结构力学习题指导

（下册）

阳　日　郑瞳灼　韦树英
蒙承军　　　　　梁　琨　合编

中国建筑工业出版社

结构力学习题指导

（下　册）

阳　日　郑瞳灼　韦树英
蒙承军　梁　琨　合编

中国建筑工业出版社

本书主要介绍结构力学的解题方法及其有关理论概要。全书内容根据高等学校结构力学多学时教学大纲，并考虑工程实际应用的需要进行编写。每章均包括理论要点、例题示范及习题三个部分，以例题示范为主；例题及习题大部分属于中等难度的题目，个别题目难度较高，部分习题附有答案。

全书分上下两册。本书为下册，包括：结构矩阵分析、梁和刚架的塑性分析、结构稳定计算，结构的自由振动分析，以及结构的动力反应分析共五章，各章中包括有各种分析方法的例题。上册包括静定结构、超静定结构、影响线和能量法。

本书可供土建、机械专业大专院校师生及一般工程技术人员参考。

结构力学习题指导

（下 册）

阳 日 郑瞳炽 韦树英 蒙承军 梁 琨 合编

中国建筑工业出版社出版（北京西郊百万庄）
新华书店北京发行所发行 各地新华书店经售
中国建筑工业出版社印刷厂印刷（北京阜外南礼士路）

开本：787×1092毫米 1/16 印张：32 字数：774千字
1988年9月第一版 1988年9月第一次印刷
印数：1—10,300册 定价：9.00元
ISBN7—112—00141—2/TU·94

统一书号：15040·5453

目　录

第十章　结构矩阵分析

一、理论概述和解题方法

§1　基本概念

1.单元和结点

整个结构可以假想地分割成有限个单元的集合体。而对于杆件体系而言。每一根直杆都可以划分为一个或几个单元。

单元与单元相连接的点称为结点，并且，单元与单元之间只有结点相连。

杆件的汇交点、转折点、支承点和截面的突变点是结点，这些结点是按照结构的构造特征来确定的，称为构造结点。

外荷载必须作用在结点上，不允许作用在单元上。当结点之间有荷载作用时，通常应把荷载加以处理，或者把力的作用点当作结点（集中力作用点）。这种结点称为非构造结点；或者按等效荷载的原则，用结点荷载来代替作用在单元上的荷载。总之要保证外荷载必须作用在结点上而不能作用在单元上。

对于杆件系统而言，由于单元受力情况不同，可区别为轴力单元、梁单元和弯扭单元。

轴力单元是以轴力为主的单元，如桁架杆件。

梁单元除作用轴力外还有剪力和弯矩作用并以弯曲变形为主的单元。如梁、平面刚架中的杆件等。

弯扭单元除弯矩剪力作用外还有扭矩作用，如空间刚架中的杆件。

2.单元内力

对杆系而言，每一单元都是一根直杆，直杆两端的内力称为单元的杆端力，只要求出杆端力，则可求出单元任一截面上的内力来。所以，杆端力是单元内力的代表。

建立一个坐标系统来描述单元内力，设单元的编号为 i，左端结点的编号为 j，右端为 k。

坐标轴以 j 为原点，杆轴与 x 轴重合。截面的两个主轴与 y z 轴重合，这样的坐标系与单元完全联系在一起，称为单元坐标，对平面结构而言，图（10-1）所示的内力方向均为正。

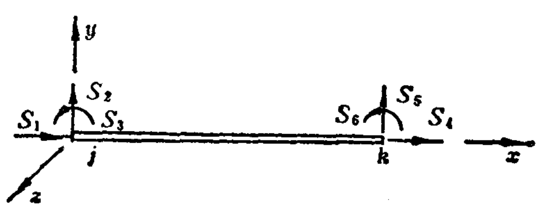

图 10-1

把杆端力统一编号为 $S_1S_2\cdots S_6$。即把 j 端沿 x 方向的力编为 S_1，沿 y 方向的力编为 S_2，弯矩编为 S_3，k 端相应地编为 S_4、S_5、S_6，所以单元 i 的杆端力用列向量来表示：

$$S^{(i)}=\{\ S_1\ S_2\ S_3\ S_4\ S_5\ S_6\ \} \tag{10-1}$$

要注意内力与杆端力的区别，内力通常是指弯矩、剪力和轴力。它们的方向是有规定的。譬如，剪力的方向一定垂直于杆轴线，轴力一定沿轴线方向。一般情况下，杆端力总是与假定的坐标轴的方向一致，当坐标轴方向与杆轴线方向不一致时，杆端力就与内力不同。对于单元坐标，杆端力就与内力完全一致，所以对于单元坐标也可写成

$$S^{(i)}=\{\ N_j\ Q_j\ M_j\ N_k\ Q_k\ M_k\ \}$$

3.单元变形

结构在荷载作用下单元发生变形，单元的两端就产生位移，称为杆端位移，杆端位移与单元变形是联系在一起的，我们用杆端位移来表示单元变形。

单元 i 的杆端位移可表示为

$$u^{(i)}=\{u_1\ u_2\ u_3\ u_4\ u_5\ u_6\} \tag{10-2}$$

有时候，当单元在平面上作刚体运动时，杆端位移就与变形无关，也不引起杆的内力。所以，有时候，杆端位移还包含了不引起内力的刚体位移成份。

4.单元杆端力与杆端位移之间的关系——单元柔度矩阵和单元刚度矩阵。

设一弹性直杆，杆端受轴力S作用，直杆在轴力S作用下产生伸长变形δ，则轴力与伸长之间存在关系

$$S=K\delta$$

其中K就称为杆的抗拉刚度系数，就是使杆产生单位伸长所需的力。

若一直杆单元，当杆端不仅有轴力作用而且还有其它杆端力作用，则杆端力与杆端位移的关系就不能简单地用一个刚度系数来表示，而要用一个矩阵K来表示。这就是单元刚度矩阵

$$S^{(i)}=K^{(i)}u^{(i)} \tag{10-3}$$

单元刚度矩阵$K^{(i)}$中的元素称为单元刚度系数。单元刚度系数表示了当某一个位移分量为一单位时（其它位移分量为零）所引起的相应的杆端力。

相应地，杆端力与杆端位移也存在如下的关系：

$$u^{(i)}=f^{(i)}S^{(i)} \tag{10-4}$$

其中$f^{(i)}$称为单元柔度矩阵，单元柔度矩阵中的每一个元素都称为单元的柔度系数。单元柔度系数表示了当单元的某一个杆端力为一单位时（其它的杆端力为零）引起的相应的杆端位移。

假定K和f都存在逆矩阵K^{-1}和f^{-1}，则很容易证明

$$f^{-1}=K,\quad K^{-1}=f$$

即单元刚度矩阵与单元柔度矩阵互为逆矩阵。

对于平面杆受弯杆系，一般情况下，每一单元两端共有六个杆端力和六个杆端位移、内力与位移之间存在着一定的关系。实际上，六个内力也不都是独立的，它们必需满足三个平衡方程式。因此，只有三个内力是独立的。这三个独立的内力可作为计算对象。取不同的内力作为计算的对象，这就构成不同类型的单元。

1）自由式单元

把所有的杆端力都作为计算对象计算。对单元不考虑任何约束，即相当于单元可以在平面内任意运动而不受任何约束。这样的单元称为自由式单元。公式（10-3）表示的自由

式单元刚度矩阵将是一个6×6阶的方阵，单元刚度矩阵的建立，对于杆件系统而言，并不困难，即分别给予杆端单位位移，由结构力学公式就可直接求出杆端各相应的杆端力。

图10-2所示为分别产生六种不同的杆端单位位移时产生的杆端力。这些杆端力就构成了自由式单元刚度矩阵中的各元素。

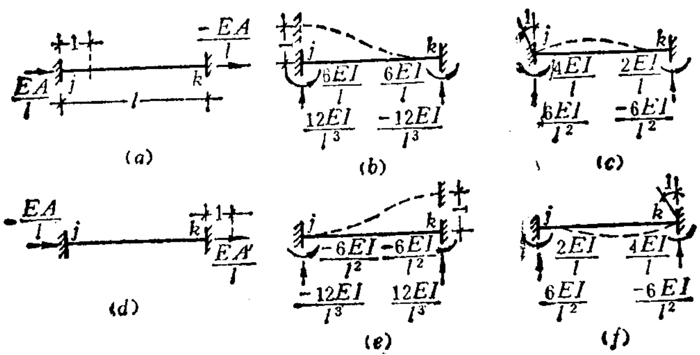

图 10-2

$$
\begin{array}{c}
\begin{array}{cccccc}
u_1=1 & u_2=1 & u_3=1 & u_4=1 & u_5=1 & u_6=1
\end{array}\\
\begin{Bmatrix} S_1\\ S_2\\ S_3\\ S_4\\ S_5\\ S_6 \end{Bmatrix}
=
\begin{bmatrix}
\frac{EA}{l} & 0 & 0 & -\frac{EA}{l} & 0 & 0\\
0 & \frac{12EI}{l^3} & \frac{6EI}{l^2} & 0 & \frac{-12EI}{l^3} & \frac{6EI}{l^2}\\
0 & \frac{6EI}{l^2} & \frac{4EI}{l} & 0 & \frac{-6EI}{l^2} & \frac{2EI}{l}\\
-\frac{EA}{l} & 0 & 0 & \frac{EA}{l} & 0 & 0\\
0 & \frac{-12EI}{l^3} & \frac{-6EI}{l^2} & 0 & \frac{12EI}{l^3} & \frac{-6EI}{l^2}\\
0 & \frac{6EI}{l^2} & \frac{2EI}{l} & 0 & \frac{-6EI}{l^2} & \frac{4EI}{l}
\end{bmatrix}
\begin{Bmatrix} u_1\\ u_2\\ u_3\\ u_4\\ u_5\\ u_6 \end{Bmatrix}
\end{array}
\tag{10-5}
$$

即
$$S^{(i)} = K^{(i)} u^{(i)}$$

矩阵中任一元素k_{ij}的物理意义是，第j号位移为一单位时引起的第i号杆端力

矩阵中的第 j 列元素表示当第 j 号位移为一单位时各杆端力的数值。例如，图（b）表示第 2 号位移为一单位时引起各杆端力的数值；该数值按顺序列入单元刚度矩阵中的第 2 列。

矩阵中第 i 行元素表示，当各项位移均为一单位时引起的第 i 项杆端力的数值。

由反力互等定理可知$k_{ij} = k_{ji}$，可见单元刚度矩阵是一个对称阵。

自由式单元的单元刚度矩阵是奇异矩阵(很容易看出，该刚度矩阵的行列式为零)，无逆矩阵，故自由式单元不存在柔度矩阵。其物理意义是，若已知自由式单元的六个杆端力是无法求出杆端位移的，因为自由式单元无约束，杆端位移中包括了任意的刚体位移。

对于一端固定另一端铰支的情况，由于铰支端不存在弯矩，其自由式单元两端的杆端

力如图10-3(b)所示；其自由式单元刚度矩阵则为：

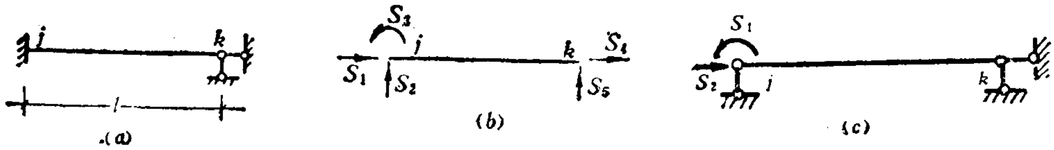

图 10-3

$$
\mathbf{K}=\left[\begin{array}{ccc:cc}
\frac{EA}{l} & 0 & 0 & \frac{-EA}{l} & 0 \\
0 & \frac{3EI}{l^3} & \frac{3EI}{l^2} & 0 & \frac{-3EI}{l^3} \\
0 & \frac{3EI}{l^2} & \frac{3EI}{l} & 0 & \frac{-3EI}{l^2} \\
\hdashline
\frac{-EA}{l} & 0 & 0 & \frac{EA}{l} & 0 \\
0 & \frac{-3EI}{l^3} & \frac{3EI}{l^2} & 0 & \frac{3EI}{l^3}
\end{array}\right] \tag{10-6}
$$

这个矩阵对应的是左端为固定端（三个杆端力）右端为铰支（二个杆端力）的情况。如果反过来，左端为铰支，右端为固定端，则单元刚度矩阵的行和列需要作相应的调整。

2）简支梁式单元

如果对单元两端的位移施加适当的约束，如图10-4所示，这里只把两端的弯矩和一端的轴力作为计算的对象，由于引进了约束，从而取消了单元的刚体位移，在自由式单元刚度矩阵中划去u_1、u_2和u_5所对应的行和列，并把剩下的元素重新排列为

$$
\begin{Bmatrix} S_1 \\ S_2 \\ S_3 \end{Bmatrix}=\begin{bmatrix} \frac{EA}{l} & 0 & 0 \\ 0 & \frac{4EI}{l} & \frac{2EI}{l} \\ 0 & \frac{2EI}{l} & \frac{4EI}{l} \end{bmatrix}\begin{Bmatrix} u_1 \\ u_2 \\ u_3 \end{Bmatrix} \tag{10-7}
$$

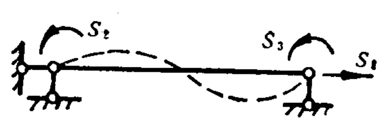

图 10-4

这类单元没有刚体位移，所以杆端位移和杆端力之间存在确定的互逆关系。即已知杆端位移可以求杆端力（建立刚度矩阵），反之，若已知杆端力也可以求杆端位移，即存在柔度矩阵f，并且$f=\mathbf{K}^{-1}$，所以

$$
f^{(e)}=\begin{bmatrix} \frac{l}{EA} & 0 & 0 \\ 0 & \frac{l}{3EI} & -\frac{l}{6EI} \\ 0 & -\frac{l}{6EI} & \frac{l}{3EI} \end{bmatrix} \tag{10-8}
$$

有时可忽略掉轴向变形对位移的影响。这时，简支梁式单元的单元刚度矩阵和单元柔度矩阵可写成

$$K^{(e)}=\begin{bmatrix}\frac{4EI}{l} & \frac{2EI}{l}\\ \frac{2EI}{l} & \frac{4EI}{l}\end{bmatrix} \tag{10-9}$$

$$f^{(e)}=\begin{bmatrix}\frac{l}{3EI} & -\frac{l}{6EI}\\ -\frac{l}{6EI} & \frac{l}{3EI}\end{bmatrix} \tag{10-10}$$

对于一端固定，另一端铰支的单元，其简支梁式单元如图10-3c所示，其单元刚度矩阵为

$$K=\begin{bmatrix}\frac{3EI}{l} & 0\\ 0 & \frac{EA}{l}\end{bmatrix} \tag{10-11}$$

如果不考虑轴力，则

$$K=\left[\frac{3EI}{l}\right] \tag{10-12}$$

相应的柔度矩阵为

$$f=\begin{bmatrix}\frac{l}{3EI} & 0\\ 0 & \frac{l}{EA}\end{bmatrix} \tag{10-13}$$

和

$$f=\left[\frac{l}{3EI}\right] \tag{10-14}$$

3）悬臂梁式单元

取消单元一端的所有位移，使单元成为一个悬臂梁，用另一端的三个杆端力作为计算对象。由于u_1、u_2、u_3均为零，故从自由式单元刚度矩阵中划去1～3行和1～3列，并重新编号排列便得悬臂梁式单元刚度矩阵为

$$K^{(e)}=\begin{bmatrix}\frac{EA}{l} & 0 & 0\\ 0 & \frac{12EI}{l^3} & \frac{-6EI}{l^2}\\ 0 & \frac{-6EI}{l^2} & \frac{4EI}{l}\end{bmatrix} \tag{10-15}$$

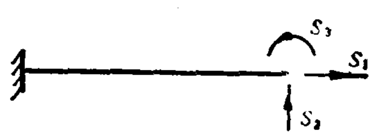

图 10-5

柔度矩阵为

$$f^{(e)}=\begin{bmatrix}\frac{l}{EA} & 0 & 0\\ 0 & \frac{l^3}{3EI} & \frac{l^2}{2EI}\\ 0 & \frac{l^2}{2EI} & \frac{l}{EI}\end{bmatrix} \tag{10-16}$$

忽略轴向变形后悬臂梁式单元的刚度矩阵和柔度矩阵为

$$K^{(i)}=\begin{bmatrix}\frac{12EI}{l^3} & -\frac{6EI}{l^2}\\ -\frac{6EI}{l^2} & \frac{4EI}{l}\end{bmatrix} \tag{10-17}$$

$$f^{(i)}=\begin{bmatrix}\frac{l^3}{3EI} & \frac{l^2}{2EI}\\ \frac{l^2}{2EI} & \frac{l}{EI}\end{bmatrix} \tag{10-18}$$

4）轴力单元

单元中的杆端力只有轴力，桁架中的杆件都是轴力单元。

桁架中的结点位移只有线位移，与此对应，每一杆端的杆端位移也只有两个分量u_1、u_2。所以，轴力单元的单元刚度矩阵可表示为：

$$\begin{Bmatrix}S_1\\S_2\\S_3\\S_4\end{Bmatrix}=\begin{bmatrix}\frac{EA}{l} & 0 & -\frac{EA}{l} & 0\\ 0 & 0 & 0 & 0\\ -\frac{EA}{l} & 0 & \frac{EA}{l} & 0\\ 0 & 0 & 0 & 0\end{bmatrix}\begin{Bmatrix}u_1\\u_2\\u_3\\u_4\end{Bmatrix} \tag{10-19}$$

这是轴力单元的自由式单元刚度矩阵，如果考虑其中一端有约束，则单元刚度矩阵变成

$$K^{(i)}=\left[\frac{EA}{l}\right] \tag{10-20}$$

相应的柔度矩阵为

$$f^{(i)}=\left[\frac{l}{EA}\right] \tag{10-21}$$

5.结构柔度矩阵和结构刚度矩阵

1）结构的柔度矩阵

设一结构，作用着外力P_1、P_2、P_3（广义力）。现要求结构上P_1、P_2、P_3的作用点，沿力的作用线方向的位移（载向位移）U_1、U_2、U_3。

由叠加原理

$$U_1=f_{11}P_1+f_{12}P_2+f_{13}P_3$$
$$U_2=f_{21}P_1+f_{22}P_2+f_{23}P_3$$
$$U_3=f_{31}P_1+f_{32}P_2+f_{33}P_3$$

其中系数f_{ij}的物理意义如图10-6所示。

把上式表示成矩阵形式

$$\begin{Bmatrix}U_1\\U_2\\U_3\end{Bmatrix}=\begin{bmatrix}f_{11} & f_{12} & f_{13}\\ f_{21} & f_{22} & f_{23}\\ f_{31} & f_{32} & f_{33}\end{bmatrix}\begin{Bmatrix}P_1\\P_2\\P_3\end{Bmatrix}$$

或写成

$$U=fP \tag{10-22}$$

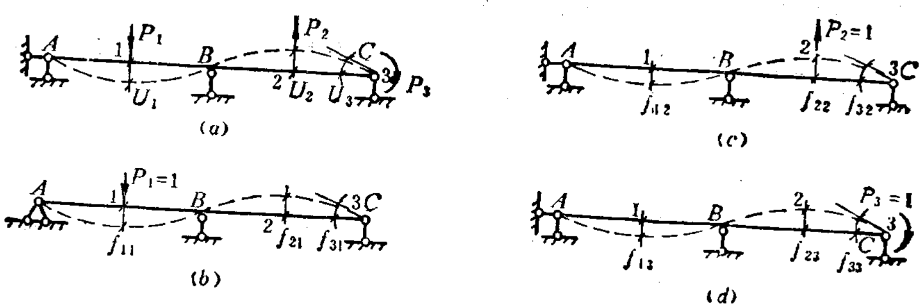

图 10-6

其中f称为结构的柔度矩阵。f_{ij}称为柔度影响系数。求结构柔度矩阵的元素，实际上就是求结构的荷载作用点沿荷载作用方向的位移。

2 ）结构的刚度矩阵

如果用位移表示作用力，则位移与作用力之间的关系为

$$P_1 = K_{11}U_1 + K_{12}U_2 + K_{13}U_3$$
$$P_2 = K_{21}U_1 + K_{22}U_2 + K_{23}U_3$$
$$P_3 = K_{31}U_1 + K_{32}U_2 + K_{33}U_3$$

在P_1、P_2、P_3的作用点假想地加上相应的约束。K_{ij}的意义是当j支座产生单位位移时引起的 i 支座的反力（图10-7）。当支座的位移与实际情况相符时，支座 j 的反力的合力将等于P_j。上式用矩阵形式表示为：

$$\begin{Bmatrix} P_1 \\ P_2 \\ P_3 \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} K_{11} & K_{12} & K_{13} \\ K_{21} & K_{22} & K_{23} \\ K_{31} & K_{32} & K_{33} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} U_1 \\ U_2 \\ U_3 \end{Bmatrix}$$

或

$$\boldsymbol{P} = \boldsymbol{K}\boldsymbol{U} \qquad (10\text{-}23)$$

其中$\boldsymbol{K}$称为结构的刚度矩阵，K_{ij}称为刚度影响系数。

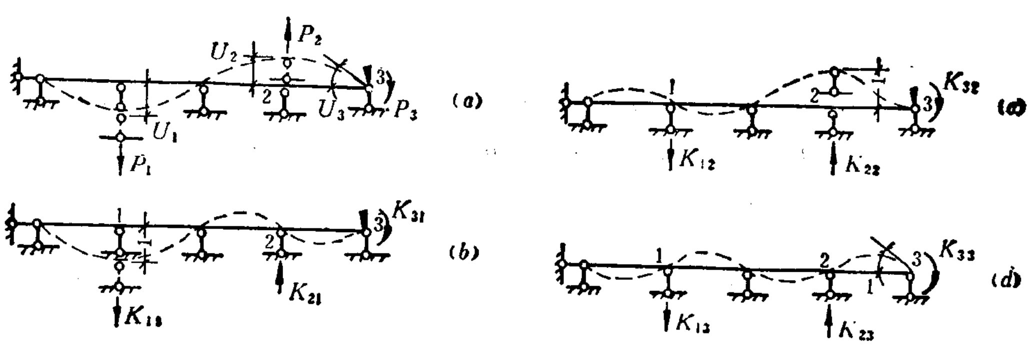

图 10-7

如果刚度矩阵存在逆矩阵$\boldsymbol{K}^{-1}$，在公式（10-23）两边乘以$\boldsymbol{K}^{-1}$，便可看出

$$\boldsymbol{f} = \boldsymbol{K}^{-1} \qquad (10\text{-}24)$$

同理

$$\boldsymbol{K} = \boldsymbol{f}^{-1} \qquad (10\text{-}25)$$

亦即结构刚度矩阵与结构柔度矩阵之间存在着互逆关系。但必须指出，这种互逆关系必定

建立在力与位移之间一一对应的条件下，换言之，U必须是荷载的载向位移。

3 ）结构柔度矩阵和结构刚度矩阵的一些特性

根据位移互等定理和反力互等定理可以看出，柔度矩阵和刚度矩阵都是对称矩阵。

主对角线上的元素f_{ii}是$P_i=1$时引起的P_i作用点沿P_i方向的位移。位移的方向必定与力的方向一致。所以，f_{ii}必定为正值。同理K_{ii}亦一定为正值。

6.超静定与超动定的概念

超静定结构：若结构的内力和反力不能由静力平衡方程式唯一地全部确定时，这样的结构就叫做超静定结构。这通常是因为结构的未知力的数目多于独立的平衡方程式的数目；结构存在多余未知力，这些多余未知力的数目就是结构的超静定次数。

超动定结构：结构在荷载或其它因素作用下，每个结点都会产生位移。在某些情况下，结构可能受到强制约束条件而使某些结点位移成为已知。如果结构的全部结点的位移均为已知的结构称为动定结构；反之，如果存在着未知的结点位移就是超动定结构。未知的独立位移的数目就是超动定次数，即结点自由度的数目。

图10-8给出了几种结构的超动定次数的例子。

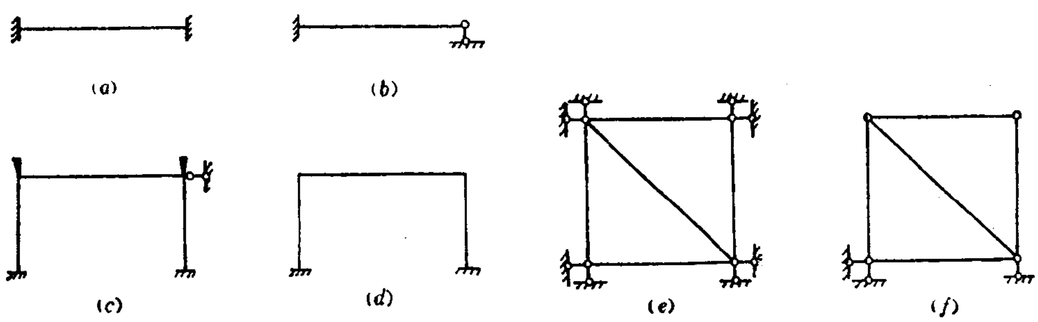

图 10-8

其中，图 a 为动定结构。图 b 为二次超动定结构。如果忽略轴力对变形的影响，则为一次超动定的。图 c 是动定结构，如果忽略轴力对变形的影响的话。而图 d 所示结构则为三次超动定。如果不忽略轴向变形的话则为六次超动定。图 e 所示桁架是动定的，而图 f 所示桁架则为五次超动定。

实际工程中，多数结构既可视为超动定结构，也可以同时视为超静定结构（如图 b 、d ）。这样的结构既可用位移法求解，也可以用力法求解。但有些结构是动定结构，却又可视为超静定结构（如图 a ）这样的结构不能用位移法求解，因为它没有未知位移，但却可以用力法求解。反之，有些结构（如图 f ）是静定结构，却又可视为超动定结构。这样的结构没有多余未知力，不能用力法求解，但却可以用位移法求解（尽管这样做是麻烦的）。所以力法求解的对象是超静定结构而位移法的求解对象是超动定结构。

力法（柔度法）和位移法（刚度法）各自的解题特点如表10-1所列。

在以后的柔度法和刚度法中，解题的原理都是按照这个思路进行的。特别值得注意的是位移法的对象是超动定结构。只要结点有未知位移就可用位移法求解。因此，位移法不但适用于超静定结构，也适用于静定结构。这就为编制计算结构内力的通用计算机程序提供了方便的方法。

柔度法（力法）和刚度法（位移法）解题方法比较表　　表 10-1

		力法	位移法
对象		超静定结构	超动定结构
基本体系		静定结构	动定结构
未知数		未知力	未知位移
解题步骤		1. 确定未知数即多余未知力	1. 确定未知数即结点位移
		2. 去掉多余联系使结构变成静定	2. 去掉结点位移使结构变成动定
		3. 写出用基本未知数表示的结点位移（单元柔度矩阵）	3. 写出用基本未知数表示的杆端力（单元刚度矩阵或转角位移方程）
		4. 建立未知力作用点的位移协调方程	4. 建立结点和截面的平衡方程
		5. 解方程求未知力	5. 解方程求未知位移
		6. 由平衡方程求杆端力	6. 由转角位移方程或单元刚度矩阵求杆端力

7. 虚功原理

在力学中虚功原理是一个非常重要的，应用十分广泛的原理。在后面讲到的建立结构柔度矩阵和刚度矩阵的方法中都要应用虚功原理。

虚功原理首先是从刚体运动中提出的，是描述刚体处于平衡状态的一种规律。但是，虚功原理也可以从刚体推广到变形体。变形体的虚功原理可以叙述为：

设变形体在力系作用下处于平衡状态，又设变形体由于其它原因产生符合约束条件的微小的连续变形，则外力在位移上所做的虚功，与各个微段的应力合力在变形上所做的虚功之和恒等于零，或表示为

$$\Sigma P\varDelta + \Sigma\int_A^B (pu + qv)ds + \Sigma\int_A^B (Md\theta + N\varepsilon dx + Q\gamma_0 dx) = 0$$

其中第一、二项是外力虚功，第三项是变形体各微段上的应力在相应的变形上做的虚功之和，即内力虚功。

这个方程称为变形体的虚功方程。对上述“内力虚功”一词，目前在学术界还有不同的看法，这里是按现行教科书的提法定义的。目前虽然对内力功的定义有不同看法，但虚功原理的正确性是无可怀疑的。

应用虚功原理时，不同的情况下具有不同的形式。有时候它以虚位移原理的形式出现，有时候又以虚力原理的形式出现。这两种形式所具有的力学意义是不同的，解决的问题也不同。

虚功原理的主要特点是做功的两个因素：力与位移相互独立，彼此之间无关。因此，如果虚设一组位移，只要这位移是约束所允许，而且是微小的，让实际的平衡力系（包括外力和内力）在这组虚设的位移上（包括位移和变形）做功这就是虚功。根据虚功原理，这些虚功之和应等于零。这就是虚位移原理。可以利用虚位移原理求力系中的未知力，根

据虚位移原理建立的虚功方程，实际上就是一个平衡方程。在刚度法中，就利用虚位移原理建立刚度矩阵的计算公式。

如果虚设一组平衡力系，让这组平衡力系在实际的位移上做功，这也是虚功。这是体系的外力虚功。同时，虚设的平衡力系会引起体系的内力，这虚内力在实际的变形上做功就定义为内力虚功并且内力功总是负值，外力虚功与内力虚功之和应等于零。这样就建立了以虚力形式出现的虚功方程。这个方程反映的是位移协调条件，可以用它来求未知位移。在柔度法中就利用虚力原理来建立柔度矩阵的计算公式。

8.等效结点荷载

用柔度法和刚度法计算结构，结构承受的荷载必须是结点荷载。实际结构上通常都有非结点荷载。如果要满足上述条件，就必须要用等效结点荷载来代替非结点荷载。

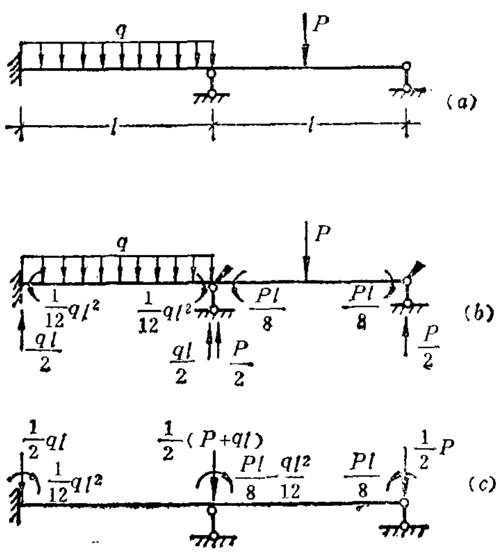

图 10-9

根据什么条件来确定等效结点荷载呢？结构从等效结点荷载作用下的结点位移与实际荷载作用下的结点位移相等。

等效结点荷载应这样求得，对结构的结点施加强制约束使它们固定。非结点荷载将在杆端产生固端力，然后取消约束。把固端力反向加在结点上，这一组结点力就是与非结点荷载等效的等效结点荷载，如图10-9所示。

更一般的情况下，等效结点荷载可通过虚功相等的原则求得。（详见例题10-4）

由图10-9可以看出，图 c 与图 b 叠加，其荷载就等于图 a 的荷载。因此，图 c 与图 b 的位移之和应等于图 a 的位移。但因图 b 已施加了约束，其结点位移为零，故图 c 的结点位移就等于图 a 的结点位移。同理，图 c 与图 b 的内力之和应等于图 a 的内力，而图 b 的内力就是各杆端的固端内力。所以，结论是：等效结点荷载引起的结点位移与原荷载引起的结点位移相等。而等效结点荷载引起的杆端力需要加上固端内力才等于原荷载引起的杆端力。这一点是非常重要的。

§2　静定结构外力与杆端力之间的变换关系

设一刚架，作用在刚架上的力为P_1、P_2、P_3。求各杆端力。

首先，确定各杆端有哪些杆端力。这取决于选择什么样的单元形式。如果选择简支梁式单元，则杆端内力为M_j、M_k和N_k。如果进一步简化，不考虑轴力对位移的影响，则简支梁式单元只剩下两端的弯矩作为计算的杆端力。图10-10 a 所示的三铰刚架，选择不考虑轴向变形后的杆端力如图 b 所示。杆端力向量为

$$\boldsymbol{S}=\{M_{ab}\ M_{ba}\ M_{bc}\ M_{cb}\ M_{cd}\ M_{dc}\ M_{de}\ M_{ed}\}$$

或

$$\boldsymbol{S}=\{S_1\ S_2\ S_3\ S_4\ S_5\ S_6\ S_7\ S_8\}$$

然后，利用平衡条件计算各杆端力。既然杆端力只有弯矩，求杆端力的问题就变成了求在外荷作用下的弯矩问题。对初学者来说，可分别作出结构在各荷载作用下的弯矩图，然后叠加各杆端弯矩即可求得。