最新考研

- 考研要求
- 要点提示
- 典型例题
- 习题选编
- 模拟试题及解答

数学复习指导

刘三阳 主编

西安电子科技大学出版社

最新考研数学复习指导

刘三阳　主编

西安电子科技大学出版社

1997

(陕)新登字 010 号

内 容 简 介

本书根据国家教委 1997 年新修订的《硕士研究生入学考试数学考试大纲》，简明扼要地给出了高等数学、线性代数、概率论与数理统计初步等各部分内容的考试要求和要点提示，重点放在典型例题的分析讲解上，注重解题思路和规律的揭示与方法技巧的提炼，突出知识的综合运用和解题能力的训练，旨在起到触类旁通、知微见著、融会贯通之效。精心选编的习题和模拟试题可供读者自测自评。全书题目来源广泛，题型多样，覆盖面广，综合性强。

本书既可作为报考硕士研究生的考生的应试指导书，也可用作在校理工科大学生学习或复习的辅导书，还可作为从事同类课程教学的教师的参考书。

最新考研数学复习指导

刘三阳　主编

责任编辑　李惠萍

西安电子科技大学出版社出版发行

陕西省高陵县印刷厂印刷

各地新华书店经销

开本 787×1092　1/16　印张 21　　字数 500 千字

1997 年 8 月第 1 版　1997 年 8 月第 1 次印刷　　印数 1－6 000

ISBN 7－5606－0542－7/O·0032　　定价：20.50 元

前言

硕士研究生入学考试是国家教委统一组织的具有选拔功能的全国最高层次的考试，随着“考研”的不断升温，加之1997年国家教委新修订的考试大纲的颁布，越来越多的考生迫切需要一批根据新形势编写的复习、备考和应试指导书。为了适应科技发展对硕士研究生数学素质的新要求，帮助考生在较短时间内巩固和掌握新的考试大纲所规定的数学考试内容，我们特意编写了这本《最新考研数学复习指导》书，以满足广大考生之需要。

著名美籍匈牙利数学家、教育家波利亚在《数学的发现》一书中指出：“任何一门学问都是由知识和技能所组成的”。“在数学中，技能比仅仅掌握一些知识要重要得多”。知识本身并没有告诉人们怎样运用它。运用知识的本领就是一种技能，解题是一种运用知识的过程，当然也是一种技能的训练。波利亚认为：解题是一种实践性技能，是智力的特殊成就，也是人类最富有特征的一种活动，数学技能就是解题能力。考察学生的学习情况、选拔硕士研究生等都是通过让学生或考生解答有关试题的方式来实现的，因此解题能力至关重要。基于以上理由，本书把重点放在典型例题的分析讲解上，着重揭示解题规律和方法，突出知识的综合运用和解题训练。至于考试大纲所规定的考试内容，本书一般只作简明扼要的提示，当然对某些容易出错而又不易自察的疑难问题本书也有较为详尽的阐释。

全书分为三大篇：高等数学、线性代数、概率论与数理统计初步。每篇由若干章组成，每章均分为四部分，其中第一部分将考试大纲中的“考试要求”原文列出，作为全书的主导线。

这是新的考试大纲中增加的条款。根据大纲修订说明，考试要求分为两个层次，其中“理解”、“掌握”表示较高要求，“了解”、“会”表示较低要求。这一部分安排在每章卷首，以便考生首先明确考试要求；第二部分为“要点提示”，对考试大纲中的“考试内容”择其要者加以提纲挈领式地讲述，以便考生复习查阅，温故知新；第三部分“典型例题”是全书的主要内容，题目主要来自近年来全国硕士研究生入学试题和一些国内外有影响的刊物或参考书，也有部分例题由作者平时教学积累或自编而得。例题来源广泛、题型多样、覆盖面广、信息量大、综合性强。在例题分析上，注重解题思路和规律的分析总结与方法技巧的提炼。不少题目之后还带有附注，或指出注意事项。或作出归纳引伸，或加以补充联想，这一切旨在起到解难释疑、知微见著、举一反三、融会贯通之效；第四部分“习题选编”精心选配了适当数量和难度的习题，供考生练习。全书最后的附录给出了四套模拟试题及其解答，以供考生自测自评。

本书既可作为报考硕士研究生的考生的应试指导书，也可用作在校理工科大学生和从事同类课程教学的教师的一本有价值的参考书。

本书由刘三阳主编，参加编写的有刘三阳(第一篇第一、二、六章)、刘玉璞(第一篇第三、四、七、八章、李广民(第一篇第五、九、十章)、王世儒(第二篇)、毛用才(第三篇)，附录部分由刘玉璞整理，全书由刘三阳统稿。

编者们对西安电子科技大学出版社的大力支持表示感谢，对担任责任编辑的李惠萍同志和抄写部分原稿的硕士生周水生同志表示谢意。

尽管编者们有过多年从事本科生、研究生数学教学的经验和举办过多期“考研”数学辅导班以及评阅试卷的实践，但由于水平有限，加之时间仓促，书中难免有不当或谬误之处，恳请读者批评指正。

编 者

一九九七年五月

目录

第一篇　高等数学

第二篇　线性代数

第三篇　概率论与数理统计初步

附录　考研模拟试题及解答

第一篇　高 等 数 学

■第一章　函数、极限、连续
■第二章　一元函数微分学
■第三章　不定积分
■第四章　定积分
■第五章　向量代数与空间解析几何
■第六章　多元函数微分学
■第七章　重积分
■第八章　曲线积分与曲面积分
■第九章　无穷级数
■第十章　常微分方程

第一章 函数、极限、连续

一、考研要求

(1) 理解函数的概念，掌握函数的表示方法。

(2) 了解函数的奇偶性、单调性、周期性和有界性。

(3) 理解复合函数的概念，了解反函数及隐函数的概念。

(4) 掌握基本初等函数的性质及其图形。

(5) 会建立简单应用问题中的函数关系式。

(6) 理解极限的概念，理解函数左、右极限的概念以及极限存在与左右极限之间的关系。

(7) 掌握极限的性质及四则运算法则。

(8) 掌握极限存在的两个准则，并会利用它们求极限，掌握利用两个重要极限求极限的方法。

(9) 理解无穷小、无穷大以及无穷小的阶的概念，会用等价无穷小求极限。

(10) 理解函数连续性的概念，会判别函数间断点的类型。

(11) 了解初等函数的连续性和闭区间上连续函数的性质(最大值、最小值定理和介值定理)，并会应用这些性质。

二、要点提示

1. 函数概念

设 $D\subset R$ 是实数集，如果存在对应法则 f，使得对于每个 $x\in D$，存在唯一确定的实数 y 与之对应，则称 f 是定义在 D 上的函数，D 称为 f 的定义域，$f(D)=\{f(x)\mid x\in D\}$ 称为函数 f 的值域。函数与其定义域是不能分离的。函数是高等数学中最重要、最基本的概念之一。

2. 复合函数的定义

设 f 和 g 分别是定义在 A 和 B 上的函数，如果 $f(A)\subset B$，则对任意 $x\in A$，有唯一确定的 $y=f(x)\in B$，于是 $g(y)=g(f(x))$ 有定义，这样确定的新函数 $z=g(f(x))$，$x\in A$ 称为由函数 $y=f(x)$ 与 $z=g(y)$ 复合而成的复合函数，y 称为中间变量。

注意 并非任何两个函数都可以构成复合函数。

3. 初等函数

由指数函数、幂函数、对数函数、三角函数和反三角函数等基本初等函数以及它们经过有限次四则运算、复合运算和反函数运算所得的初等函数是高等数学研究的主要对象，对它们的基本性质和图形务必掌握。

4. 极限的概念

(1) 数列极限的定义

如果对 $\varepsilon>0$，存在自然数 N，当 $n>N$ 时有 $|x_n-a|<\varepsilon$，则称数列 $\{x_n\}$ 当 $n\to\infty$ 时以 a 为极限(或称收敛于 a)，记作

$$\lim_{n\to\infty} x_n = a$$

(2) 函数在一点的极限的定义

设函数 $f(x)$ 在 x_0 附近(x_0 本身可除外)有定义，如果对 $\varepsilon>0$，存在 $\delta=\delta(\varepsilon,x_0)>0$，使当 $0<|x-x_0|<\delta$ 时有 $|f(x)-A|<\varepsilon$，则称 $f(x)$ 在 x 趋于 x_0 时以 A 为极限，记作

$$\lim_{x\to x_0} f(x) = A$$

(3) 单侧极限的定义

设函数 $f(x)$ 在 x_0 附近有定义(x_0 本身可除外)，如果对 $\varepsilon>0$，存在 $\delta>0$，使当 $0<x_0-x<\delta(0<x-x_0<\delta)$ 时有 $|f(x)-A|<\varepsilon$，则称 $f(x)$ 在 x_0 处有左(右)极限 A，记作

$$\lim_{x\to x_0-0} f(x) = A\ (\lim_{x\to x_0+0} f(x) = A)$$

$$\lim_{x\to x_0} f(x) = A \Leftrightarrow \lim_{x\to x_0+0} f(x) = A = \lim_{x\to x_0-0} f(x)$$

5. 极限存在准则

夹逼准则和单调有界准则是判定极限存在的常用法则。注意：单调有界只是数列收敛的充分条件而非必要条件，另外，在未判明数列的收敛性之前，不可贸然在迭代公式两端取极限，否则会得出荒谬的结果。如 $x_n=(-1)^n$，则 $x_{n+1}=-x_n$，若两边取极限，则得出 $\lim\limits_{n\to\infty} x_{n+1}=-\lim\limits_{n\to\infty} x_n$，即 $\lim\limits_{n\to\infty} x_n=0$，这显然不可能。

6. 两个重要极根

$$\lim_{x\to 0}\frac{\sin x}{x} = 1,\qquad \lim_{x\to+\infty}\left(1+\frac{1}{x}\right)^x = \mathrm{e}$$

7. 极限的基本性质

极限的唯一性、保序性和四则运算法则要熟悉。

8. 无穷小、无穷大以及无穷小的阶的概念

如果函数 $f(x)$ 当 $x\to x_0$(或 $x\to\infty$)时的极限为零，则称 $f(x)$ 是 $x\to x_0$(或 $x\to\infty$)时的无穷小。

$$\lim_{\substack{x\to x_0\\(x\to\infty)}} f(x) = A \Leftrightarrow f(x) = A+\alpha$$

其中 α 是 $x\to x_0$(或 $x\to\infty$)时的无穷小。

如果对于任意给定的正数 M，总存在正数 δ(或正数 X)，使得对于满足不等式 $0<|x-x_0|<\delta$(或 $|x|>X$)的一切 x 总有 $|f(x)|>M$，则称函数 $f(x)$ 当 $x\to x_0$(或 $x\to\infty$)时为无穷大。

以下设 $g(x)$ 在 $0<|x-x_0|<\delta$ 时不为零，$f(x)$ 和 $g(x)$ 是 $x\to x_0$ 时的无穷小，如果

$$\lim_{x\to x_0}\frac{f(x)}{g(x)} = A\neq 0$$

则称 $f(x)$ 和 $g(x)$ 当 $x\to x_0$ 时为同阶无穷小，特别若 $A=1$，则称 $f(x)$ 和 $g(x)$ 为等价无穷小，

记作 $f(x)\sim g(x)\ (x\to x_0)$。如果 $f(x)$ 与 $[g(x)]^{\alpha}$（α 为正实数）是当 $x\to x_0$ 时的同阶无穷小，则称 $f(x)$ 是关于 $g(x)$ 当 $x\to x_0$ 时的 α 阶无穷小。特别地，如果当 $x\to x_0$ 时，$f(x)$ 是关于 $x\to x_0$ 的 α 阶无穷小，则简称 $f(x)$ 是当 $x\to x_0$ 时的 α 阶无穷小。例如 $\sqrt{x+\sqrt{x}}$ 当 $x\to 0$ 时是 $\frac{1}{4}$ 阶无穷小，$\sin x(1-\cos x)$ 当 $x\to 0$ 时是 3 阶无穷小。

如果

$$\lim_{x\to x_0}\frac{f(x)}{g(x)}=0$$

则称 $f(x)$ 是 $g(x)$ 的高阶无穷小，记作

$$f(x)=o(g(x))\quad (x\to x_0)$$

对 $x\to x_0+0$、$x\to x_0-0$、$x\to\infty$ 等情形也有类似定义。

关于高阶无穷小，有下列运算规律：

设当 $x\to x_0$（或 $x\to\infty$）时，$f(x)$ 和 $g(x)$ 均为无穷小，则有

$$o(f(x))\pm o(f(x))=o(f(x))$$

$$o(f(x))\cdot o(g(x))=o(f(x)g(x))$$

$$o(o(f(x)))=o(f(x))$$

$$\varphi(x)\cdot o(f(x))=o(f(x)),\qquad \text{其中 } \varphi(x) \text{ 有界}$$

特别有（$x\to 0$ 时）

$$o(x^n)\pm o(x^n)=o(x^n)$$

$$o(x^m)\pm o(x^n)=o(x^n)\qquad (m>n>0)$$

$$o(x^m)\cdot o(x^n)=o(x^{m+n})$$

$$x^m\cdot o(x^n)=o(x^{m+n})$$

注意　高阶无穷小只是一种定性的描述，上述等号并不意味着数量上的相等。下面的关系式是不成立的：

$$o(f(x))-o(f(x))=0,\qquad \frac{o(x^m)}{o(x^n)}=o(x^{m-n})\quad (m>n)$$

关于无穷小的阶，有下述运算规律：设当 $x\to x_0$（或 $x\to\infty$）时，$f(x)$ 和 $g(x)$ 分别是 m 阶和 n 阶无穷小，则有

当 $m>n$ 时，$f(x)\pm g(x)$ 为 n 阶无穷小；

当 $m=n$ 时，$f(x)\pm g(x)$ 为不低于 n 阶的无穷小；

$f(x)\cdot g(x)$ 为 $m+n$ 阶无穷小；

当 $m>n$ 时，$f(x)/g(x)$ 为 $m-n$ 阶无穷小。

利用等价无穷小代换求极限是一种常用的有效方法。下面是一些常见的等价无穷小（$x\to 0$）：

$\sin x\sim x$	$\mathrm{tg}x\sim x$	$1-\cos x\sim\frac{1}{2}x^2$	$e^x-1\sim x$
$\ln(1+x)\sim x$	$\arcsin x\sim x$	$\mathrm{arctg}x\sim x$	$(1+x)^{\alpha}-1\sim\alpha x$

9. 函数连续性与间断点的概念

设函数 $f(x)$ 在 x_0 附近有定义，如果 $\lim\limits_{x\to x_0}f(x)=f(x_0)$，则称 $f(x)$ 在 x_0 点连续，若 $f(x)$ 在区间 I 上每点连续，则称 $f(x)$ 在区间 I 上连续。

不连续点或间断点是以否定连续性来定义的，其类型按极限 $\lim\limits_{x\to x_0} f(x)$ 的状况来区分，$f(x)$在 x_0 连续意味着下面三个条件成立：

(1) $\lim\limits_{x\to x_0+0} f(x) = f(x_0+0)$、$\lim\limits_{x\to x_0-0} f(x) = f(x_0-0)$ 存在；

(2) $f(x_0+0)=f(x_0-0)$；

(3) $f(x_0+0)=f(x_0)=f(x-0)$。

若上述(1)式成立而(3)式不成立，则称 x_0 为 $f(x)$的第一类间断点(这又可按(2)式是否成立分为两种情况：若(2)式成立，则称 x_0 为 $f(x)$的可去间断点；若(2)式不成立，则称 x_0 为 $f(x)$的跳跃间断点)。不是第一类间断点的一切间断点，称为第二类间断点，这实质上就是(1)式中至少有一个单侧极限不存在的情形(这包括无穷间断点、振荡间断点等)。

10. **闭区间上连续函数的性质**

最值存在定理　设 $f(x)$在闭区间$[a,b]$上连续，则 $f(x)$在$[a,b]$上达到最小值和最大值。

介值定理　设 $f(x)$在闭区间$[a,b]$上连续，实数 μ 介于 $f(a)$和 $f(b)$之间，则存在 $c\in[a,b]$使 $f(c)=\mu$。特别地，若 $f(a)$和 $f(b)$异号，则 $f(x)$在$[a,b]$上存在零点。

三、典型例题

例 1　设 $f(x)=\dfrac{x}{\sqrt{1+x^2}}$，求 $f_n(x)=\underbrace{f(f\cdots(f(x)))}_{n\text{次复合}}$，并讨论 $f_n(x)$的奇偶性、单调性和有界性。

解　设 $f_1(x)=f(x)$，则

$$f_2(x)=f(f_1(x))=\frac{f_1(x)}{\sqrt{1+[f_1(x)]^2}}=\frac{\dfrac{x}{\sqrt{1+x^2}}}{\sqrt{1+\left(\dfrac{x}{\sqrt{1+x^2}}\right)^2}}=\frac{x}{\sqrt{1+2x^2}}$$

$$f_3(x)=f(f_2(x))=\frac{f_2(x)}{\sqrt{1+(f_2(x))^2}}=\frac{x}{\sqrt{1+3x^2}}$$

设 $f_k(x)=\dfrac{x}{\sqrt{1+kx^2}}$，则

$$f_{k+1}(x)=f(f_k(x))=\frac{f_k(x)}{\sqrt{1+[f_k(x)]^2}}=\frac{\dfrac{x}{\sqrt{1+kx^2}}}{\sqrt{1+\left(\dfrac{x}{\sqrt{1+kx^2}}\right)^2}}=\frac{x}{\sqrt{1+(k+1)x^2}}$$

由数学归纳法知：

$$f_n(x)=\frac{x}{\sqrt{1+nx^2}},\qquad n=1,2,3\cdots$$

显然 $f_n(-x)=-f_n(x)$，即 $f_n(x)$为奇函数。又不难求出 $f_n'(x)=\dfrac{1}{(1+nx^2)^{\frac{3}{2}}}>0$，故$f_n(x)$严格单调增加。由于显然有 $|f_n(x)|=\dfrac{|x|}{\sqrt{1+nx^2}}<1$，故 $f_n(x)$有界。

例 2　设 $f(x)=\begin{cases}1, & |x|\leqslant 1\\ 0, & |x|>1\end{cases}$，$g(x)=\begin{cases}2-x^2, & |x|\leqslant 2\\ 2\ , & |x|>2\end{cases}$，求 $f[g(x)]$、$g[f(x)]$、$g[g(x)]$。

解　(1)

$$f[g(x)]=\begin{cases}1, & |g(x)|\leqslant 1\\ 0, & |g(x)|>1\end{cases}$$

现需求出使$|g(x)|\leqslant 1$(或$|g(x)|>1$)的x的范围。

由于$|x|>2$时，$g(x)=2>1$，故仅当$|x|\leqslant 2$时，才可能有$|g(x)|\leqslant 1$。而欲使$|g(x)|\leqslant 1$，必须且只需

$$|x|\leqslant 2,\quad |2-x^2|\leqslant 1$$

由此可得$1\leqslant|x|\leqslant\sqrt{3}$。于是有

$$f[g(x)]=\begin{cases}1, & 1\leqslant|x|\leqslant\sqrt{3}\\ 0, & |x|<1\ \text{或}\ |x|>\sqrt{3}\end{cases}$$

(2)

$$g[f(x)]=\begin{cases}2-[f(x)]^2, & |f(x)|\leqslant 2\\ 2, & |f(x)|>2\end{cases}$$

由$f(x)$的定义知，对任意x有$|f(x)|\leqslant 1<2$，故有

$$g[f(x)]=2-[f(x)]^2=\begin{cases}2-1^2, & |x|\leqslant 1\\ 2-0, & |x|>1\end{cases}$$

即

$$g[f(x)]=\begin{cases}1, & |x|\leqslant 1\\ 2, & |x|>1\end{cases}$$

(3) 由于对任意x有$|g(x)|\leqslant 2$，故有

$$g[g(x)]=2-[g(x)]^2=\begin{cases}2-(2-x^2)^2, & |x|\leqslant 2\\ 2-2^2, & |x|>2\end{cases}$$

即

$$g[g(x)]=\begin{cases}-x^4+4x^2-2, & |x|\leqslant 2\\ -2, & |x|>2\end{cases}$$

注　也可借助$f(x)$和$g(x)$的几何图像，求出各个复合函数。

例3　证明$\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{a^n}{n!}=0\quad(a>0)$。

证1　若$a<1$，显然有$\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{a^n}{n!}=0$。若$a>1$，则

$$0<\frac{a^n}{n!}=\frac{a}{1}\cdot\frac{a}{2}\cdots\frac{a}{[a]}\cdot\frac{a}{[a]+1}\cdots\frac{a}{n}<a^{[a]}\cdot\frac{a}{n}$$

其中后一不等式成立是因为去掉了$\dfrac{a}{[a]+1},\cdots,\dfrac{a}{n-1}$这些小于1的项。

因为$\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{a}{n}=0$，所以$\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{a^n}{n!}=0$。

证2　设$x_n=\dfrac{a^n}{n!}$

因为

$$\frac{x_{n+1}}{x_n}=\frac{a^{n+1}}{(n+1)!}\cdot\frac{n!}{a^n}=\frac{a}{n+1}\to 0\quad(n\to\infty)$$

故存在自然数N，使当$n>N$时，$\dfrac{x_{n+1}}{x_n}<1$

即

$$x_{n+1} < x_n \quad (n > N)$$

$\{x_n\}$递减且有下界 0，因此 $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = x$ 存在。为确定其极限，在 $x_{n+1} = x_n \dfrac{a}{n+1}$两端取极限，得：

$$x = x \cdot 0 = 0$$

例 4　求 $\lim\limits_{n\to\infty}\left(\dfrac{1}{\sqrt{n^2+1}} + \dfrac{1}{\sqrt{n^2+2}} + \cdots + \dfrac{1}{\sqrt{(n+1)^2}}\right)$。

解　该表达式共有 $2n+1$ 项($(n+1)^2 = n^2+2n+1$)，每项都介于$\dfrac{1}{\sqrt{n^2+1}}$与$\dfrac{1}{\sqrt{(n+1)^2}}$之间，于是有

$$\frac{2n+1}{n+1} = \frac{2n+1}{\sqrt{(n+1)^2}} < \frac{1}{\sqrt{n^2+1}} + \frac{1}{\sqrt{n^2+2}} + \cdots + \frac{1}{\sqrt{(n+1)^2}} < \frac{2n+1}{\sqrt{n^2+1}} < \frac{2n+1}{n}$$

由于

$$\lim_{n\to\infty} \frac{2n+1}{n+1} = \lim_{n\to\infty} \frac{2n+1}{n} = 2$$

由“夹逼”定理知

$$\lim_{n\to\infty}\left(\frac{1}{\sqrt{n^2+1}} + \frac{1}{\sqrt{n^2+2}} + \cdots + \frac{1}{\sqrt{(n+1)^2}}\right) = 2$$

例 5　求 $\lim\limits_{n\to\infty} \sum\limits_{k=1}^{n^2} \dfrac{n}{n^2+k^2}$。

解　因为对 $k=1,2,\cdots,n^2$　有

$$\int_{\frac{k}{n}}^{\frac{k+1}{n}} \frac{1}{x^2+1}\,dx < \frac{1}{n} \cdot \frac{1}{1+\left(\dfrac{k}{n}\right)^2} = \frac{n}{n^2+k^2} < \int_{\frac{k-1}{n}}^{\frac{k}{n}} \frac{1}{1+x^2}\,dx$$

将 n^2 个不等式相加，得

$$\int_{\frac{1}{n}}^{\frac{n^2+1}{n}} \frac{1}{1+x^2}\,dx < \sum_{k=1}^{n^2} \frac{n}{n^2+k^2} < \int_0^{\frac{n^2}{n}} \frac{1}{1+x^2}\,dx$$

因为

$$\lim_{n\to\infty} \int_{\frac{1}{n}}^{\frac{n^2+1}{n}} \frac{1}{1+x^2}\,dx = \lim_{n\to\infty} \int_0^n \frac{1}{1+x^2}\,dx = \int_0^{+\infty} \frac{1}{1+x^2}\,dx = \frac{\pi}{2}$$

由“夹逼”定理知：

$$\lim_{n\to\infty} \sum_{k=1}^{n^2} \frac{n}{n^2+k^2} = \frac{\pi}{2}$$

例 6　设 $a>0$，$x_0>0$，$x_{n+1} = \dfrac{1}{3}\left(2x_n + \dfrac{a}{x_n^2}\right)$，$n=0,1,2,\cdots$，证明$\{x_n\}$收敛，并求其极限。

证　因为

$$x_{n+1} = \frac{1}{3}\left(x_n + x_n + \frac{a}{x_n^2}\right) \geqslant \sqrt[3]{x_n \cdot x_n \cdot \frac{a}{x_n^2}} = \sqrt[3]{a}, \quad n = 1,2,\cdots$$

所以 $\{x_n\}$有下界。

又

$$x_{n+1}-x_n=\frac{1}{3}\left(2x_n+\frac{a}{x_n^2}\right)-x_n=\frac{1}{3}\left(\frac{a}{x_n^2}-x_n\right)=\frac{a-x_n^3}{3x_n^2}\leqslant 0 \qquad n=1,2,\cdots$$

于是有

$$x_{n+1}\leqslant x_n \qquad n=1,2,\cdots$$

即$\{x_n\}$递减。

因此$\lim\limits_{n\to\infty} x_n=l$存在且$l\geqslant\sqrt[3]{a}>0$。

对$x_{n+1}=\frac{1}{3}\left(2x_n+\frac{a}{x_n^2}\right)$两端同取极限得

$$l=\frac{1}{3}\left(2l+\frac{a}{l^2}\right)$$

解得

$$l=\sqrt[3]{a}$$

例 7　设$x_0=a$，$x_1=b$，$x_{n+1}=\frac{1}{2}(x_{n-1}+x_n)$，$n=1,2,\cdots$，证明$\{x_n\}$收敛，并求其极限。

证　因为

$$x_2-x_1=\frac{1}{2}(x_0+x_1)-x_1=\frac{1}{2}(x_0-x_1)=-\frac{1}{2}(x_1-x_0)$$

$$x_3-x_2=\frac{1}{2}(x_1+x_2)-x_1=\frac{1}{2}(x_1-x_2)=\frac{1}{2^2}(x_1-x_0)$$

$$\cdots\cdots$$

$$x_{n+1}-x_n=\frac{1}{2}(x_{n-1}+x_n)-x_n=\frac{1}{2}(x_{n-1}-x_n)=\frac{(-1)^n}{2^n}(x_1-x_0)$$

相加得

$$\begin{aligned}x_{n+1}-x_1&=-\frac{1}{2}(x_1-x_0)\left(1-\frac{1}{2}+\frac{1}{2^2}+\cdots+\frac{(-1)^{n-1}}{2^{n-1}}\right)\\&=\frac{-\frac{1}{2}(x_1-x_0)\left[1-\left(-\frac{1}{2}\right)^n\right]}{1-\left(-\frac{1}{2}\right)}\\&=\frac{x_1-x_0}{3}\left[\frac{(-1)^n}{2^n}-1\right]\end{aligned}$$

于是有

$$x_{n+1}=\frac{(-1)^n}{2^n}\cdot\frac{x_1-x_0}{3}+\frac{2x_1+x_0}{3}=\frac{(-1)^n}{2^n}\cdot\frac{b-a}{3}+\frac{2b+a}{3}$$

因此

$$\lim_{n\to\infty} x_{n+1}=\frac{a+2b}{3}$$

例 8　求$\lim\limits_{n\to\infty}\frac{2^n n!}{n^n}$。

解　考虑级数$\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{2^n n!}{n^n}$，因为

$$0<\frac{2^{n+1}(n+1)!}{(n+1)^{n+1}}\cdot\frac{n^n}{2^n n!}=\frac{2n^n}{(n+1)^n}=\frac{2}{\left(1+\frac{1}{n}\right)^n}\to\frac{2}{\mathrm{e}}<1 \quad (n\to\infty)$$

由比值判别法知 $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{2^n n!}{n^n}$ 收敛，故 $\lim_{n\to\infty}\frac{2^n n!}{n^n}=0$。

例 9 求 (1) $\lim_{n\to\infty}\left(\frac{n^2-1}{n^2+1}\right)^{n^2}$； (2) $\lim_{x\to 0}(\sin x+\cos x)^{\frac{1}{x}}$。

解 (1)

$$\lim_{n\to\infty}\left(\frac{n^2-1}{n^2+1}\right)^{n^2}=\lim_{n\to\infty}\left(1+\frac{-2}{n^2+1}\right)^{n^2}$$

$$=\lim_{n\to\infty}\left[\left(1+\frac{-2}{n^2+1}\right)^{-\frac{n^2+1}{2}}\right]^{\frac{-2n^2}{n^2+1}}=e^{-2}$$

(2)

$$\lim_{x\to 0}(\sin x+\cos x)^{\frac{1}{x}}=\lim_{x\to 0}\left[(\sin x+\cos x)^2\right]^{\frac{1}{2x}}$$

$$=\lim_{x\to 0}(1+\sin 2x)^{\frac{1}{2x}}$$

$$=\lim_{x\to 0}\left[(1+\sin 2x)^{\frac{1}{\sin 2x}}\right]^{\frac{\sin 2x}{2x}}=e$$

例 10 求 $\lim_{x\to 0}\frac{\mathrm{tg}x-\sin x}{x^3}$。

解 原式 $=\lim_{x\to 0}\frac{\sin x(1-\cos x)}{x^3\cos x}=\lim_{x\to 0}\left(\frac{\sin x}{x}\cdot\frac{1-\cos x}{\frac{1}{2}x^2}\cdot\frac{1}{2\cos x}\right)=\frac{1}{2}$

注 这里用到等价无穷小代换：

$$\sin x\sim x,\ 1-\cos x\sim\frac{1}{2}x^2$$

当 $x\to 0$ 时，计算乘积或商的极限时，这种代换可以带来很大方便。但在求极限时，加减项不可单独作等量代换，例如上题不可这样计算：

$$\lim_{x\to 0}\frac{\mathrm{tg}x-\sin x}{x^3}=\lim_{x\to 0}\frac{x-x}{x^3}=0$$

例 11 设 $f(x)=\int_0^{\sin x}\sin t^2\,dt$，$g(x)=x^3+x^4$，则当 $x\to 0$ 时，$f(x)$ 是 $g(x)$ 的(　　)。

(*A*) 等价无穷小；　　(*B*) 低阶无穷小；

(*C*) 同阶但非等价的无穷小；　　(*D*) 高阶无穷小。

解

$$\lim_{x\to 0}\frac{\int_0^{\sin x}\sin t^2\,dt}{x^3+x^4}=\lim_{x\to 0}\frac{\cos x\cdot\sin(\sin^2 x)}{3x^2+4x^3}$$

$$=\lim_{x\to 0}\cos x\cdot\lim_{x\to 0}\frac{\sin(\sin^2 x)}{3x^2+4x^3}$$

$$=\lim_{x\to 0}\frac{\sin 2x\cdot\cos(\sin^2 x)}{6x+12x^2}$$

$$=\lim_{x\to 0}\cos(\sin^2 x)\cdot\lim_{x\to 0}\frac{\sin 2x}{6x+12x^2}$$

$$=\lim_{x\to 0}\frac{2\cos 2x}{6+24x}=\frac{1}{3}$$

故应选(*C*)。

例 12 设 $f(x)$ 二次可微，$f(0)=0$，$f'(0)=1$，$f''(0)=2$。证明当 $x\to 0$ 时，$f(x)-x$ 与 x^2 是等价无穷小。