程方面的科学技术工作者编写的，也可用作石油高等院校的研究生课或大学生选修课的教材。

海洋石油工程及海洋石油钻采设备包括的知识面广，遇到的理论内容深，常涉及到流体力学、概率论、随机过程理论、机械振动学、断裂力学等基础理论。为了便于从事这方面工作的同志们的学习，本书比较系统地介绍了上述基础理论，使基础理论与专业内容更进一步衔接起来，以便学习时由浅入深，循序渐进。

上述有关基础理论以及本书的其它大部分内容均取材于国内及国外的有关著述和期刊文献，我只是做了点组编工作。书中关于海浪升沉运动与补偿问题以及海洋钻机的起升机件的强度计算等问题是作者根据初步研究，提出的一些粗浅的看法，还不成熟，需要进一步探讨，我热诚地希望能得到各方面有关同志的指正。

这本书在编写过程中，塘沽海洋石油勘探局、湛江南海石油勘探指挥部、上海海洋地质局、天津大学、大连工学院、青岛海洋学院、青岛海洋研究所、外贸部机械进出口公司等单位，提供了不少资料，给了很大的支持与帮助。本书完稿后由石油部海洋石油勘探局总工程师及海洋石油勘探开发设计研究院副院长主持，组织了海洋石油研究院的工程实验室、科技情报室、技术装备室、船舶设计室和修船厂等单位的有关方面的专门工作人员共十二人进行了全面审查，提出了很多宝贵意见，在这里致以衷心的感谢！华东石油学院机械系及其它有关方面为本书的出版，也做了不少工作。在此，谨向这些有关单位和同志致以谢意。

本书原稿虽经教学使用，又由有关部门审查，然后修改，但由于未经过更多的读者鉴别及反复教学实践，因而还会存在不少缺点和问题。不妥之处希望能得到读者的批评，以便在今后教学、科研实践中，进一步修改、补充、完善。

方华灿

一九八二年七月

目　　录

第一篇　海浪的基本理论

第一章　液体波动理论

第一节　流体力学基础

流体力学认为流体是由许多连续分布的物质点，互相之间没有空隙紧密地组织在一起的物体，流体力学就是研究这种物体运动所遵循的规律的科学。

研究流体力学一般有两种方法：一种是研究流体的质点在不同时刻所处的位置及其所具有的速度和加速度等运动参数的方法，称之为拉格朗日法(Lagrange method)；另一种是在空间任意取一个定点，研究在不同时刻通过这个定点的不同流体质点所具有的速度和加速度的方法，常称之为欧勒法（Euler method）。

由于在实际问题中，常常只是需要求得空间各点的运动情况及其随时间而变化的规律，并不需要求出某个个别流体质点的运动过程，因此欧勒法在流体力学中得到广泛的应用。同样，研究海浪的基本理论也是采用欧勒法来进行分析，故本书里将完全采用欧勒法来处理所有的问题。

一、速度与速度场

（一）速度（Velocity）

根据欧勒法，在不同时刻和不同空间上的某点，流体质点具有不同的速度，所以速度 V 是空间点座标（x, y, z）和时间 t 的函数，即

$$\vec{V}=\vec{V}(x, y, z, t) \tag{1—1}$$

流体质点的速度的三个分量也应当是 x, y, z 和 t 的函数，于是可写成

$$\left.\begin{aligned} u&=u(x, y, z, t)\\ v&=v(x, y, z, t)\\ w&=w(x, y, z, t)\end{aligned}\right\} \tag{1—2}$$

从上式（1—1）及（1—2）可看出：若将 x, y, z 当做常数，而把 t 当作变数，即可得到在不同时刻，经过空间某指定点的流体质点的速度；反之，若将t当作常数，而把 x, y, z 当作变数，则即可得到在指定时刻空间各点上流体质点的速度，因此欧勒法不是研究某个个别流体质点的运动过程。

（二）速度场（Velocity field）

由于应用欧勒法所研究的流体的速度不是个别的流体质点的速度，而是在指定时刻空间各点上流体质点的速度分布及其随时间变化的规律，因此将应用欧勒法研究流体运动时的速度V称做速度场。这表明：这时速度的概念不是一个质点的速度，而是场的概念，即各点的速度分布及其变化规律，显然设法寻求这一规律，从数学上找出 $\vec{V}(x, y, z, t)$ 这

个函数，则成为流体力学中的主要课题之一。

应用欧勒法研究流体力学时，速度以外的其它有关物理量，例如密度ρ，压力P和温度T等也都应当引入场的概念，把它们当做x，y，z和t的函数。

（三）加速度（Acceleration）

根据欧勒法的规定，所谓流体质点的加速度是指在给定时刻经过空间某点（x，y，z）上流体质点的加速度。因此，应当将座标（x，y，z）看做是可变的，因为在无限小的时间间隔中，被研究的流体质点正从（x，y，z）点进入到新的位置，故运动的流体质点的加速度a，即

$$\vec{a}=\frac{d\vec{V}}{dt}=\frac{\partial\vec{V}}{\partial t}+\frac{\partial\vec{V}}{\partial x}\cdot\frac{dx}{dt}+\frac{\partial\vec{V}}{\partial y}\cdot\frac{dy}{dt}+\frac{\partial\vec{V}}{\partial z}\cdot\frac{dz}{dt}$$

但是，根据速度分量的定义知

$$u=\frac{dx}{dt}$$

$$v=\frac{dy}{dt}$$

$$w=\frac{dz}{dt}$$

因此，加速度a可写成下式：

$$\vec{a}=\frac{d\vec{V}}{dt}=\frac{\partial\vec{V}}{\partial t}+\left(u\frac{\partial\vec{V}}{\partial x}+v\frac{\partial\vec{V}}{\partial y}+w\frac{\partial\vec{V}}{\partial z}\right) \tag{1—3}$$

$$\left.\begin{aligned}a_x&=\frac{du}{dt}=\frac{\partial u}{\partial t}+u\frac{\partial u}{\partial x}+v\frac{\partial u}{\partial y}+w\frac{\partial u}{\partial z}\\a_y&=\frac{dv}{dt}=\frac{\partial v}{\partial t}+u\frac{\partial v}{\partial x}+v\frac{\partial v}{\partial y}+w\frac{\partial v}{\partial z}\\a_z&=\frac{dw}{dt}=\frac{\partial w}{\partial t}+u\frac{\partial w}{\partial x}+v\frac{\partial w}{\partial y}+w\frac{\partial w}{\partial z}\end{aligned}\right\} \tag{1—4}$$

从工程数学知矢性微分运算符号$\nabla=\vec{i}\frac{\partial}{\partial x}+\vec{j}\frac{\partial}{\partial y}+\vec{k}\frac{\partial}{\partial z}$，一般将$\nabla$读音为del；而速度向量$\vec{V}=\vec{i}u+\vec{j}v+\vec{k}w$，因此可将$\vec{V}$与$\nabla$的标量乘积写成

$$(\vec{V}\cdot\nabla)=\left(\vec{i}\frac{\partial}{\partial x}+\vec{j}\frac{\partial}{\partial y}+\vec{k}\frac{\partial}{\partial z}\right)\cdot(\vec{i}u+\vec{j}v+\vec{k}w)$$

$$=u\frac{\partial}{\partial x}+v\frac{\partial}{\partial y}+w\frac{\partial}{\partial z}$$

这是因为由矢量分析中已知矢量的和与其在x，y，z轴上的分量的关系是$\vec{V}=\vec{i}u+\vec{j}v+\vec{k}w$；而根据二矢量的标量乘积应为一个标量，其大小等于该二矢量的大小及夹角余弦的乘积定理，即

$$\vec{V}\cdot\vec{i}\frac{\partial}{\partial x}=\left|\frac{\partial}{\partial x}\right|\left|\vec{V}\right|\cos\alpha=\frac{\partial}{\partial x}u$$

其中$|\vec{V}|\cos\alpha$根据分量的定义即应等于u，同理还可得到

$$\vec{V}\cdot\vec{j}\frac{\partial}{\partial y}=\left|\frac{\partial}{\partial y}\right|\left|\vec{V}\right|\cos\beta=\frac{\partial}{\partial y}v$$

以及

$$\vec{V}\cdot\vec{k}\frac{\partial}{\partial z}=\left|\frac{\partial}{\partial z}\right|\left|\vec{V}\right|\cos\gamma=\frac{\partial}{\partial z}w$$

利用上面的关系式，若将（1—3）右边括号里的三项中的速度向量$\vec{V}$象征地提到括号的外面来，则可得到

$$\vec{a}=\frac{\partial\vec{V}}{\partial t}+\left(u\frac{\partial}{\partial x}+v\frac{\partial}{\partial y}+w\frac{\partial}{\partial z}\right)\vec{V}$$
$$=\frac{\partial\vec{V}}{\partial t}+(\vec{V}\cdot\nabla)\vec{V}, \qquad (1-5)$$

式（1—5）中，$\frac{\partial\vec{V}}{\partial t}$项代表速度在空间指定点随时间改变的特征；而$(\vec{V}\cdot\nabla)\vec{V}$项代表流体质点的速度由于这个质点在空间位移而发生的变化。

二、流线与定常流动

（一）流线（Flow line）

流线是一组曲线，此组曲线上任意一点的切线方向就是在一个指定时刻，在该点处流体质点的速度方向。换句话说，根据欧勒法在某一个指定时刻t_1，可以借助式（1—1）或式（1—2）画出在这个指定时刻空间各点流体的质点的速度$\vec{V}$；而这个速度方向是与一组曲线组成的流线上任一点的切线方向重合。如图 1-1(a) 中在P点的速度$\vec{V}$与在曲线上该点处的切线相重合。

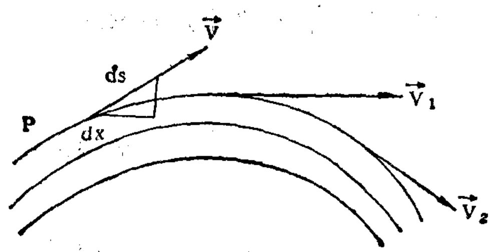


图 1-1(a)

由于每一点上速度的方向只有一个，因此流线互不相交。

（二）流线的微分方程式

如图1-1(a)所示，流线上P点处切线的方向余弦是$\frac{dx}{ds}$，$\frac{dy}{ds}$，及$\frac{dz}{ds}$，且 $ds=\sqrt{(dx)^2+(dy)^2+(dz)^2}$。

但在时刻t_1时，在P点(x, y, z)处流体质点的速度$\vec{V}$与其方向余弦的关系，根据矢量分析可写成

$$u=|\vec{V}|\cos\alpha \quad 或 \quad \cos\alpha=\frac{u}{|\vec{V}|}$$

$$v=|\vec{V}|\cos\beta \qquad \cos\beta=\frac{v}{|\vec{V}|}$$

$$w=|\vec{V}|\cos\gamma \qquad \cos\gamma=\frac{w}{|\vec{V}|}$$

由于根据流线的定义，流体质点在P点处的速度$\vec{V}$的方向余弦应与流线上P点处切线的方向余弦相同，故列出等式后，即可写出

$$\frac{u}{|\vec{V}|}=\frac{dx}{ds} \text{ 或 } \frac{ds}{|\vec{V}|}=\frac{dx}{u}$$

$$\frac{v}{|\vec{V}|}=\frac{dy}{ds} \text{ 或 } \frac{ds}{|\vec{V}|}=\frac{dy}{v}$$

$$\frac{w}{|\vec{V}|}=\frac{dz}{ds} \text{ 或 } \frac{ds}{|\vec{V}|}=\frac{dz}{w}$$

由此，可以得到下式

$$\frac{dx}{u}=\frac{dy}{v}=\frac{dz}{w} \tag{1—6}$$

式（1—6）就叫做流线的微分方程式，它是一组两个一阶的常微分方程。这一组方程的一般积分可以用下式表达

$$\left.\begin{aligned}F_1(x, y, z, t, c_1, c_2)=0\\ F_2(x, y, z, t, c_1, c_2)=0\end{aligned}\right\} \tag{1—7}$$

式（1—7）中c_1及c_2是两个任意积分常数，而时间t则当做参数来看待。从式（1—7）显见，当给c_1及c_2以不同的值，而给t以指定的值时，即可得出在指定时刻的流线族。因此，称式（1—6）为流线的微分方程式。

（三）*定常流动*（Constant flow）

流体在任何时刻的流线都一样的流动称为定常流动，也就是说定常流动的流体在空间各个点上的质点的速度是不随时间而变化的。

从数学上来看，速度$\vec{V}$是时间的显函数，即$\vec{V}=\vec{V}(x, y, z, t)$，故在某个时刻$t_1$时的流线，仅仅反映该时刻流体的运动情况如式（1—6）及式（1—7）所示。但若速度$\vec{V}$不是时间的显函数，即$\vec{V}=\vec{V}(x, y, z)$则空间各点上流体质点的速度将不随时间而改变，因而在任何时刻的流线都是一样的，这种性质的流动称为定常流动。

三、无旋运动与涡旋运动

（一）*形变速度与转动速度*（Speed of deformation, Rotational speed）

根据欧勒法知，在某一个指定时刻t，流体质点的速度矢量$\vec{V}$是点座标(x, y, z)的函数。因此，若在某个指定时刻，空间某点A(x, y, z)上流体质点的速度为$\vec{V_0}$，它的三个分量分别为u_0, v_0, w_0，则在A的附近一点B(x+dx, y+dy, z+dz)的速度$\vec{V}$的三个分量u, v, w可写成

$$du=u-u_0=\frac{\partial u}{\partial x}dx+\frac{\partial u}{\partial y}dy+\frac{\partial u}{\partial z}dz$$

即

即 $$u=u_0+\frac{\partial u}{\partial x}dx+\frac{\partial u}{\partial y}dy+\frac{\partial u}{\partial z}dz$$

$$=u_0+\frac{\partial u}{\partial x}dx+\frac{1}{2}\left(\frac{\partial u}{\partial y}+\frac{\partial v}{\partial x}\right)dy+\frac{1}{2}\left(\frac{\partial u}{\partial z}+\frac{\partial w}{\partial x}\right)dz$$

$$+\frac{1}{2}\left(\frac{\partial u}{\partial y}-\frac{\partial v}{\partial x}\right)dy+\frac{1}{2}\left(\frac{\partial u}{\partial z}-\frac{\partial w}{\partial x}\right)dz \tag{1—8}$$

令 $$\varepsilon_{11}=\frac{\partial u}{\partial x},\quad \varepsilon_{22}=\frac{\partial v}{\partial y},\quad \varepsilon_{33}=\frac{\partial w}{\partial z} \tag{1—9}$$

则式（1—8）又可写成

同理 $$\left.\begin{aligned}u&=u_0+\varepsilon_{11}dx+\varepsilon_{12}dy+\varepsilon_{13}dz+0\cdot dx+\omega_{12}dy+\omega_{13}dz\\ v&=v_0+\varepsilon_{21}dx+\varepsilon_{22}dy+\varepsilon_{23}dz+\omega_{21}dx+0\cdot dy+\omega_{23}dz\\ w&=w_0+\varepsilon_{31}dx+\varepsilon_{32}dy+\varepsilon_{33}dz+\omega_{31}dx+\omega_{32}dy+0\cdot dz\end{aligned}\right\} \tag{1—10}$$

式（1—10）中，ω_{12}、ω_{13}、ω_{21}、ω_{23}、ω_{31}、ω_{32} 分别为围绕 x、y、z 轴转动的角速度，而

$$\left.\begin{aligned}\varepsilon_{12}&=\frac{1}{2}\left(\frac{\partial u}{\partial y}+\frac{\partial v}{\partial x}\right), & \varepsilon_{21}&=\frac{1}{2}\left(\frac{\partial v}{\partial x}+\frac{\partial u}{\partial y}\right), & \varepsilon_{12}&=\varepsilon_{21}\\ \varepsilon_{23}&=\frac{1}{2}\left(\frac{\partial v}{\partial z}+\frac{\partial w}{\partial y}\right), & \varepsilon_{32}&=\frac{1}{2}\left(\frac{\partial w}{\partial y}+\frac{\partial v}{\partial z}\right), & \varepsilon_{23}&=\varepsilon_{32}\\ \varepsilon_{31}&=\frac{1}{2}\left(\frac{\partial w}{\partial x}+\frac{\partial u}{\partial z}\right), & \varepsilon_{13}&=\frac{1}{2}\left(\frac{\partial u}{\partial z}+\frac{\partial w}{\partial x}\right), & \varepsilon_{31}&=\varepsilon_{13}\end{aligned}\right\} \tag{1—11}$$

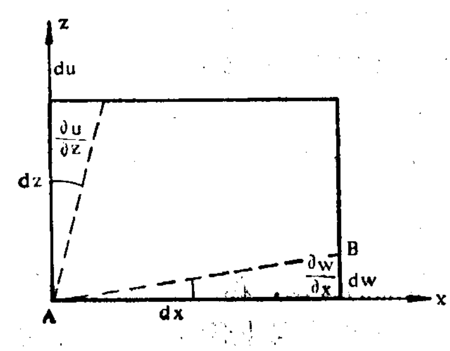
1．形变速度

（1）体积膨胀速度（Volume expansion speed）式（1—9）的 ε_{11}，ε_{22}，ε_{33} 表达了单位时间内两个质点（A与B）间距离的增加和原距离之比，因此称之为相对膨胀速度的分量。因为反映整个流体的一块体积膨胀变化的速度是 x，y，z，三个方向上分量之和，若以θ表示这个和，则可写出

$$\theta=\varepsilon_{11}+\varepsilon_{22}+\varepsilon_{33}=\nabla\cdot\vec{V} \tag{1—12}$$

式（1—12）中的θ即称为体积膨胀速度，它表达了单位时间内流体元体积的增加和原体积之比，叫做体积膨胀速度。因为根据ε_{11}，ε_{22}，ε_{33}的定义，如果流体元沿 x，y，z 三个方向的距离都增加了，那么流体元的体积当然也就增加了。

（2）剪切速度（Shear speed）图1-1(b)表示了流体元沿 x，y，z 方向体积增加及沿



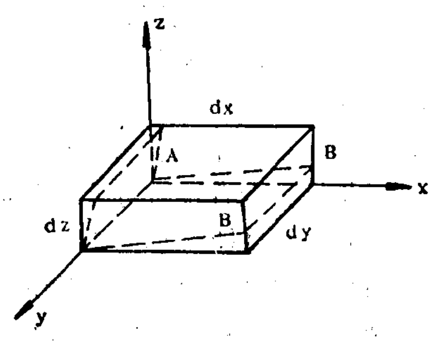


图 1-1(b)

x，z 方向面积增加的情况。

如图1-1(b)所示，由式（1—11）所得到的 $2\varepsilon_{12}$, $2\varepsilon_{23}$, $2\varepsilon_{31}$ 等正好表达了在zx, yz, xy平面上剪切应变的速度的大小，因此称为剪切速度。这是因为 $2\varepsilon_{31}=\frac{\partial w}{\partial x}+\frac{\partial u}{\partial z}$ 恰好是xz平面上单位时间内剪应变 $\frac{\partial w}{\partial x}$ 与 $\frac{\partial u}{\partial y}$ 之和，而 w 及 u 是在 z 方向及 x 方向上单位时间增加的距离。正如图1-1(b)中所表示的，当流体质点具有这些速度时，则原来处在相互垂直的两线元的流体质点，将变为处在两斜交的线元上。

从上述分析可看出，流体元的体积膨胀及剪切变形的结果将使流体元发生体积形状的变化，如图1-1(b)中六面体所示。因此，将膨胀速度与剪切速度合起来称做变形速度。由于流体本身无一定形状，且流体质点的速度 $\vec{V}$ 是点座标(x, y, z)的函数，故形变速度的各个分量一般不会同时为零。

2．转动速度

式（1—10）中

$$\left.\begin{aligned}\omega_{21}&=\frac{1}{2}\left(\frac{\partial v}{\partial x}-\frac{\partial u}{\partial y}\right)=-\frac{1}{2}\left(\frac{\partial u}{\partial y}-\frac{\partial v}{\partial x}\right)=-\omega_{12}\\\omega_{32}&=\frac{1}{2}\left(\frac{\partial w}{\partial y}-\frac{\partial v}{\partial z}\right)=-\frac{1}{2}\left(\frac{\partial v}{\partial z}-\frac{\partial w}{\partial y}\right)=-\omega_{23}\\\omega_{13}&=\frac{1}{2}\left(\frac{\partial u}{\partial z}-\frac{\partial w}{\partial x}\right)=-\frac{1}{2}\left(\frac{\partial w}{\partial x}-\frac{\partial u}{\partial z}\right)=-\omega_{31}\end{aligned}\right\}\tag{1—13}$$

这样，式（1—10）中的 $\omega_{12}dy$ 及 $\omega_{32}dy$ 的角速度 ω_{12} 和 ω_{32}，正如图 1-1(b) 所示是相对于 x 轴的转动速度，且这个转动的线速度应等于 $\omega_{12}dy$ 及 $\omega_{32}dy$ 正好是式（1—8）中的 $\frac{1}{2}\left(\frac{\partial u}{\partial y}-\frac{\partial v}{\partial x}\right)dy$ 项及 $\frac{1}{2}\left(\frac{\partial w}{\partial y}-\frac{\partial v}{\partial z}\right)$ 项，因此，称式（1—8）的这些项叫做转动速度。同理，式（1—10）中的 $\omega_{13}dz$ 及 $\omega_{23}dz$ 如图1-1(b)所示，是相对于y轴的转动速度；而式（1－10）中的 $\omega_{21}dx$ 及 $\omega_{31}dx$ 项是相对于 z 轴的转动速度。根据这些分析，如果流体质点具有所有这些速度时，则它将绕着三个座标轴转动，否则将只围绕一个或两个座标轴转动或甚至当这些项的速度均为零时则流体质点不绕任何座标轴转动。

同时，由式（1—10）可看出：空间任一点上流体质点的速度(u, v, w)总可分解为平动速度(u_0, v_0, w_0)，形变速度(ε_{ij})以及转动速度(ω_{ij})三者之和。这和刚体的不同之点是多出了一个形变速度，因为刚体是一个不变形的质点组，而流体是可以变形的。

（二）*无旋运动*（Non-rotational movement）

当转动速度 ω 的三个分量 ω_x, ω_y, ω_z 同时等于零，则流体质点在运动过程中就不会发生转动，通常把这种没有转动的运动叫做无旋运动。

（三）*涡旋运动*（Rotational movement）

当具有转动速度 ω 的分量时，则存在流体质点的转动，称流体质点的这种运动为涡旋运动。例如钻井船航行时，在螺旋桨叶片端附近的水形成漏斗形的深窝，并且这个深窝沿着圆周旋转很快，就是一种涡旋运动。

四、连续方程（Continuity equation）

（一）意义

连续方程是反映流体的速度与密度的关系式。由于流体运动时与刚体的不同点是一方面发生变形，另一方面流体体积中的质量分布也将随着时间而发生变化，而且这种变化又会反过来影响流体质点的速度分布，这样就需要寻求这项特殊规律，找出流体速度与密度之间的关系式，连续方程正是为了解决这个问题。

（二）推理

设在空间划出一个固定体积 τ，并令 S 表示包围这个体积的表面积。当流体流动时，流体质点将首先进入 τ 内，然后又从 τ 中流出。现在若由表面 S 上取一个面元 dS，则单位时间内经过面元 dS 从体积 τ 中流出的流体质量，显然应等于以 dS 为底，以流体质点速度 $\vec{V}$ 在 dS 的法线方向 n 上的分量 V_n 为高的柱体体积中所包含的流体质量。而经整个表面S流出的流体质量则应为积分式

$$\int_S \rho \vec{V} \vec{dS} = \int_S \rho V_n |\vec{dS}| \tag{1—14}$$

式（1—14）中，ρ 代表流体的密度。由于取的面元dS很小，因此，ρ 及 V_n 在 dS 面元上各处均可以看成是常数。速度 V_n 可正可负，正的代表流体流出的速度，负的代表流体流进的速度。

在体积 τ 中，若流出的流体质量多于流入的流体质量，则体积 τ 中所包含的流体质量即应有所减少。而在单位时间内体积 τ 中流体质量的减少显然应等于

$$-\int_\tau \frac{\partial \rho}{\partial t} d\tau \tag{1—15}$$

式中密度 ρ 是单位体积的质量，是随时间而变化的，而体积 τ 及 $d\tau$ 是不随时间而变化的。

根据质量守恒定律，从体积 τ 中外流的流体质量应等于 τ 中减少的流体质量，于是式（1—14）应等于式（1—15），即

$$\int_S \rho V_n dS = -\int_\tau \frac{\partial \rho}{\partial t} d\tau \tag{1—16}$$

根据高等数学中的高斯公式（Gauss formula）所给出的空间区域上的三重积分与其边界曲面面积上的二重积分之间的关系，已知：

$$\iiint_S \frac{\partial \vec{V}}{\partial x_i} d\tau = \oiint_S (v\cos\alpha) dS \qquad (x_i = x_1, x_2, x_3)$$

因此，可将式（1—16）的左边的面积分化为体积积分而写成

$$\int_S \rho V_n dS = \int_\tau \nabla (\vec{V} \rho) d\tau \tag{1—17}$$

将式（1—17）代入式（1—16），则可写成

$$\int_\tau \nabla (\rho \vec{V}) d\tau = -\int_\tau \frac{\partial \rho}{\partial t} d\tau \tag{1—18}$$

式（1—18）中，由于 τ 是任意的，即式（1—18）对任何体积 τ 均适合，因此只能是

被积函数等于零，于是即可得出

$$\frac{\partial\rho}{\partial t}+\nabla(\rho\vec{V})=0 \tag{1—19}$$

式（1—19）即所寻求的连续方程，它反映了流体的速度与密度之间的关系。

若将式（1—19）中的$\nabla(\rho\vec{V})$项展开，则可写成

$$\frac{\partial\rho}{\partial t}+\frac{\partial(\rho u)}{\partial x}+\frac{\partial(\rho v)}{\partial y}+\frac{\partial(\rho w)}{\partial z}=0$$

即

$$\frac{\partial\rho}{\partial t}+u\frac{\partial\rho}{\partial x}+v\frac{\partial\rho}{\partial y}+w\frac{\partial\rho}{\partial z}+\rho\left(\frac{\partial u}{\partial x}+\frac{\partial v}{\partial y}+\frac{\partial w}{\partial z}\right)=0 \tag{1—20}$$

但知 $\rho=\rho(x, y, z, t)$，仿照前面式（1—3）运用多元复合函数求导数的法则，推导流体质点的加速度的方法，可以得出密度随时间的变化关系为

$$\frac{d\rho}{dt}=\frac{\partial\rho}{\partial t}+u\frac{\partial\rho}{\partial x}+v\frac{\partial\rho}{\partial y}+w\frac{\partial\rho}{\partial z}$$

而

$$\frac{\partial u}{\partial x}+\frac{\partial v}{\partial y}+\frac{\partial w}{\partial z}=\nabla\cdot\vec{V}$$

将此两式代入式（1—20）中，则可得出连续方程

$$\frac{d\rho}{dt}+\rho\nabla\vec{V}=0 \tag{1—21}$$

（三）液体的连续方程（Continuity equation of liquid）

对于液体来讲，密度的变化很小，可以认为是常数，也就是说对于一定质量的液体，其体积是不易被压小的，因而密度也就没有变化，称这种体积不易被压小的液体及流动速度很小的气体为不可压缩流体。

对于不可压缩的液体，由于ρ＝常数，即在式（1—21）中$\frac{d\rho}{dt}=0$，因而满足(1—21)为零，必须

$$\left.\begin{aligned}&\nabla\cdot\vec{V}=0\\ \text{或即}\quad&\theta=\frac{\partial u}{\partial x}+\frac{\partial v}{\partial y}+\frac{\partial w}{\partial z}=0\end{aligned}\right\} \tag{1—22}$$

式（1—22）即为液体的简化的连续方程，它表明：对于液体来说，并不是所有运动都是可能的，只有当流体质点的速度满足方程式（1—22）才有可能。

五、速度势与流函数

（一）速度势、散度、旋度和梯度

1．散度（Divergence）

根据高等数学的矢量分析，知道矢性运算符号∇与某一矢量（例如速度$\vec{V}$）的标量乘积是一个标量，而通常称此标量为矢量的散度，即表示为

$$\operatorname{div}\vec{V}=\nabla\cdot\vec{V}=\frac{\partial u}{\partial x}+\frac{\partial v}{\partial y}+\frac{\partial w}{\partial z}=\vec{V}\text{的散度} \tag{1—23}$$

由式（1—21）可看出：流体的散度的物理意义是表示在单位时间内从单位体积内往外流的净质量（即$-\frac{\partial\rho}{\partial t}$）。而与其正相反的$-\nabla\vec{V}$则代表单位时间内流体流进空间一个单位体积的净质量，由于它包含有流体汇聚的意思，故称为汇度（Convergence）。

2．旋度（Curl 或 rotation）

若将式（1—8）及式（1—10）写成 du, dv, dw 的矩阵式，则得

$$
\begin{pmatrix} du \\ dv \\ dw \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{\partial u}{\partial x} & \frac{\partial u}{\partial y} & \frac{\partial u}{\partial z} \\ \frac{\partial v}{\partial x} & \frac{\partial v}{\partial y} & \frac{\partial v}{\partial z} \\ \frac{\partial w}{\partial x} & \frac{\partial w}{\partial y} & \frac{\partial w}{\partial z} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} dx \\ dy \\ dz \end{pmatrix}
$$

$$
= \left(\begin{pmatrix} \frac{\partial u}{\partial x} & \frac{1}{2}\left(\frac{\partial u}{\partial y}+\frac{\partial v}{\partial x}\right) & \frac{1}{2}\left(\frac{\partial u}{\partial z}+\frac{\partial w}{\partial x}\right) \\ \frac{1}{2}\left(\frac{\partial v}{\partial x}+\frac{\partial u}{\partial y}\right) & \frac{\partial v}{\partial y} & \frac{1}{2}\left(\frac{\partial v}{\partial z}+\frac{\partial w}{\partial y}\right) \\ \frac{1}{2}\left(\frac{\partial w}{\partial x}+\frac{\partial u}{\partial z}\right) & \frac{1}{2}\left(\frac{\partial w}{\partial y}+\frac{\partial v}{\partial z}\right) & \frac{\partial w}{\partial z} \end{pmatrix} + \right.
$$

$$
\left. + \begin{pmatrix} 0 & \frac{1}{2}\left(\frac{\partial u}{\partial y}-\frac{\partial v}{\partial x}\right) & \frac{1}{2}\left(\frac{\partial u}{\partial z}-\frac{\partial w}{\partial x}\right) \\ \frac{1}{2}\left(\frac{\partial v}{\partial x}-\frac{\partial u}{\partial y}\right) & 0 & \frac{1}{2}\left(\frac{\partial v}{\partial z}-\frac{\partial w}{\partial y}\right) \\ \frac{1}{2}\left(\frac{\partial w}{\partial x}-\frac{\partial u}{\partial z}\right) & \frac{1}{2}\left(\frac{\partial w}{\partial y}-\frac{\partial v}{\partial z}\right) & 0 \end{pmatrix} \right) \begin{pmatrix} dx \\ dy \\ dz \end{pmatrix}
$$

若令

$$
dV = \begin{pmatrix} du \\ dv \\ dw \end{pmatrix} \qquad dr = \begin{pmatrix} dx \\ dy \\ dz \end{pmatrix}
$$

则上面的矩阵式可写成

$$
dV = ([D] + [\Omega])dr
$$

而

$$
[\Omega]dr = \begin{pmatrix} 0 & -\frac{1}{2}\left(\frac{\partial v}{\partial x}-\frac{\partial u}{\partial y}\right) & \frac{1}{2}\left(\frac{\partial u}{\partial z}-\frac{\partial w}{\partial x}\right) \\ \frac{1}{2}\left(\frac{\partial v}{\partial x}-\frac{\partial u}{\partial y}\right) & 0 & -\frac{1}{2}\left(\frac{\partial w}{\partial y}-\frac{\partial v}{\partial z}\right) \\ -\frac{1}{2}\left(\frac{\partial u}{\partial z}-\frac{\partial w}{\partial x}\right) & \frac{1}{2}\left(\frac{\partial w}{\partial y}-\frac{\partial v}{z}\right) & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} dx \\ dy \\ dz \end{pmatrix}
$$

$$=\frac{1}{2}(\mathrm{rot}V\times dr)=\omega\times dr$$

上式中$\mathrm{rot}\vec{V}$即称之为速度场$\vec{V}$的速度旋度。因从高等数学的矢量分析中知道，若速度$\vec{V}$为一个矢量场，则$\vec{V}$的旋度规定为运算符号 ∇及$\vec{V}$的矢量的乘积，它是一个空间的矢量函数，即

$$\mathrm{rot}\vec{V}=\nabla\times\vec{V}=i\left(\frac{\partial w}{\partial y}-\frac{\partial v}{\partial z}\right)+\left(\frac{\partial u}{\partial z}-\frac{\partial w}{\partial x}\right)j+\left(\frac{\partial v}{\partial x}-\frac{\partial u}{\partial y}\right)k$$

从上式中看出 $\mathrm{rot}\ \vec{V}$即为ω，亦即绕座标轴作旋转运动的角速度，因此称 $\mathrm{rot}\ \vec{V}$为旋度即代表了这种物理意义。

为了简单起见，可以用行列式来表示旋度如下：

$$\mathrm{rot}\vec{V}=\nabla\times\vec{V}=\begin{vmatrix} i & j & k \\ \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial z} \\ u & v & w \end{vmatrix}$$

3．梯度（Gradient）

根据矢量分析中的规定，若$\phi(x, y, z)$是空间位置（即座标 x, y, z）的标量函数，则可运用已规定的矢量微分运算符号∇，将此标量函数$\phi(x, y, z)$的梯度规定为

$$\mathrm{Grad}\phi=\nabla\phi=i\frac{\partial\phi}{\partial x}+j\frac{\partial\phi}{\partial y}+k\frac{\partial\phi}{\partial z} \tag{1—24}$$

正由于式（1—24）反映了标量函数（x, y, z）在座标轴 x, y, z三个方向上的变化率及其合成，因此，以代表变化率意义的梯度来命名。

根据这一规定，若用 dx, dy, dz 所规定的矢量来代表位移 dr，即

$$\vec{d}\,r=\vec{i}\,dx+\vec{j}\,dy+\vec{k}\,dz$$

而

$$\nabla=\vec{i}\frac{\partial}{\partial x}+\vec{j}\frac{\partial}{\partial y}+\vec{k}\frac{\partial}{\partial z}$$

则

$$\begin{aligned} d\phi &= \frac{\partial\phi}{\partial x}dx+\frac{\partial\phi}{\partial y}dy+\frac{\partial\phi}{\partial z}dz \\ &= \left(\vec{i}\frac{\partial\phi}{\partial x}+\vec{j}\frac{\partial\phi}{\partial y}+\vec{k}\frac{\partial\phi}{\partial z}\right)\left(\vec{i}\,dx+\vec{j}\,dy+\vec{k}\,dz\right) \\ &= (\nabla\phi)dr \end{aligned} \tag{1—25}$$

如图 1-2 所示，若$\vec{V}$为一个速度矢量场，将曲线AB分成 dl_1, dl_2, ……矢量元(Vector element)将沿曲线的全长取速度$\vec{V_1}$，$\vec{V_2}$… 与 dl_1, dl_2,……的标量乘积之和称做$\vec{V}$ 沿 曲线AB的线积分，则可得出

$$\int_A^B \vec{V}\,\vec{d}\,l=\int_A^B (udx+vdy+wdz)$$

若$\vec{V}$是个位置(x, y, z)的标量函数ϕ(x, y, z)的梯度，则根据梯度定义已知

$$\vec{V}=\nabla\phi$$

$$\int_A^B \vec{V}\vec{dl}=\int_A^B(\nabla\phi)\vec{dl}=\int_A^B\left(\frac{\partial\phi}{\partial x}dx+\frac{\partial\phi}{\partial y}dy+\frac{\partial\phi}{\partial z}dz\right)$$

$$=d\phi=\phi_B-\phi_A$$

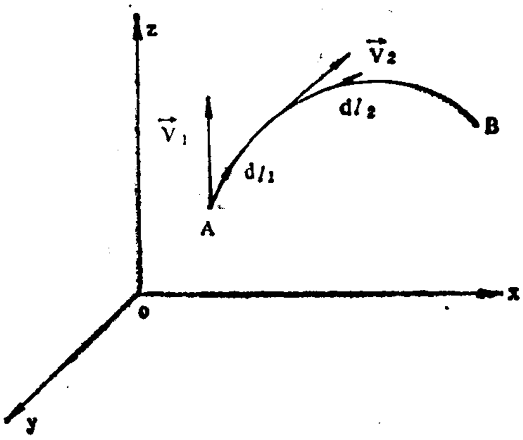


图 1-2

若A及B为同一点，即AB为空间的一个闭合曲线，则可得

$$\oint_l \vec{V}\vec{dl}=\phi_B-\phi_A=0$$

若A、B两点极其接近，则又可写成

$$\vec{V}\cdot\vec{dl}=d\phi=(\nabla\phi)\cdot\vec{dl}=0$$

即 $$\vec{V}\cdot\vec{dl}-(\nabla\phi)\vec{dl}=0$$

或 $$\vec{V}=\nabla\phi \qquad (1-26)$$

式（1—26）表明有速度势存在时，旋度为零，是为必要条件，但从另外一方面来看，当旋度为零时，即

$$\nabla\vec{V}=0, \text{可写成行列式为}\begin{vmatrix} i & j & k \\ \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial z} \\ u & v & w \end{vmatrix}=0$$

即

$$i=\frac{\partial w}{\partial y}-\frac{\partial v}{\partial z}=0, \quad \text{或即}\frac{\partial w}{\partial y}=\frac{\partial v}{\partial z}$$

$$j=\frac{\partial w}{\partial x}-\frac{\partial u}{\partial y}=0, \quad \frac{\partial w}{\partial x}=\frac{\partial u}{\partial z}$$

$$k=\frac{\partial v}{\partial x}-\frac{\partial u}{\partial y}=0, \quad \frac{\partial v}{\partial x}=\frac{\partial u}{\partial y}$$

设有一个速度势 ϕ 存在，而 $u=\frac{\partial\phi}{\partial x}$，则可写出

$$\frac{\partial v}{\partial x}=\frac{\partial u}{\partial y}=\frac{\partial^2\phi}{\partial y\partial x}, \text{取积分则 } v=\frac{\partial\phi}{\partial y}$$

$$\frac{\partial w}{\partial x}=\frac{\partial u}{\partial z}=\frac{\partial^2\phi}{\partial z\partial x}, \text{取积分则 } w=\frac{\partial\phi}{\partial z}$$

由于 $u=\frac{\partial\phi}{\partial x}$， $v=\frac{\partial\phi}{\partial y}$， $w=\frac{\partial\phi}{\partial z}$存在即当旋度为零时有速度势$\phi$存在，是为充分条件。

由此可得出：若$\vec{V}$在任一封闭路线上的线积分为零，即不仅有速度势存在时，旋度为零；而且旋度为零时有速度势存在，则$\vec{V}$必应为某一标量函数ϕ(x, y, z) 的梯度。

4. 速度势 (Velocity potential)

根据数学的矢量分析中的斯托克(Stokes)定理，一个矢量场V(流体的质点速度)的旋度$\nabla\vec{V}$沿任一曲面S的面积分，应等于$\vec{V}$沿该面积边缘曲线的线积分，即

$$\oint_l \vec{V}d\vec{l}=\iint_S(\nabla\times\vec{V})dS$$

但由无旋运动及旋度的定义，已知无旋运动应旋度为零，即

$$\nabla\times\vec{V}=\mathrm{rot}\,\vec{V}=0$$

∴
$$\oint_l \vec{V}d\vec{l}=\iint_S(\nabla\times\vec{V})dS=0$$

这样，由于$\vec{V}$在任一封闭路线上的线积分为零，即

$$\oint_l \vec{V}d\vec{l}=\phi_B-\phi_A=0$$

于是根据上面研究梯度时已知的道理，知道无旋矢量场$\vec{V}$必定应是某一个标量函数$\phi(x, y, z, t)$的梯度，即

$$\vec{V}=\nabla\phi \tag{1—27}$$

或
$$u=\frac{\partial\phi}{\partial x},\quad v=\frac{\partial\phi}{\partial y},\quad w=\frac{\partial\phi}{\partial z} \tag{1—28}$$

从数学上来讲，将式(1—27)或式(1—28)所规定的标量函数ϕ即称做速度势。从物理意义上来讲，由于速度场$\vec{V}$是ϕ这个函数的梯度，因此ϕ随空间位置(x, y, z)及时间(t)的变化可以反映出流体的质点速度在三个座标轴方向上大小变化(u, v, w)，以及$\vec{V}$随x, y, z和t而变化的规律，故称函数ϕ是速度$\vec{V}$的势，即它可以表现出来速度的各种情况。

因为只有无旋运动才有速度势存在，故又称无旋运动为位势运动(Potential movement)，就是说这种运动是具有势函数的运动的意思

由式(1—22)已经知道对于压缩的液体的连续方程是

$$\nabla\vec{V}=0$$

但对于不可压缩的液体做无旋运动时，则应根据式(1—27)给出

$$\vec{V}=\nabla\phi$$

代入连续方程式后，即可得出

$$\nabla\cdot\vec{V}=\nabla\times\nabla\phi=\nabla^2\phi=0$$

即
$$\nabla^2\phi=\frac{\partial^2\phi}{\partial x^2}+\frac{\partial^2\phi}{\partial y^2}+\frac{\partial^2\phi}{\partial z^2}=0 \tag{1—29}$$

式(1—29)表明：不可压缩的流体的速度势能满足拉普拉斯(Laplace)方程。因为式(1—29)表示出的二阶偏微分方程式正是应用数学中最重要的拉普拉斯方程。

式(1—29)还表示：在流体力学中解决不可压缩的液体的无旋运动的问题时，可以根据已知的边界条件，解拉普拉斯偏微分方程来求得速度势ϕ，然后再根据式(1—28)求出流体质点的速度分量u, v, w，从而使问题得到解决。研究海浪时，也正是遵循这个基本原理与方法进行的，所以说这一段理论基础对于研究海浪的运动与动力有着重要意义。