第一章 线性空间

本章将对读者已经学过的线性代数中的一些概念与结论作一回顾与复习，主要内容则限于本书中所最需要的那些部分，目的是使读者能够理解相似变换的构成及其几何意义；求解线性代数方程组；寻找方阵的约当变换型以及讨论矩阵函数的一些性质及计算矩阵函数，特别是矩阵指数 e^{At}.

本章 1.1 节中将介绍"域"及域上的线性空间的概念．本书所涉及的除实数域与复数域外，还有有理函数域．为了表示线性空间中的向量，1.2 节中引入基的概念，并且建立同一向量在不同基下的"表示"之间关系．1.3 节中将研究线性映射及其矩阵表示，从而使相似变换的构成有比较清楚的几何意义．1.4，1.5 两节主要讨论与线性代数方程组求解有关的问题，重点放在秩与零性（nullity）．1.6 节将证明当引入特征向量（广义特征向量）作为基向量时，则任何方阵都可以通过相似变换变为最简形式，并介绍了变换为约当型的基本步骤．1.7 节介绍矩阵函数，最小多项式与凯来-哈密顿定理．最后一节，为本章中所需要的计算机算法的评价．这里先介绍一个下面常用的矩阵恒等式．令 A，B,C,D 分别为 $n\times m, m\times r, l\times n$ 及 $r\times p$ 常数矩阵．令 a_i 是 A 的第 i 列，b_j 是 B 的第 j 行．则有

$$AB=[a_1a_2\cdots a_m]\begin{bmatrix}b_1\\b_2\\\vdots\\b_m\end{bmatrix}=a_1b_1+a_2b_2+\cdots+a_mb_m \qquad (1.1)$$

$$CA=C[a_1a_2\cdots a_m]=[Ca_1Ca_2\cdots Ca_m] \qquad (1.2)$$

$$BD=\begin{bmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \vdots \\ b_m \end{bmatrix} D=\begin{bmatrix} b_1 D \\ b_2 D \\ \vdots \\ b_m D \end{bmatrix} \tag{1.3}$$

上述恒等式读者可以自行核对.

§ 1.1 在域上的线性空间

线性空间是线性代数的基本概念，是对一些不同的数学对象，抓住其中共同的线性本质抽象而产生的. 数学研究中常常遇到或者需要处理的是"一类对象"，或某种"整体". 这种目标或元素的整体在数学中称为"集合"或称为"集". 例如整数集，有理数集，复数集，区间$[a,b]$上定义的连续函数集，关于符号 s 的实系数多项式集、有理函数集等等. 在波尔代数中的数集则为$\{0,1\}$，即只含 0 与 1 两个元素. 从代数运算的角度满足一定性质的集合称为域. 定义如下:

定义 1.1 域用符号$\mathscr{F}$表示，它代表标量元素的集合，并且在$\mathscr{F}$上定义加法与乘法使任何$\alpha,\beta\in\mathscr{F}$有$\alpha+\beta\in\mathscr{F}$，$\alpha\beta\in\mathscr{F}$，(符号"$\in$"代表"属于"；"$\notin$"则表"不属于")，且加法与乘法满足下列规则（下列各式中符号"$\forall$"代表"凡是"）:

1. $\alpha+\beta=\beta+\alpha$，$\alpha\beta=\beta\alpha$，$\forall\alpha,\beta\in\mathscr{F}$
2. $(\alpha+\beta)+\gamma=\alpha+(\beta+\gamma)$
   $(\alpha\beta)\gamma=\alpha(\beta\gamma)$，　　$\forall\alpha,\beta,\gamma\in\mathscr{F}$
3. $\alpha(\beta+\gamma)=\alpha\beta+\alpha\gamma$　　$\forall\alpha,\beta,\nu\in\mathscr{F}$
4. $o\in\mathscr{F}$ 有 $\alpha+o=\alpha$.　　$\forall\alpha\in\mathscr{F}$
5. $1\in\mathscr{F}$ 有 $1\alpha=\alpha$　　$\forall\alpha\in\mathscr{F}$
6. 对任何 $\alpha\in\mathscr{F}$，一定存在 $-\alpha\in\mathscr{F}$ 使

$$\alpha+(-\alpha)=0$$

7. 对任何 $\alpha(\neq 0)\in\mathscr{F}$，有 $1/\alpha\in\mathscr{F}$ 使

$$\alpha(1/\alpha)=1$$

以上七条说明一个域所定义的加法乘法运算不仅满足交换律、结合律、分配律，而且有相加逆与除了零元素以外的相乘逆。概括地说：能进行加、减、乘、除四种运算的代数系称为域；只能进行加、减、乘运算的即所谓环。下面举几个例子以进一步说明域的概念。

例 1.1 实数集是域

任何两个实数作加法与乘法运算，显然满足交换、结合及分配律；任一$\alpha\in\mathscr{F}$一定有$-\alpha\in\mathscr{F}$使 $\alpha+(-\alpha)=0$，一定有 $1/\alpha\in\mathscr{F}$ $(\alpha\neq 0)$ 使 $\alpha(1/\alpha)=1$。所以，实数集是域。

例 1.2 全体有理数是域

有理数可以看作任意两个整数 $a,b,b\neq 0$ 组成的分式 a/b（商式）。全体整数是可进行加、减、乘的代数系——整数环 Z。因此，有理数域也叫做整数环 Z 上的"分式域"或"商域"。任意两个分数 a/b 与 c/d 有如下性质：当 $ad=bc$ 时，$\dfrac{a}{b}=\dfrac{c}{d}$；它们满足如下加法与乘法规律：

$$\frac{a}{b}+\frac{c}{d}=\frac{ad+bc}{bd}$$

$$\frac{a}{b}\cdot\frac{c}{d}=\frac{ac}{bd}$$

显然，这些分数（有理数）全体按上述运算成为一个域（有定义 1.1 所规定的一切性质）。

例 1.3 集合$\{0,1\}$不是域

这是很显然的，因为 $1+1=2\bar{\in}\{0,1\}$。但是如果定义

$$0+0=1+1=0,\ 1+0=1$$

$$0\cdot 1=0\cdot 0=0$$

$$1\cdot 1=1$$

根据上述加法与乘法的定义，对照定义 1.1 中所列举的性质立即

可以证明$\{0,1\}$是一个域，常称作二元域（伽罗瓦域）.

例 1.4 考查有如下形式

$$\begin{bmatrix} x & -y \\ y & x \end{bmatrix}$$

的 2×2 矩阵的集合. 其中，x,y 为任意实数，根据常规的矩阵相加，相乘的定义成为域。这个域中的 0 与 1 分别为如下矩阵

$$\begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix},\ \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$$

注意，全部 2×2 矩阵的集合不是域.

由上面四个例子可以看出，任何对象的集合只要对这种对象定义两种运算，并且有定义 1.1 的性质即成为域.

本书中所涉及的实数集合是域，还有复数集合及具有实系数的有理函数集合，可以证明也是域. 这三种域的符号分别用 $\boldsymbol{R}$, $\boldsymbol{C}$ 与 $\boldsymbol{R}(s)$表示；其中 s 是一个文字（不确定数）. 当定义并说明了域的概念之后，我们立即进入对定义在域上的线性空间的研究，首先给定线性空间的定义：

定义 1.2 集合 S 称为域$\mathscr{F}$上的一个线性空间，系指在 S 的元之间定义了加法，使任何 $x_1,x_2\in S$ 有 $x_1+x_2\in S$. 又在 S 与域$\mathscr{F}$之间定义了数乘，使任何 $\alpha\in\mathscr{F},x\in S$ 有 $\alpha x\in S$. 加法与数乘满足如下的规则：

1. $x_1+x_2=x_2+x_1$, $\forall x_1,x_2\in S$
2. $x_1+(x_2+x_3)=(x_1+x_2)+x_3$, $\forall x_1,x_2,x_3\in S$
3. 有唯一的 $0\in S$ 使 $0+x=x$, $\forall x\in S$
4. 对任何 $x\in S$，一定有 $-x\in S$ 使 $x+(-x)=0$
5. 有 $1\in\mathscr{F}$ 使 $1\cdot x=x$, $\forall x\in S$
6. 有 $0\in\mathscr{F}$ 使 $0\cdot x=0\in S$, $\forall x\in S$
7. $\forall\alpha,\beta\in\mathscr{F},\forall x_1,x_2\in S$ 均有：

$$\alpha(x_1+x_2)=\alpha x_1+\alpha x_2$$

$$(\alpha+\beta)x=\alpha x+\beta x$$

$$\alpha(\beta x)=(\alpha\beta)x$$

定义 1.3 设$\mathscr{F}$为域，$x_i\in\mathscr{F}$，$i=1,2,\cdots n$，则称

$$\mathscr{F}^n=\left\{x \mid x=\begin{bmatrix}x_1\\x_2\\\vdots\\x_n\end{bmatrix},x_i\in\mathscr{F},i=1,\cdots n\right\}$$

为域$\mathscr{F}$上的n维向量空间．在$\mathscr{F}^n$中定义：

1．向量$\boldsymbol{x},\boldsymbol{y}\in\mathscr{F}^n$，$\boldsymbol{z}=\boldsymbol{x}+\boldsymbol{y}$ 系指

$$z_i=x_i+y_i$$

式中x_i，y_i，z_i为$\boldsymbol{x},\boldsymbol{y},\boldsymbol{z}$的第$i$个分量。

2．$\boldsymbol{x}\in\mathscr{F}^n$，$\alpha\in\mathscr{F}$，$\boldsymbol{y}=\alpha\boldsymbol{x}$ 系指

$$y_i=\alpha x_i,\quad i=1,\cdots,n$$

3．$\mathscr{F}^n$中的零向量的各元素都是$0\in\mathscr{F}$．

容易验证：$\mathscr{F}^n$是域$\mathscr{F}$上的线性空间（请读者自行验证）

例 1.5 给定$A\in\boldsymbol{C}^{m\times n}$，可以定义一个向量$\boldsymbol{x}$的集合$\boldsymbol{R}(A)$及$\boldsymbol{N}(A)$．前者$\boldsymbol{x}=A\boldsymbol{y}$，$\boldsymbol{y}\in\boldsymbol{C}^n$；后者有$A\boldsymbol{x}=0$．$\boldsymbol{R}(A)$与$\boldsymbol{N}(A)$分别包含于$m$维与$n$维复空间，可以应用符号表示（其中"$\subset$"为"包含于"的符号）：

$$\boldsymbol{R}(A)=\{\boldsymbol{x}\mid\boldsymbol{x}=A\boldsymbol{y},\boldsymbol{y}\in\boldsymbol{C}^n\}\subset\boldsymbol{C}^m$$

$$\boldsymbol{N}(A)=\{\boldsymbol{x}\mid A\boldsymbol{x}=0\}\subset\boldsymbol{C}^n$$

$\boldsymbol{R}(A)$与$\boldsymbol{N}(A)$都是线性空间．

例 1.6(a) 次数$\leqslant n$的复系数多项式全体

$$\sum_{i=0}^{n-1}\alpha_i s^i,\quad \alpha_i\in\boldsymbol{C}$$

是域$\boldsymbol{C}$上的线性空间．但次数$=n$的多项式集合只是上述集合的子集，它不是一个线性空间．

例 1.6(b) n阶常系数线性微分方程

$$L[\xi(t)]=\frac{\mathrm{d}^n\xi}{\mathrm{d}t^n}+\alpha_{n-1}\frac{\mathrm{d}^{n-1}\xi}{\mathrm{d}t^{n-1}}+\cdots+\alpha_1\frac{\mathrm{d}\xi}{\mathrm{d}t}+\alpha_0\xi=0$$

的解集

$$S=\{\xi(t)\mid L[\xi(t)]=0\}$$

是域 C 上的线性空间；$\alpha_i\in C$。

例 1.7 集合

$$X=\left\{\xi\frac{d\xi}{dt}=\xi^2\right\}$$

表示方程 $\frac{d\xi}{dt}=\xi^2$ 的解集。$\xi_1=-\frac{1}{t}\in X$，但 $2\xi_1\bar{\in}X$，因此解集 X 不是线性空间。

下面我们再来定义本书中将要涉及的子空间的概念。

定义 1.4 集合 $Q\subset S$，S 与 Q 同是域 $\mathscr{F}$ 上的线性空间，则称 Q 为 S 的线性子空间，或简称为 S 的子空间。

又若 Q 是 S 的子空间，有 $x\in S$ 但 $x\bar{\in}Q$，则称 Q 为 S 的真子空间。

如例 1.5 中的 $R(A)$ 是 C^m 的子空间，而 $N(A)$ 是 C^n 的子空间。

例 1.8 由实数组成的 n 维向量空间 (R^n,R) 是向量空间 (C^n,R) 的一个子空间。

例 1.9 $R^n\subset C^n$，R^n 是域 R 上的线性空间，而 C^n 是域 C 上的线性空间，但 R^n 不是 C^n 的子空间。

§ 1.2 线性组合，线性独立，基及表示[1]

本节中我们将几何空间中规定一个点或向量的参考坐标系的概念推广到有限维线性空间中去。

在通常的三维实向量空间 R^3 中，若用 α_1,α_2 及 α_3 三个向量组成 R^3 的一个标架(1)（或基），要求

(1) 标架也可以称作基，但严格地说还有一点微小的差别，一组基加上原点通常称为标架，适用原点变动情况下表示点的参考系。

1. 任何 $\boldsymbol{x}\in\boldsymbol{R}^3$，应有 $\xi_i\in\boldsymbol{R}$，$i=1,2,3$ 使

$$\boldsymbol{x}=\xi_1\boldsymbol{a}_1+\xi_2\boldsymbol{a}_2+\xi_3\boldsymbol{a}_3$$

这就称为用标架 $\boldsymbol{a}_1,\boldsymbol{a}_2,\boldsymbol{a}_3$ 去表示 x，表示的系数 ξ_i，$i=1,2,3$ 则称为 x 在标架 $\boldsymbol{a}_1,\boldsymbol{a}_2,\boldsymbol{a}_3$ 下的坐标。

2. "1"中 $\boldsymbol{x}$ 的表示式应该是唯一的，即 $\boldsymbol{a}_1,\boldsymbol{a}_2,\boldsymbol{a}_3$ 若组成标架，则可用它表示任一向量 $\boldsymbol{x}\in\boldsymbol{R}^3$，而且 $\boldsymbol{x}$ 在这组标架下的坐标仅有一种。

可以推论出在 $\boldsymbol{R}^3$ 中满足"1"，"2"要求 $\boldsymbol{a}_1,\boldsymbol{a}_2,\boldsymbol{a}_3$ 的三向量不共面。

为了在一般有限维线性空间中建立类似于 $\boldsymbol{R}^3$ 中标架的向量组，我们将逐步引入线性组合，线性独立，最后定义线性空间的基及其表示。

定义 1.5 设 S 是域 $\mathscr{F}$ 上的线性空间，又

$$\boldsymbol{x}_i\in S,\quad \alpha_i\in\mathscr{F},\quad i=1,2,\cdots,m$$

表示式 $\quad \boldsymbol{x}=\alpha_1\boldsymbol{x}_1+\cdots+\alpha_m\boldsymbol{x}_m=\sum_{i=1}^{m}\alpha_i\boldsymbol{x}_i$

称 $\boldsymbol{x}$ 用 $\boldsymbol{x}_1,\cdots,\boldsymbol{x}_m$ 的线性表示，而 $\sum_{i=1}^{m}\alpha_i\boldsymbol{x}_i$ 称为 $\boldsymbol{x}_1,\cdots,\boldsymbol{x}_m$ 的一个线性组合。α_i 称为该组合的系数。

定义 1.6 S 是域上的线性空间，向量组 $(\boldsymbol{x}_1,\boldsymbol{x}_2,\cdots,\boldsymbol{x}_m)\subset S$ 是线性相关的，系指存在不全为零的 $\alpha_i\in\mathscr{F}$，$i=1,2,\cdots,m$ 使

$$\sum_{i=1}^{m}\alpha_i\boldsymbol{x}_i=0$$

反之，称 $(\boldsymbol{x}_1,\boldsymbol{x}_2,\cdots,\boldsymbol{x}_m)$ 为线性无关或线性独立。

如果引进符号

$$\alpha_1\boldsymbol{x}_1+\alpha_2\boldsymbol{x}_2+\cdots+\alpha_m\boldsymbol{x}_m\triangleq[\boldsymbol{x}_1\boldsymbol{x}_3\cdots\boldsymbol{x}_m]\begin{bmatrix}\alpha_1\\\alpha_2\\\vdots\\\alpha_m\end{bmatrix}$$

$$\triangleq [\boldsymbol{x}_1 \boldsymbol{x}_2 \cdots \boldsymbol{x}_m]\alpha$$

则定义 1.6 可以换一种方式陈述：

定义 1.6′ 向量组（$\boldsymbol{x}_1, \boldsymbol{x}_2, \cdots, \boldsymbol{x}_m$）称为线性独立，当且仅当方程

$$[\boldsymbol{x}_1 \boldsymbol{x}_2 \cdots \boldsymbol{x}_m]\alpha = 0 \qquad \text{蕴含 } \alpha = 0, \ \alpha \in \mathscr{F}^m.$$

根据线性相关的定义，如果向量组（$\boldsymbol{x}_1, \boldsymbol{x}_2, \cdots, \boldsymbol{x}_m$）是线性相关的，则它们之中至少有一个向量可以用其它向量线性表出。

这里插入一段关于时间函数线性相关（与独立）的定义，有关时间函数的线性独立概念在本书第三章中将会用到。

定义 1.6″ 称一组复数域上的复值函数 $f_1, f_2, \cdots, f_n$ 在时间区间$[t_1, t_2]$上线性相关，是指如果存在一组不全为零的复数$\alpha_1, \alpha_2, \cdots, \alpha_n$ 能使

$$\alpha_1 f_1(t) + \alpha_2 f_2(t) + \cdots + \alpha_n f_n(t) = 0, \quad \forall t \in [t_1, t_2]$$

反之，称线性独立。

线性独立的概念可以推广到向量值函数。令$\boldsymbol{f}_i, i = 1, 2, \cdots, n$ 为 $1 \times p$ 的复值时间函数。称 $\boldsymbol{f}_1, \boldsymbol{f}_2, \cdots, \boldsymbol{f}_n$ 在$[t_1, t_2]$上线性相关，是指如果存在不全为零的 n 个复数 $\alpha_i, i = 1, 2, \cdots, n$ 能使

$$\alpha_1 \boldsymbol{f}_1(t) + \alpha_2 \boldsymbol{f}_2(t) + \cdots + \alpha_n \boldsymbol{f}_n(t) = 0, \quad \forall t \in [t_1, t_2]$$

反之，称 $\boldsymbol{f}_i$, $i = 1, 2, \cdots, n$ 在$[t_1, t_2]$上线性独立。

对式可以作另一种陈述：$\boldsymbol{f}_i$, $i = 1, 2, \cdots, n$ 为线性独立的充要条件应该是：除非 $\boldsymbol{\alpha} = 0$，才会有

$$[\alpha_1 \alpha_2 \cdots \alpha_n] \begin{bmatrix} \boldsymbol{f}_1(t) \\ \boldsymbol{f}_2(t) \\ \vdots \\ \boldsymbol{f}_n(t) \end{bmatrix} \triangleq \boldsymbol{\alpha} \boldsymbol{F}(t) = 0, \quad \forall t \in [t_1, t_2]$$

或用符号形式表出上式，即

$$
[\alpha_1\alpha_2\cdots\alpha_m]\begin{bmatrix} f_1(t) \\ f_2(t) \\ \vdots \\ f_n(t) \end{bmatrix} \triangleq \boldsymbol{\alpha F}(t)=0 \xrightarrow{\text{导致}} \boldsymbol{\alpha}=0
$$

$$
t\in[t_1,t_2]
$$

式中

$$
\boldsymbol{\alpha}\triangleq[\alpha_1\alpha_2\cdots\alpha_n],\boldsymbol{F}(t)\triangleq\begin{bmatrix} f_1(t) \\ f_2(t) \\ \vdots \\ f_n(t) \end{bmatrix}
$$

一组函数的线性独立是与一个区间相结合的性质，因此，检验函数的线性独立性要考虑整个区间。对于比较简单的问题当然很容易判断，但稍为复杂的问题判断其线性独立性显然是比较麻烦的。现在已经有几种便于应用的检验准则[1]，本书限于篇幅不拟具体介绍。

定理 1.1 S 是域$\mathscr{F}$上的线性空间，

$\boldsymbol{X}=(x_1,\cdots,x_n)$与$\boldsymbol{Y}=(y_1,\cdots,y_m)$是$\boldsymbol{S}$的两向量组，若有$\boldsymbol{X}\subset\boldsymbol{Y}$，则：

1. $\boldsymbol{X}$是线性相关组$\Rightarrow\boldsymbol{Y}$是线性相关组，
2. $\boldsymbol{Y}$是线性无关组$\Rightarrow\boldsymbol{X}$是线性无关组。

［**证明**］ 设用$\boldsymbol{X}$以不全为零的系数作线性表示的向量集记作$\boldsymbol{S}$，而用$\boldsymbol{Y}$以不全为零的系数作线性表示的向量集记为$\boldsymbol{T}$，由$\boldsymbol{X}\subset\boldsymbol{Y}$则$\boldsymbol{S}\subset\boldsymbol{T}$。

$\boldsymbol{X}$是线性相关组$\Rightarrow 0\in\boldsymbol{S}\Rightarrow 0\in\boldsymbol{T}\Rightarrow\boldsymbol{Y}$是线性相关组，即有“1”，以上所用符号“$\Rightarrow$”表示“蕴涵”。

“1”与“2”显然等价。

定义 1.7 S是域$\mathscr{F}$上的线性空间，若在$\boldsymbol{S}$中有n个线性无关的向量，而$\boldsymbol{S}$中任何$n+1$向量都线性相关，则称$\boldsymbol{S}$的维数为n

并记作

$$\dim(S)=n$$

若对任何m个整数，在S中都能找到m个向量彼此线性无关，则称S的维数为无穷大记作

$$\dim(S)=+\infty.$$

规定只含一个零向量的线性空间维数为0．维数为n的线性空间则称为n维线性空间$0\leqslant n\leqslant+\infty$

例 1.10 考查一个定义在$(-\infty,\infty)$上的全部实值分段连续函数组成的函数空间．这个空间中零向量是等于$(-\infty,\infty)$上的零．下列函数

$$t,t^2,t^3\cdots\qquad -\infty<t<\infty$$

显然是所定义的函数空间的元素。函数集$\{t^n,n=1,2,\cdots,m\}$线性无关，因为不存在不全为零的实常数α_i能使

$$\sum_{i=1}^{m}\alpha_i t^i\equiv 0$$

因为上述函数空间中任何m个元素的集合都保持线性无关的性质，根据定义1.7，这个空间是无穷维的。

定义 1.8 S是域$\mathscr{F}$上的线性空间，$(x_1,x_2,\cdots,x_n)$向量组称作S的一组基，是指

1．$(x_1,x_2,\cdots,x_n)$是线性无关组；

2．对任何向量$x\in S$，都可以用这些向量的线性组合唯一的表出。

“2”可以等价地表作

$$\text{span}(x_1,x_2,\cdots,x_n)=S$$

即S空间由$x_1,\cdots,x_n$所张成。

在例1.1 R^n与C^n中，$(e_1,e_2,\cdots,e_n)$是一组基，今后将称这组基为标准正交基，其中

$$
\begin{aligned}
e_1 &= (10\cdots0)' \\
e_2 &= (01\cdots0)' \\
&\vdots \\
e_n &= (00\cdots1)'
\end{aligned}
\tag{1.4}
$$

事实 1. 在一个 n 维向量空间中，任何一组线性无关向量都有资格作为基。

因此，在 n 维向量空间 S 中，一旦选定基，则任何 $x\in S$，可以用集合 $\beta_1,\beta_2,\cdots,\beta_n\in\mathscr{F}$ 唯一地表示为

$$x=(e_1e_2e_3\cdots e_n)\beta \tag{1.5}$$

式中 $\beta\triangleq(\beta_1\beta_2\cdots\beta_n)'$，$\beta\in\mathscr{F}^n$

$\{e_i\}$为基向量组

显然，任何在$\mathscr{F}$域上的 n 维向量空间（S，$\mathscr{F}$）与同样维数的线性空间（$\mathscr{F}^n,\mathscr{F}$）有着一一对应的关系

定义 1.9 在一个 n 维的向量空间（$S,\mathscr{F}$）中，如果基向量$\{e_1,e_2,\cdots,e_n\}$选好，则任何$x\in S$可以用（1.5）式唯一地表示。式中的 β 称为 x 对于基向量$\{e_1,e_2,\cdots,e_n\}$的一个“表示”。“表示”是一组基下的坐标排成的列向量。

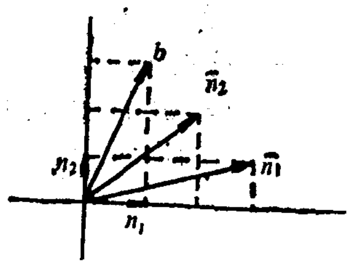

图 1.1 二维实向量空间

例 1.12 图 1.1 的几何平面上的任一点可以看作一个向量，整个平面是一个二维的，定义在实数域上的实向量空间。根据事实 1，任何两个线性无关向量集都有资格作为基，为此我们选择两组基，即$\{n_1,n_2\}$与$\{\bar{n}_1,\bar{n}_2\}$，表 1.1 中则列出了(R^2，R)空间中向量 $b,\bar{n}_1,\bar{n}_2,n_1$ 及n_2 在这两组不同基下的表示。

例 1.13 考查定义在实域R上的，由次数小于 4 的多项式整体组成的线性空间，用 ($R_4[s],R$) 表示。令 $n_1=s^3$，$n_2=s^2$，$n_3=s^1$ 及 $n_4=1$，显然$\{n_i\}$，$i=1,2,3,4$ 可以作为一组基。用这组

表 1.1　向量在不同基下的不同表示

向量基	$\boldsymbol{b}$	$\bar{\boldsymbol{n}}_1$	$\bar{\boldsymbol{n}}_2$	$\boldsymbol{n}_1$	$\boldsymbol{n}_2$
$[\boldsymbol{n}_1\boldsymbol{n}_2]$	$\begin{bmatrix}1\\3\end{bmatrix}$	$\begin{bmatrix}3\\1\end{bmatrix}$	$\begin{bmatrix}2\\2\end{bmatrix}$	$\begin{bmatrix}1\\0\end{bmatrix}$	$\begin{bmatrix}0\\1\end{bmatrix}$
$[\bar{\boldsymbol{n}}_1\bar{\boldsymbol{n}}_2]$	$\begin{bmatrix}-1\\2\end{bmatrix}$	$\begin{bmatrix}1\\0\end{bmatrix}$	$\begin{bmatrix}0\\1\end{bmatrix}$	$\begin{bmatrix}\frac{1}{2}\\-\frac{1}{4}\end{bmatrix}$	$\begin{bmatrix}-\frac{1}{2}\\\frac{3}{4}\end{bmatrix}$

基，则任一向量 $\boldsymbol{x}\in\boldsymbol{R}_4[s]$，$x=3s^3+2s^2-2s+10$ 可以表示为

$$\boldsymbol{x}=[\boldsymbol{n}_1\boldsymbol{n}_2\boldsymbol{n}_3\boldsymbol{n}_4]\begin{bmatrix}3\\2\\-2\\10\end{bmatrix}$$

式中$[3\ \ 2\ \ -2\ \ 10]'$是向量 $\boldsymbol{x}$ 对于一组基$\{\boldsymbol{n}_i\}$的一个表示。如果我们选另一组基$\{\bar{\boldsymbol{n}}_i\}$，$i=1,2,3,4$ 而 $\bar{\boldsymbol{n}}_1=s^3-s^2$，$\bar{\boldsymbol{n}}_2=s^2-s$，$\bar{\boldsymbol{n}}_3=s-1$ 及 $\bar{\boldsymbol{n}}_4=1$，则

$$\begin{aligned}\boldsymbol{x}&=3s^3+2s^2-2s+10\\&=3(s^3-s^2)+5(s^2-s)+3(s-1)+13\cdot 1\\&=[\bar{\boldsymbol{n}}_1\ \ \bar{\boldsymbol{n}}_2\ \ \bar{\boldsymbol{n}}_3\ \ \bar{\boldsymbol{n}}_4]\begin{bmatrix}3\\5\\3\\13\end{bmatrix}\end{aligned}$$

定义在$\mathscr{F}$域上的 n 维向量空间 $((\boldsymbol{R}^n,\boldsymbol{R})$，$(\boldsymbol{C}^n,\boldsymbol{C})$，$(\boldsymbol{R}^n[s],\boldsymbol{R}(s)))$中的向量往往写作一列标量，但与“表示”不同，同一个向量由于基选得不同其表示也不同，只有选用自然标准基$\{\boldsymbol{e}_i\}$，$i=1,2,\cdots,n$ 时，向量与表示两者才是一致的。也即

$$x=\begin{bmatrix}\beta_1\\ \beta_2\\ \vdots\\ \beta_n\end{bmatrix}=[e_1e_2\cdots e_n]\begin{bmatrix}\beta_1\\ \beta_2\\ \vdots\\ \beta_n\end{bmatrix} \tag{1.6}$$

既然在一般情况下，选用不同的基对同一向量可以有不同的表示，我们有必要研究一下不同表示之间的关系．定义 在$\mathscr{F}$域上线性空间 S 中，有任意 $x\in S$，设 x 对于$\{n_i\}$，$\{\bar{n}_i\}$，$i=1,2,\cdots,n$ 两组基的表示分别为 β 与$\bar{\beta}$；于是

$$x=[n_1n_2\cdots n_n]\beta=[\bar{n}_1\bar{n}_2\cdots\bar{n}_n]\bar{\beta} \tag{1.7}$$

为了找出 β 与 $\bar{\beta}$ 之间的关系，显然要找出一组基对于另一组基的表示才行，假设

$$[n_1n_2\cdots n_n]=[\bar{n}_1\bar{n}_2\cdots\bar{n}_n]\begin{bmatrix}p_{11}&p_{12}&\cdots&p_{1n}\\ p_{21}&p_{22}&\cdots&p_{2n}\\ \vdots&\vdots&&\vdots\\ p_{n1}&p_{n2}&\cdots&p_{nn}\end{bmatrix}$$

$$=[\bar{n}_1\bar{n}_2\cdots\bar{n}_n]P \tag{1.8}$$

$$P\triangleq\begin{bmatrix}p_{11}&p_{12}&\cdots&p_{1n}\\ p_{21}&p_{22}&\cdots&p_{2n}\\ \vdots&\vdots&&\vdots\\ p_{n1}&p_{n2}&\cdots&p_{nn}\end{bmatrix} \tag{1.9}$$

将（1-8）式代入（1-7）式，得

$$\bar{\beta}=P\beta \tag{1.10}$$

式中

$$P=\begin{bmatrix}\text{第 } i \text{ 列：} n_i\text{用}\\ \{\bar{n}_1,\bar{n}_2,\cdots,\bar{n}_n\}\\ \text{为基的表示}\end{bmatrix} \tag{1.11}$$

类此，如果 $\bar{n}_i$ 以$\{n_1,n_2,\cdots,n_n\}$为基表出，则有

$$\beta=Q\bar{\beta} \tag{1.12}$$

式中

$$Q=\begin{bmatrix}\text{第 } i \text{ 列：} \bar{n}_i \text{用} \\ \{n_1, n_2, \cdots, n_n \\ \text{为基的表示}\end{bmatrix} \tag{1.13}$$

由 (1.10) 式与 (1.12) 式，我们可以概括出下列两个关系

$$PQ=I \quad \text{或 } P=Q^{-1} \tag{1.14}$$

例 1.14、1.13 中的两组基向量，它们之间的关系很容易证明有

$$[n_1 n_2 \cdots n_n]=[\bar{n}_1 \bar{n}_2 \cdots \bar{n}_n]\begin{bmatrix}1&0&0&0\\1&1&0&0\\1&1&1&0\\1&1&1&1\end{bmatrix}$$

$$\triangleq[\bar{n}_1 \bar{n}_2 \cdots \bar{n}_n]P$$

$$Q=P^{-1}=\begin{bmatrix}1&0&0&0\\1&1&0&0\\1&1&1&0\\1&1&1&1\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}1&0&0&0\\-1&1&0&0\\0&-1&1&0\\0&0&-1&-1\end{bmatrix}$$

$$\bar{\beta}=P\beta \text{ 或}\begin{bmatrix}3\\5\\3\\13\end{bmatrix}=P\begin{bmatrix}3\\2\\-2\\10\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}1&0&0&0\\1&1&0&0\\1&1&1&0\\1&1&1&1\end{bmatrix}$$

§ 1.3 线性映射与矩阵

定义在同一个域 $\mathscr{F}$ 上的两个线性空间之间的联系反映为映射。线性映射的定义如下：

定义 1.10 $\boldsymbol{S}$ 与 $\boldsymbol{T}$ 均为域 $\mathscr{F}$ 上的线性空间，映射 L：$S\to T$ 是线性的，系指：

1. $L(a+b)=L(a)+L(b)$，$\forall a,b\in \boldsymbol{S}$.

2. $L(\alpha a)=\alpha L(a)$, $\forall a\in S$, $\alpha\in\mathscr{F}$.
映射L又称线性算子.

定理 1.2 S, T 是域$\mathscr{F}$上的线性空间. $(\boldsymbol{x}_1,\boldsymbol{x}_2,\cdots\boldsymbol{x}_n)$ 与 $(\boldsymbol{u}_1,\boldsymbol{u}_2,\cdots,\boldsymbol{u}_m)$ 分别是S与T的基. L: $S\to T$ 是线性映射 有 $\boldsymbol{y}=L(\boldsymbol{x})\in T$, $\forall\boldsymbol{x}\in S$, 如果 $\boldsymbol{a}\in\mathscr{F}^n$ $b\in\mathscr{F}^m$ 是$\boldsymbol{x}$, $\boldsymbol{y}$ 在上述基下的表示. 则存在唯一的矩阵 $C\in\mathscr{F}^{m\times n}$使$\boldsymbol{y}=L(\boldsymbol{x})$对应$\boldsymbol{b}=C\boldsymbol{a}$, 并且, $\boldsymbol{b}=C\boldsymbol{a}$ 也唯一地确定一个线性映射.

[**证明**] 由于$L(\boldsymbol{x}_1)$, $L(\boldsymbol{x}_2),\cdots,L(\boldsymbol{x}_n)$均为$\boldsymbol{T}$中向量, 因此存在 $C\in\mathscr{F}^{m\times n}$ 使

$$
\begin{aligned}
L[\boldsymbol{x}_1\boldsymbol{x}_2\cdots\boldsymbol{x}_n]&=[L(\boldsymbol{x}_1)L(\boldsymbol{x}_2)\cdots L(\boldsymbol{x}_n)]\\
&=[\boldsymbol{y}_1\boldsymbol{y}_2\cdots\boldsymbol{y}_n]\\
&=[\boldsymbol{u}_1\boldsymbol{u}_2\cdots\boldsymbol{u}_m]C
\end{aligned}
$$

设 $\boldsymbol{x}=[\boldsymbol{x}_1\boldsymbol{x}_2\cdots\boldsymbol{x}_n]\boldsymbol{a}$, $\boldsymbol{y}=L(\boldsymbol{x})=[\boldsymbol{u}_1\boldsymbol{u}_2\cdots\boldsymbol{u}_m]\boldsymbol{b}$ 则有$[\boldsymbol{u}_1,\cdots,\boldsymbol{u}_m]\boldsymbol{b}=L(\boldsymbol{x})=[L(\boldsymbol{x}_1)\cdots L(\boldsymbol{x}_n)]\boldsymbol{a}=[\boldsymbol{u}_1\boldsymbol{u}_2\cdots\boldsymbol{u}_m]C\boldsymbol{a}$
由于$[\boldsymbol{u}_1,\boldsymbol{u}_2,\cdots,\boldsymbol{u}_m]$线性无关, 所以 $\boldsymbol{b}=C\boldsymbol{a}$. 矩阵$C$的唯一性是显然的.

反之,给定 $C\in\mathscr{F}^{m\times n}$,则 $\boldsymbol{b}=C\boldsymbol{a}$ 给出一个映射 L': $\mathscr{F}^n\to\mathscr{F}^m$, $\boldsymbol{S}$ 与$\mathscr{F}^n$同构, $\boldsymbol{T}$ 与$\mathscr{F}_m$同构,数域$\mathscr{F}$上这两个有限维线性空间同构也就是它们有相同的维数. 关于同构的定义, 读者可以参考任何一本高等代数教科书. 同构映射建立的一一对应是

$$
\begin{aligned}
&\boldsymbol{x}_i\leftrightarrow\boldsymbol{e}_i,\quad i=1,2,\cdots,n\\
&\boldsymbol{u}_j\leftrightarrow\tilde{\boldsymbol{e}}_j,\quad j=1,2,\cdots,m\\
&[\boldsymbol{x}_1\cdots\boldsymbol{x}_n]\boldsymbol{a}\leftrightarrow\boldsymbol{a}\\
&[\boldsymbol{u}_1\cdots\boldsymbol{u}_m]\boldsymbol{b}\leftrightarrow\boldsymbol{b}
\end{aligned}\tag{1.15}
$$

$\boldsymbol{e}_i,\tilde{\boldsymbol{e}}_j$ 分别是$\mathscr{F}^n$与$\mathscr{F}^m$中的标准正交基, 它以$\mathscr{F}$中的单位元与零元代替域$\boldsymbol{C}$中的1与0.

L'经过 (1.15) 式的对应后确定了一个从$\boldsymbol{S}\to\boldsymbol{T}$的线性映射.

定理 1.3 S 是域$\mathscr{F}$上的线性空间, L: $S\to S$ 是线性变换 (映

射），$[x_1 x_2 \cdots x_n]$是 S 的一组基，则存 在唯一 的 $C \in \mathscr{F}^{n \times n}$，使得

$$x = [x_1 \cdots x_n]a,\quad L(x) = [x_1 \cdots x_n]b,\quad b = Ca$$

一般称 $A \in \mathscr{F}^{n \times n}$ 为L在基$[x_1 \cdots x_n]$下对应的矩阵。L对应于不同的基有不同的方阵，这些方阵之间的关系如下述：

上的线性空间，L：$S \to S$ 是线性变换，如果$[n_1 \cdots n_n]$，$[\bar{n}_1 \cdots \bar{n}_n]$分别是两组不同的基，则$L$在这两组基下分别有矩阵$A$与$\bar{A}$相对应，如果

$$[n_1 \cdots n_n] = [\bar{n}_1 \cdots \bar{n}_n]Q$$

则有

$$Q\bar{A} = AQ \tag{1.16}$$

［证明］

$$[\bar{n}_1 \cdots \bar{n}_n]\bar{A} = L[\bar{n}_1 \cdots \bar{n}_n] = L[n_1 \cdots n_n]Q$$

$$= [n_1 \cdots n_n]AQ$$

又 $$[\bar{n}_1 \cdots \bar{n}_n] = [n_1 \cdots n_n]Q$$

于是得： $$[n_1 \cdots n_n][Q\bar{A} - AQ] = 0$$

因为基同向量线性无关，所以

$$Q\bar{A} - AQ = 0 \Rightarrow Q\bar{A} = AQ$$

或 $$\bar{A} = Q^{-1}AQ = PAP^{-1} \tag{1.17}$$

或 $$A = QAQ^{-1} = P^{-1}AP \tag{1.18}$$

式中 $Q \triangleq P^{-1}$

因为满足（1.16）式的A与$\bar{A}$ 称为相似，所以，同一线性变换对于不同基的对应矩阵是相似的。我们将以上的变换关系图解表示如下：

与基无关 $\quad x \xrightarrow{L \Leftrightarrow A} y\,(= Lx) \qquad A = \left[\begin{array}{l} \text{第 } i \text{ 列：} \\ Ln_i \text{ 对应于} \\ \text{基}\{n_1, n_2, \cdots, n_n\} \\ \text{的表示} \end{array}\right]$

基

$$
\begin{tikzcd}
{[n_1 \cdots n_n]} & \alpha \arrow[r, "A"] \arrow[d, shift right, "P"'] & \beta\,(=A\alpha) \arrow[d, shift right, "P"'] \\
{[\bar{n}_1 \bar{n} \cdots {}_2]} & \bar{\alpha} \arrow[r, "\bar{A}"] \arrow[u, shift right, "Q"'] & \bar{\beta}\,(=\bar{A}\bar{\alpha}) \arrow[u, shift right, "Q"']
\end{tikzcd}
\qquad
\bar{A}=\left[\begin{array}{l}\text{第 } i \text{ 列:} \\ L\bar{n}_i \text{ 对应于} \\ \text{基}\{\bar{n}_1),\bar{n}_2\cdots,\bar{n}_n\} \\ \text{的表示}\end{array}\right]
$$

$$
P=\left[\begin{array}{l}\text{第 } i \text{ 列} \\ n_i \text{ 对应于} \\ \text{基}\{\bar{n}_1,\bar{n}_2,\cdots,\bar{n}_n\} \\ \text{的表示}\end{array}\right]
\qquad
Q=\left[\begin{array}{l}\text{第 } i \text{ 列:} \\ \bar{n}_i \text{ 对应于} \\ \text{基}\{n_1,n_2,\cdots,n_n\} \\ \text{的表示}\end{array}\right]
$$

图 1.2

设 $Q \triangleq [q_1 q_2 \cdots q_n]$，将 $\{q_i\}$，$i=1,2,\cdots n$ 选作基，另一组基则为标准正交基 $\{\boldsymbol{e}_i\}$，$i=1,\cdots n$，则图 1.2 有另一种形式：

$$
\text{与基无关}\quad \alpha \xrightarrow{L=A} \beta
$$

$$
\begin{tikzcd}
\text{基}[\boldsymbol{e}_1\boldsymbol{e}_2\cdots\boldsymbol{e}_n] & \alpha \arrow[r, "A"] & \beta \\
{[\boldsymbol{q}_1\boldsymbol{q}_2\cdots\boldsymbol{q}_n]} & \bar{\alpha} \arrow[r, "\bar{A}"] \arrow[u, "Q"] & \bar{\beta} \arrow[u, "Q"']
\end{tikzcd}
\qquad
\bar{A}=\left[\begin{array}{l}\text{第 } i \text{ 列:} \\ Aq_i \text{ 对于基} \\ \{q_1 q_2,\cdots q_n\} \\ \text{的表示}\end{array}\right]
\begin{array}{l}\bar{A}=Q^{-1}AQ \\ Q=[\boldsymbol{q}_1\boldsymbol{q}_2\cdots\boldsymbol{q}_n] \\ =P^{-1}\end{array}
$$

图 1.3

例 1.15 考查下列实矩阵：

$$
A=\begin{bmatrix} 3 & 2 & -1 \\ -2 & 1 & 0 \\ 4 & 3 & 1 \end{bmatrix}
$$

令
$$
\boldsymbol{b}=\begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}
$$