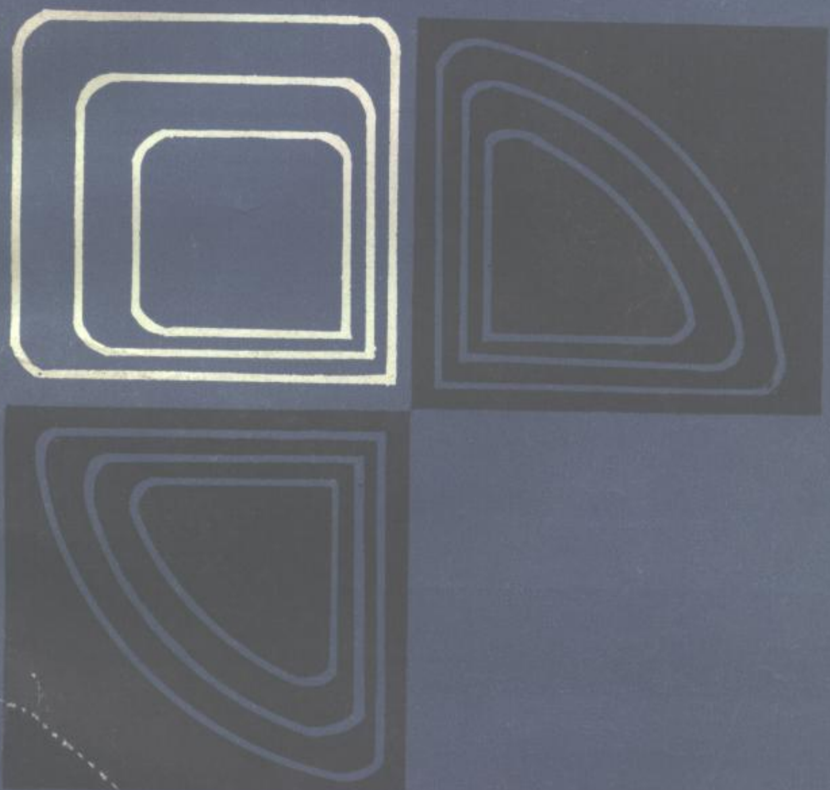
现代化管理方法讲座

宋河洲 编著



科学学丛刊

科学学与科学技术管理杂志社

现代化管理方法讲座

宋河洲 编著

科学学与科学技术管理杂志社

1983年.天津

目　　录

第一章　线性规划

在现实经济活动中，无论是分散的经济实体，还是社会经济整体的经济活动，都要追求明确的极值经济目标：最大的利润或最小的成本。但是，任何经济活动都要受到一定的限制，如土地资源、技术力量、可用设备、生产能力等等。线性规划就是研究解决一个受多个因素影响的、求解极值经济目标的方法之一。在线性规划问题中，目标函数和限制条件，都可以用基本变量的线性函数来表示。

一、线性规划的应用实例

例一：资源分配问题。某工厂可供使用的原材料、电力、劳动量都有限度，拟生产A、B两种产品，根据估计，生产每单位的A、B产品分别需要的原材料、电力、劳动量，以及所得利润等见表1-1，怎样安排生产才能获得最大利润呢？

表1-1

	产品A(x_1)	产量B(x_2)	各投入物的限度(b_i)
原材料(吨)	9	4	360
电力(瓩小时)	4	5	200
劳动量(人)	8	10	300
利润(万元)	7	12	

根据问题的性质，设A、B的产量分别为变量x_1及x_2，则可列出约束条件及目标函数方程：

$$\begin{cases} 9x_1 + 4x_2 \leqslant 360 & (1.1.1) \\ 4x_1 + 5x_2 \leqslant 200 & (1.1.2) \\ 3x_1 + 10x_2 \leqslant 300 & (1.1.3) \\ x_1 \geqslant 0, x_2 \geqslant 0 & (1.1.4) \end{cases}$$

求：$\max f(x) = 7x_1 + 12x_2$

即选择适当的x_1及x_2(1.1.5)使$f(x)$极大，

例二：运输问题。某种物品有m个产地A_i，产量分别为a_i $(i=1, 2, \cdots\cdots m)$，有n个销地B_j，销量分别为b_j $(j=1, 2, \cdots\cdots n)$，由A_i运至B_j每单位物品的运输费用为C_{ij}，如何安排货物的调运，才能使总的运输费用最小，见表1-2。

表1-2

销地j / 产地i	B_1	B_2	$\cdots B_j$	B_n	产量
A_1	X_{11} C_{11}	X_{12} C_{12}	X_{1j} C_{1j}	X_{1n} C_{1n}	a_1
A_2	X_{21} C_{21}	X_{22} C_{22}			a_2
$\vdots$ A_i	X_{i1} C_{i1}		X_{ij} C_{ij}		a_i
A_m	X_{m1} C_{m1}			X_{mn} C_{mn}	a_m
销量	b_1	b_2	b_j	b_n	

假设由产地A_i运至销地B_j的货物为变量x_{ij}，根据问题的性质可列出约束条件及目标函数式。

对于每一产地A_i的产量平衡：

$$x_{i1}+x_{i2}+\cdots\cdots+x_{in}=\sum_{j=1}^{n}x_{ij}\leqslant a_i$$

对于每一销地B_j的销量平衡：

$$x_{1j}+x_{2j}+\cdots\cdots+x_{mj}=\sum_{i=1}^{m}x_{ij}\geqslant b_j$$

$$x_{ij}\geqslant 0$$

求$\min f(x)=\sum_{i=1}^{m}\sum_{j=1}^{n}C_{ij}x_{ij}$，即选择适当的$x_{ij}$使$f(x)$极小。

二、线性规划的解法

线性规划问题，根据变量的多少和问题的繁简，常用的解法有：图解法、表上作业法、代数法和单纯形法。

1.图解法

解变量少于三个的线性规划问题，采用图解法是较便利和直观的。在平面直角坐标系中，一个线性方程可以表示出一根直线；在三度空间的直角坐标系中，一个线性方程可表示出一个平面。例如例一中所有的约束条件(直线)，所围成的凸多边形$P_0P_1P_2P_3P_4$，便构成了该题变量的可行性空间R，如(图1-1)。

如果在可行性空间内任取一点，并作出等值线，如图1-2直线EF上的每一点都能满足$7x_1+12x_2=168$。同样可以绘出利润更高的等值线。沿着利润增加的方向移至区域的隅角点P_3，便获得了目标函数的极大值。从图上可以量得$x_1=20$，$x_2=24$，此时最大利润为：$f(x)=7\times20+12\times24=$

428(万元)。

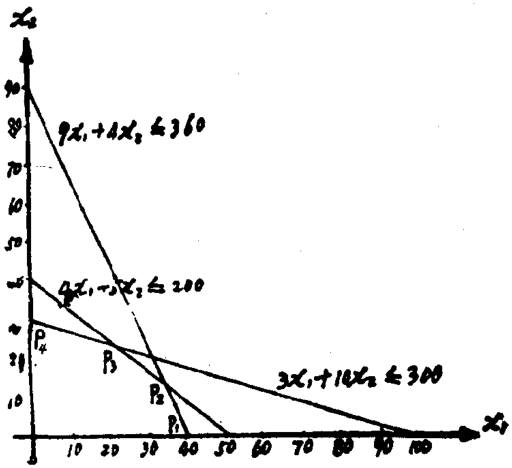


图1-1 可行性空间

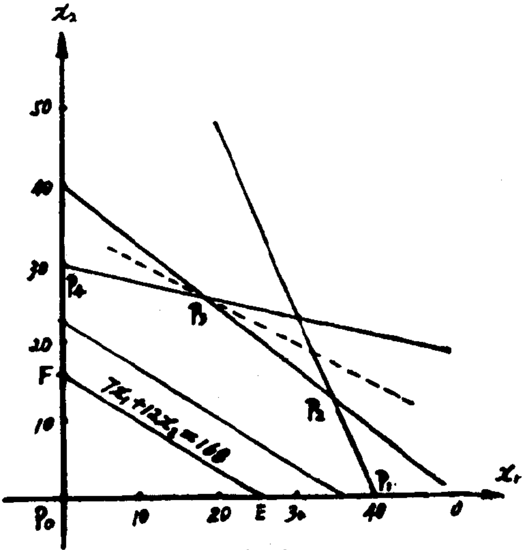


图1-2 求最优解

2.单纯形法

单纯形法是应用最广泛、最有效的线性规划方法之一，它能够处理任何多个变量的求解问题。图解法和代数法被看作是单纯形法的特殊情况，后者同前两者相比，求解过程就显得较复杂、冗长。

单纯形法要求问题要用明确的代数式表示约束条件和目标函数，引入松弛变量，将不等式方程变为等式方程，建立数学模型，这同代数法是相似的。单纯形法的计算过程称为迭代过程。首先是在满足所有约束条件时产生初始解，或称初始规划；再根据目标函数检查对初始规划的修正，将最有利的解结合进第二次解，所得新解总比先前的解产生较大的目标函数；然后重复机械的和数学的运算，每次迭代都进一步接近最优解，直到再无改进的可能时为止，就得到了最优解。

以例一来说明单纯形法的求解过程。

①根据题意列出约束条件和目标函数（同式1.1.1～1.1.5），引入松弛变量建立等值方程组。所谓松弛变量表示不等式左右两端松驰的余量。例如1.2.1式中x_3，表示生产x_1件产品A及x_2件产品B后，所剩余的原材料。

$$\begin{array}{lllll}
9x_1+4x_2 & +x_3 & & & =360 \quad (1.2.1)\\
4x_1+5x_2 & & +x_4 & & =200 \quad (1.2.2)\\
3x_1+10x_2 & & & +x_5 & =300 \quad (1.2.3)
\end{array}$$

$$x_1 \geqslant 0,\ x_2 \geqslant 0,\ x_3 \geqslant 0,\ x_4 \geqslant 0,\ x_5 \geqslant 0, \tag{1.2.4}$$

$$\max f(x) = 7x_1 + 12x_2 + 0x_3 + 0x_4 + 0x_5 \tag{1.2.5}$$

②选择初始基础变量，建立初始规划。选择初始基础变量的准则是使组成的基阵为单位阵 I，如在1.2.1～1.2.3式中，x_3、x_4、x_5即构成单位阵$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$，令非基础变量$x_1 = x_2 = 0$，则得到初始解：$x_3 = 360$，$x_4 = 200$，$x_5 = 300$，$f(x) = 0$。

③研究目标函数，必要时引入新的基础变量，修改初始规划。在实际运算中，为方便起见，目标函数式常改写为$f(x) - 7x_1 - 12x_2 - 0x_3 - 0x_4 - 0x_5$，如果各变量的系数（称作单纯形系数）中有负值，则表示目标函数f(x)还有改进的可能性。如果都为正，目标函数就没有再改进的可能了。根据此条判别准则，选取负系数最大者的变量(x_2)，作为新的基础变量。

④用新基对(1.2.1～1.2.3)等值方程及目标函数进行初等变换：

$$\frac{9}{4}x_1 + x_2 + \frac{1}{4}x_3 = 90 \tag{1.3.1}$$

$$\frac{4}{5}x_1 + x_2 + \frac{1}{5}x_4 = 40 \tag{1.3.2}$$

$$\frac{3}{10}x_1 + x_2 + \frac{1}{10}x_5 = 30 \tag{1.3.3}$$

比较各常数项(bi)与新基系数a_{ik}(k = 2)的比值bi/a_{ik}，选取最小者min(90，40，30) = 30作为新基可行解，即$x_2 = 30$，相应的等值方程式(1.3.3)称为关键方程式，新基系数$a_{32} =$

10称作关键元素。

令$x_1=x_5=0$，x_5退出原基础变量，得新基可行解：$x_2=30$，$x_3=240$，$x_4=50$，$f(x)=360$。

利用关键方程式(1.3.3)对等值方程(1.2.1～1.2.2)及目标函数进行初等变换，得新的标准式：

$$7.8x_1 \qquad\qquad + x_3 \qquad\qquad - 0.4x_5 = 240 \qquad (1.4.1)$$

$$2.5x_1 \qquad\qquad\qquad + x_4 - 0.5x_5 = 50 \qquad (1.4.2)$$

$$0.3x_1 + x_2 \qquad\qquad\qquad + 0.1x_5 = 30 \qquad (1.4.3)$$

$$f(x) - 3.4x_1 - 0x_3 - 0x_4 + 1.2x_5 = 360 \qquad (1.4.4)$$

在这个过程中，如果求得新基x_2的可行解为负，则表示不存在非负的可行域，也就没有最优解了。

⑤重复步骤③及④，直到单纯形系数均为非负值时，即表示不可能再有非基础变量作为新基。已求得的基础可行解就是最优解了。

根据(1.4.4式)x_1的系数为-3.4，取x_1为新基，并用新基x_1对1.4.1～1.4.3，1.4.4式进行初等变换，取min $\left(\frac{2400}{78}, 20, 100\right)=20$，得关键方程式：

$$x_1 + 0.4x_4 - 0.2x_5 = 20 \qquad (1.5.1)$$

根据新关键方程对标准式及目标函数进行变换：

$$x_3 - 3.12x_4 + 1.16x_5 = 84 \qquad (1.5.2)$$

$$x_2 - 0.12x_4 + 0.16x_5 = 24 \qquad (1.5.3)$$

$$f(x) + 1.36x_4 + 0.52x_5 = 428 \qquad (1.5.4)$$

此时，目标函数式(1.5.4)中各变量皆为正系数，已没有再改进的余地，最优规划值为$f(x)=428$，$x_4=x_5=0$，$x_3=84$，最优解为$x_1=20$，$x_2=24$。

单纯形法计算框图可表示为图1-3。

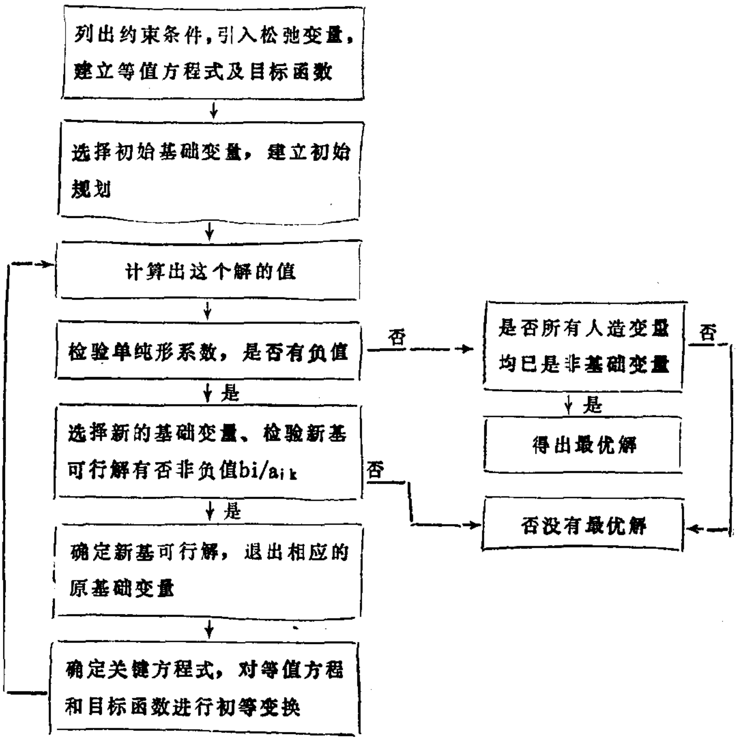


图1-3 单纯形法计算框图

上面分析的迭代过程，常用单纯形表直观简明地表达出来，既可清楚地看出整个的迭代计算过程，又有一定的格式可循。如表1-3～1-5。表中最上一行是各变量的标识符，左

边第一列为各基础变量的标识符，右边一列为基本可行解中基变量所得的值，加上非基变量为零的值，便得出一组基本可行解。最下边一行为单纯形系数的相反数，中间部分为约束条件的系数。

由步骤①、②作初始规划，由③、④作规划1：选择x_2为新基，同时将x_5退出原基础变量(表1-3)。

表1-3

Cj	7	12 ↓	0	0	0		
规划(基变量)	x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	bi	bi/a_{ik}
x_3	9	4	1			360	$\frac{360}{4}=90$
x_4	4	5		1		200	$\frac{200}{5}=40$
←x_5	8	10			1	300	$\frac{300}{10}=30$
Zj—Cj	-7	-12	0	0	0	0	

由步骤⑤，并重复③、④作规划2：选择x_1为新基，同时将x_4退出原基础变量(表1-4)。

重复步骤⑤作规划3，由目标函数可看出已求得最优解$x_1=20$，$x_2=24$，$f(x)=428$(表1-5)。

3.表上作业法

例二中的运输问题，同样可以采用上述的单纯形法求解。有时采用表上作业法也同样简单明了。

表1-4

Cj	7	12	0	0	0		
规　　划 (基变量)	x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	bi	bi/a_{ik}
x_3	7.8		1		-0.4	240	$\frac{240}{7.8}=30.8$
←x_4	2.5			1	-0.5	50	$\frac{50}{2.5}=20$
x_2	0.3	1			0.1	30	$\frac{30}{0.3}=100$
Zj—Cj	-3.4	0			+1.2	260	

表1-5

Cj	7	12	0	0	0		
规　　划 (基变量)	x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	bi	bi/a_{ik}
x_3			1	-3.12	1.16	84	
x_1	1			0.40	-0.20	20	
x_2		1		-0.12	0.16	24	
Zj—Cj	0	0	0	+1.36	+0.52	428	

为便于说明，将例二作为一个具体问题：来说明表上作业法的求解过程。

有A_1、A_2、A_3三家工厂生产同一产品，同时供应B_1、B_2、B_3、B_4四个地区，各厂的产量ai及各地区的销量bj（且

设 $\sum_{i=1}^{3} ai = \sum_{j=1}^{4} bj$)，i厂的单位产品运至j地的费用（或包括成本费用）为Cij均列于表1-6中，问应如何调运物资以使总的运输费用最小？（ai、bj的单位：百吨，Cij 的单位：千元）

表1-6

销地 j / 工厂 i	B_1	B_2	B_3	B_4	a_i
A_1	10	9	16	18	14
A_2	2	12	4	16	8
A_3	12	8	18	10	18
bj	6	12	10	12	40

为使总的运输费用最小，我们可以根据一定的原则（如按运费最小的优先安排调运供应），首先制订一个初始调运方案，而该方案不一定是最优方案；第二是检查该方案是否最优，如果不是，再按某种原则进行优化，直到获得最优方案。

（1）编制初始调运方案

根据运费最小优先供应的原则，C_{21}最小，并根据 A_2的产量及B_1的销量，分配 6（百吨）至B_1，并将A_2剩余的 2（百吨）运至B_3，物资的调运量x_{2j}可列表1-7。

对于工厂A_3的物资调运，根据上述原则分配为：$X_{32}=12$，$X_{34}=6$；

由于销地B_4已由 A_3 运来 6（百吨），尚差的 6（百吨）由A_1运来；A_1剩余的 8 吨运至B_3（见表1-7）。