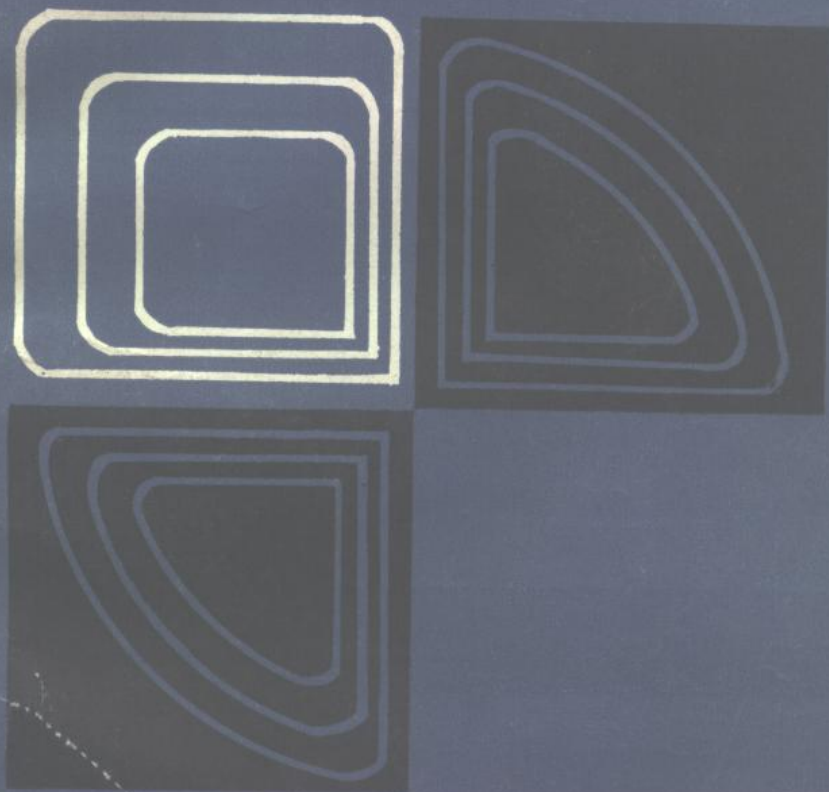


现代化管理方法

讲座

宋河洲 编著



科学学与科学技术管理杂志社

科学学丛刊

现代化管理方法讲座

宋河洲 编著

科学学与科学技术管理杂志社

1983年·天津

目 录

第一章 线性规划	(1)
一、线性规划的应用实例	(1)
二、线性规划的解法	(8)
三、解的退化和摄动法	(16)
四、线性规划的对偶问题	(20)
五、用表上作业法解资源分配问题	(23)
六、用线性规划解决生产安排问题	(33)
第二章 非线性规划	(41)
一、非线性规划问题及其最优解	(41)
二、几种典型的求解方法	(45)
第三章 动态规划	(59)
一、动态规划的一般模型及解题的基本方法	(59)
二、用动态规划法解决资源分配问题	(66)
三、用动态规划解决生产计划安排问题	(76)
第四章 排队论	(80)
一、排队的分类	(80)
二、泊松分布的几种排队模型	(81)
三、封闭型服务系统	(90)
四、关于工作效率问题	(95)
五、设备调度问题	(98)
六、生产计划问题	(108)

第五章 库存论.....	(114)
一、库存问题的模型	(114)
二、物料的分类及订货	(128)
第六章 博弈论.....	(133)
一、两人零和博弈	(133)
二、单纯策略的两人零和博弈	(135)
三、混合策略的两人零和博弈	(139)
四、实例分析	(145)
第七章 决策论.....	(156)
一、决策的一般程序	(156)
二、决策问题的分类	(160)
三、多级决策问题	(171)
四、多目标决策问题.....	(173)
五、实例分析	(178)
第八章 预测技术.....	(185)
一、预测的基本内容	(186)
二、预测的分类	(187)
三、外推法	(187)
四、因果关系法	(194)
五、直观法	(198)
六、实例分析	(203)
第九章 计划协调技术.....	(207)
一、网络图的基本概念	(207)
二、网络图的计算	(210)

三、网络图的优化	(217)
四、时间费用问题的数学模型与电算问题	(227)
五、实例分析	(230)
第十章 可靠性研究	(233)
一、失效率与可靠性函数	(233)
二、失效模式及可靠性的概率分布	(237)
三、可修复系统的可靠性问题	(243)
四、系统的可靠度	(246)
五、系统的有效度问题	(249)
六、可靠性设计问题	(253)
七、实例分析	(260)
第十一章 可行性研究	(265)
一、可行性研究的几个阶段	(266)
二、可行性研究的主要内容	(268)
三、实例分析	(272)
第十二章 计算机在管理工作上的应用	(281)
一、计算机的结构和工作特点	(281)
二、计算机解题程序和算法语言	(284)
三、计算机在管理工作上的应用	(290)
四、实例分析	(300)
第十三章 图论及其在管理上的应用	(308)
一、最小树问题	(309)
二、最短路问题	(311)
三、最大流问题	(321)
四、最小费用最大流问题	(327)

五、网络的线性变换与对偶问题	(336)
附表	(339)
一、正态概率分布表	(339)
二、二次分布表	(341)
三、累积二项分布表	(343)
四、贴现系数表	(345)
五、两位数字的随机数表	(347)

第一章 线性规划

在现实经济活动中，无论是分散的经济实体，还是社会经济整体的经济活动，都要追求明确的极值经济目标：最大的利润或最小的成本。但是，任何经济活动都要受到一定的限制，如土地资源、技术力量、可用设备、生产能力等等。线性规划就是研究解决一个受多个因素影响的、求解极值经济目标的方法之一。在线性规划问题中，目标函数和限制条件，都可以用基本变量的线性函数来表示。

一、线性规划的应用实例

例一：资源分配问题。某工厂可供使用的原材料、电力、劳动量都有限度，拟生产A、B两种产品，根据估计，生产每单位的A、B产品分别需要的原材料、电力、劳动量，以及所得利润等见表1-1，怎样安排生产才能获得最大利润呢？

表1-1

	产品A(x_1)	产量B(x_2)	各投入物的限度(b_i)
原材料(吨)	9	4	360
电力(瓩小时)	4	5	200
劳动量(人)	8	10	300
利润(万元)	7	12	

根据问题的性质, 设A、B的产量分别为变量 x_1 及 x_2 , 则可列出约束条件及目标函数方程:

$$\begin{cases} 9x_1 + 4x_2 \leq 360 & (1.1.1) \end{cases}$$

$$\begin{cases} 4x_1 + 5x_2 \leq 200 & (1.1.2) \end{cases}$$

$$\begin{cases} 3x_1 + 10x_2 \leq 300 & (1.1.3) \end{cases}$$

$$\begin{cases} x_1 \geq 0, x_2 \geq 0 & (1.1.4) \end{cases}$$

求: $\max f(x) = 7x_1 + 12x_2$

即选择适当的 x_1 及 x_2 (1.1.5) 使 $f(x)$ 极大,

例二: 运输问题. 某种物品有 m 个产地 A_i , 产量分别为 a_i ($i=1, 2, \dots, m$), 有 n 个销地 B_j , 销量分别为 b_j ($j=1, 2, \dots, n$), 由 A_i 运至 B_j 每单位物品的运输费用为 C_{ij} , 如何安排货物的调运, 才能使总的运输费用最小, 见表1-2。

表1-2

销地j	B_1	B_2	$\dots B_j$	B_n	产量
产地i					
A_1	X_{11} C_{11}	X_{12} C_{12}	X_{1j} C_{1j}	X_{1n} C_{1n}	a_1
A_2	X_{21} C_{21}	X_{22} C_{22}			a_2
$\vdots$					
A_i	X_{i1} C_{i1}		X_{ij} C_{ij}		a_i
A_m	X_{m1} C_{m1}			X_{mn} C_{mn}	a_m
销量	b_1	b_2	b_i	b_n	

假设由产地 A_i 运至销地 B_j 的货物为变量 x_{ij} , 根据问题的性质可列出约束条件及目标函数式。

对于每一产地 A_i 的产量平衡:

$$x_{11} + x_{12} + \cdots + x_{1n} = \sum_{j=1}^n x_{1j} \leq a_1$$

对于每一销地 B_j 的销量平衡:

$$x_{1j} + x_{2j} + \cdots + x_{mj} = \sum_{i=1}^m x_{ij} \geq b_j$$

$$x_{ij} \geq 0$$

求 $\min f(x) = \sum_{i=1}^m \sum_{j=1}^n C_{ij} x_{ij}$, 即选择适当的 x_{ij} 使 $f(x)$ 极小。

二、线性规划的解法

线性规划问题, 根据变量的多少和问题的繁简, 常用的解法有: 图解法、表上作业法、代数法和单纯形法。

1. 图解法

解变量少于三个的线性规划问题, 采用图解法是较便利和直观的。在平面直角坐标系中, 一个线性方程可以表示出一根直线; 在三度空间的直角坐标系中, 一个线性方程可表示出一个平面。例如例一中所有的约束条件(直线), 所围成的凸多边形 $P_0P_1P_2P_3P_4$, 便构成了该题变量的可行性空间 R , 如(图1-1)。

如果在可行性空间内任取一点, 并作出等值线, 如图1-2 直线 EF 上的每一点都能满足 $7x_1 + 12x_2 = 168$ 。同样可以绘出利润更高的等值线。沿着利润增加的方向移至区域的隅角点 P_3 , 便获得了目标函数的极大值。从图上可以量得 $x_1 = 20$, $x_2 = 24$, 此时最大利润为: $f(x) = 7 \times 20 + 12 \times 24 =$

428(万元)。

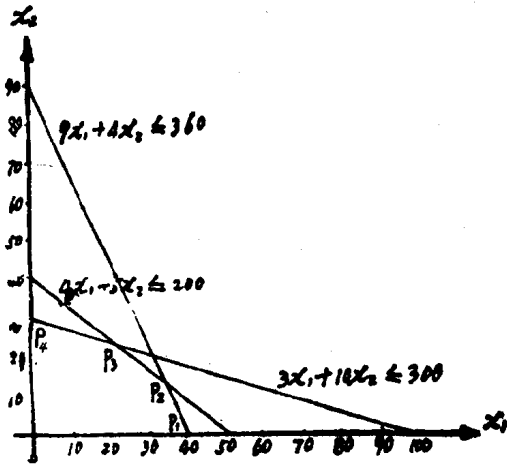


图1-1 可行性空间

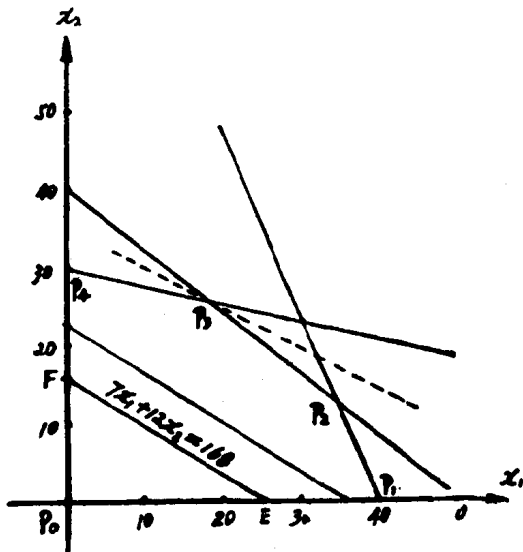


图1-2 求最优解

2. 单纯形法

单纯形法是应用最广泛、最有效的线性规划方法之一，它能够处理任何多个变量的求解问题。图解法和代数法被看作是单纯形法的特殊情况，后者同前两者相比，求解过程就显得较复杂、冗长。

单纯形法要求问题要用明确的代数式表示约束条件和目标函数，引入松弛变量，将不等式方程变为等式方程，建立数学模型，这同代数法是相似的。单纯形法的计算过程称为迭代过程。首先是在满足所有约束条件时产生初始解，或称初始规划；再根据目标函数检查对初始规划的修正，将最有利的解结合进第二次解，所得新解总比先前的解产生较大的目标函数；然后重复机械的和数学的运算，每次迭代都进一步接近最优解，直到再无改进的可能时为止，就得到了最优解。

以例一来说明单纯形法的求解过程。

①根据题意列出约束条件和目标函数（同式1.1.1~1.1.5），引入松弛变量建立等值方程组。所谓松弛变量表示不等式左右两端松弛的余量。例如1.2.1式中 x_3 ，表示生产 x_1 件产品A及 x_2 件产品B后，所剩余的原材料。

$$\begin{array}{rcl} 9x_1 + 4x_2 & + x_3 & = 360 \quad (1.2.1) \\ 4x_1 + 5x_2 & & + x_4 = 200 \quad (1.2.2) \\ 3x_1 + 10x_2 & & + x_5 = 300 \quad (1.2.3) \end{array}$$

$$x_1 \geq 0, x_2 \geq 0, x_3 \geq 0, x_4 \geq 0, x_5 \geq 0, \quad (1.2.4)$$

$$\max f(x) = 7x_1 + 12x_2 + 0x_3 + 0x_4 + 0x_5 \quad (1.2.5)$$

②选择初始基础变量，建立初始规划。选择初始基础变量的准则是使组成的基阵为单位阵 I ，如在1.2.1~1.2.3式

中， x_3 、 x_4 、 x_5 即构成单位阵 $\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$ ，令非基础变量 x_1

$= x_2 = 0$ ，则得到初始解： $x_3 = 360$ ， $x_4 = 200$ ， $x_5 = 300$ ， $f(x) = 0$ 。

③研究目标函数，必要时引入新的基础变量，修改初始规划。在实际运算中，为方便起见，目标函数式常改写为 $f(x) = 7x_1 - 12x_2 - 0x_3 - 0x_4 - 0x_5$ ，如果各变量的系数（称作单纯形系数）中有负值，则表示目标函数 $f(x)$ 还有改进的可能性。如果都为正，目标函数就没有再改进的可能了。根据此条判别准则，选取负系数最大者的变量（ x_2 ），作为新的基础变量。

④用新基对(1.2.1~1.2.3)等值方程及目标函数进行初等变换：

$$\frac{9}{4}x_1 + x_2 + \frac{1}{4}x_3 = 90 \quad (1.3.1)$$

$$\frac{4}{5}x_1 + x_2 + \frac{1}{5}x_4 = 40 \quad (1.3.2)$$

$$\frac{3}{10}x_1 + x_2 + \frac{1}{10}x_5 = 30 \quad (1.3.3)$$

比较各常数项(b_i)与新基系数 a_{ik} ($k=2$)的比值 b_i/a_{ik} ，选取最小者 $\min(90, 40, 30) = 30$ 作为新基可行解，即 $x_2 = 30$ ，相应的等值方程式(1.3.3)称为关键方程式，新基系数 $a_{32} =$

10称作关键元素。

令 $x_1 = x_5 = 0$, x_6 退出原基础变量, 得新基可行解:
 $x_2 = 30$, $x_3 = 240$, $x_4 = 50$, $f(x) = 360$ 。

利用关键方程式(1.3.3)对等值方程(1.2.1~1.2.2)及目标函数进行初等变换, 得新的标准式:

$$\begin{array}{rcl} 7.8x_1 & + x_3 & - 0.4x_6 = 240 \quad (1.4.1) \\ 2.5x_1 & & + x_4 - 0.5x_6 = 50 \quad (1.4.2) \\ 0.3x_1 & + x_2 & + 0.1x_6 = 30 \quad (1.4.3) \end{array}$$

$$f(x) - 3.4x_1 - 0x_3 - 0x_4 + 1.2x_5 = 360 \quad (1.4.4)$$

在这个过程中, 如果求得新基 x_2 的可行解为负, 则表示不存在非负的可行域, 也就没有最优解了。

⑤重复步骤③及④, 直到单纯形系数均为非负值时, 即表示不可能再有非基础变量作为新基。已求得的基础可行解就是最优解了。

根据(1.4.4式) x_1 的系数为 -3.4 , 取 x_1 为新基, 并用新基 x_1 对1.4.1~1.4.3, 1.4.4式进行初等变换, 取 $\min$

$\left(\frac{2400}{78}, 20, 100\right) = 20$, 得关键方程式:

$$x_1 + 0.4x_4 - 0.2x_5 = 20 \quad (1.5.1)$$

根据新关键方程对标准式及目标函数进行变换:

$$x_3 - 3.12x_4 + 1.16x_5 = 84 \quad (1.5.2)$$

$$x_2 - 0.12x_4 + 0.16x_5 = 24 \quad (1.5.3)$$

$$f(x) + 1.36x_4 + 0.52x_5 = 428 \quad (1.5.4)$$

此时，目标函数式(1.5.4)中各变量皆为正系数，已没有再改进的余地，最优规划值为 $f(x) = 428$ ， $x_4 = x_5 = 0$ ， $x_3 = 84$ ，最优解为 $x_1 = 20$ ， $x_2 = 24$ 。

单纯形法计算框图可表示为图1-3。

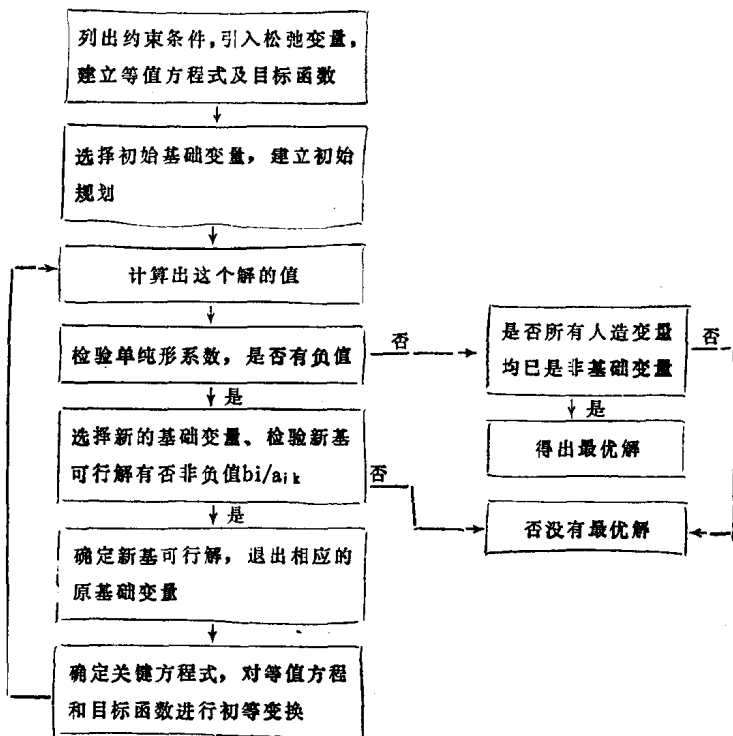


图1-3 单纯形法计算框图

上面分析的迭代过程，常用单纯形表直观简明地表达出来，既可清楚地看出整个的迭代计算过程，又有一定的格式可循。如表1-3~1-5。表中最上一行是各变量的标识符，左

边第一列为各基础变量的标识符，右边一列为基本可行解中基变量所得的值，加上非基变量为零的值，便得出一组基本可行解。最下边一行为单纯形系数的相反数，中间部分为约束条件的系数。

由步骤①、②作初始规划，由③、④作规划 1：选择 x_2 为新基，同时将 x_5 退出原基础变量(表1-3)。

表1-3

C_j	7	12	0	0	0		
规 划 (基变量)	x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	b_i	b_i/a_{ik}
x_3	9	4	1			360	$\frac{360}{4} = 90$
x_4	4	5		1		200	$\frac{200}{5} = 40$
$\leftarrow x_5$	8	10			1	300	$\frac{300}{10} = 30$
$Z_j - C_j$	-7	-12	0	0	0	0	

由步骤⑤，并重复③、④作规划 2：选择 x_1 为新基，同时将 x_4 退出原基础变量(表1-4)。

重复步骤⑤作规划 3，由目标函数可看出已求得最优解 $x_1 = 20$ ， $x_2 = 24$ ， $f(x) = 428$ (表1-5)。

3. 表上作业法

例二中的运输问题，同样可以采用上述的单纯形法求解。有时采用表上作业法也同样简单明了。

表 1-4

C_j	7	12	0	0	0		
规 划 (基变量)	x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	b_i	b_i/a_{ik}
x_3	7.8		1		-0.4	240	$\frac{240}{7.8} = 30.8$
$\leftarrow x_4$	2.5			1	-0.5	50	$\frac{50}{2.5} = 20$
x_2	0.3	1			0.1	30	$\frac{30}{0.3} = 100$
$Z_j - C_j$	-3.4	0			+1.2	260	

表 1-5

C_j	7	12	0	0	0		
规 划 (基变量)	x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	b_i	b_i/a_{ik}
x_3			1	-3.12	1.16	84	
x_1	1			0.40	-0.20	20	
x_2		1		-0.12	0.16	24	
$Z_j - C_j$	0	0	0	+1.36	+0.52	428	

为便于说明，将例二作为一个具体问题：来说明表上作业法的求解过程。

有 A_1 、 A_2 、 A_3 三家工厂生产同一产品，同时供应 B_1 、 B_2 、 B_3 、 B_4 四个地区，各厂的产量 a_i 及各地区的销量 b_j （且

设 $\sum_{i=1}^3 a_i = \sum_{j=1}^4 b_j$), i 厂的单位产品运至 j 地的费用 (或包括成本费用) 为 C_{ij} 均列于表 1-6 中, 问应如何调运物资以使总的运输费用最小? (a_i, b_j 的单位: 百吨, C_{ij} 的单位: 千元)

表 1-6

销地 j 工厂 i	B_1	B_2	B_3	B_4	a_i
A_1	10	9	16	18	14
A_2	2	12	4	16	8
A_3	12	8	18	10	18
b_j	6	12	10	12	40

为使总的运输费用最小, 我们可以根据一定的原则 (如按运费最小的优先安排调运供应), 首先制订一个初始调运方案, 而该方案不一定是最优方案; 第二是检查该方案是否最优, 如果不是, 再按某种原则进行优化, 直到获得最优方案。

(1) 编制初始调运方案

根据运费最小优先供应的原则, C_{21} 最小, 并根据 A_2 的产量及 B_1 的销量, 分配 6 (百吨) 至 B_1 , 并将 A_2 剩余的 2 (百吨) 运至 B_3 , 物资的调运量 x_{2j} 可列表 1-7。

对于工厂 A_3 的物资调运, 根据上述原则分配为: $X_{32} = 12$, $X_{34} = 6$;

由于销地 B_4 已由 A_3 运来 6 (百吨), 尚差的 6 (百吨) 由 A_1 运来; A_1 剩余的 8 吨运至 B_3 (见表 1-7)。