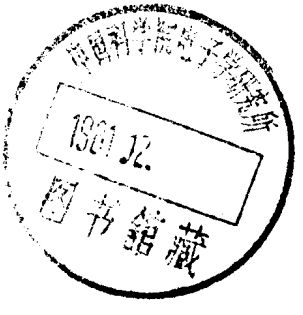
数学分析

[美] G·克莱纳尔 著

上海科学技术出版社

数 学 分 析

〔美〕G. 克莱鲍尔 著
庄 亚 栋 译



上海科学技术出版社

MATHEMATICAL ANALYSIS

G. Klambauer

MARCEL DEKKER, INC., New York, 1975

数 学 分 析

〔美〕G. 克莱鲍尔 著

庄 亚 栋 译

上海科学技术出版社出版

（上海瑞金二路 450 号）

新华书店上海发行所发行 江苏扬中印刷厂印刷

开本 850×1156 1/32 印张 11.25 字数 297,000

1981 年 4 月第 1 版 1981 年 4 月第 1 次印刷

印数 1—23,000

书号：13119·905 定价：（科四）1.25 元

序

本书的基本内容是实数系，序列和级数，连续性，一元函数微积分，一致收敛性以及度量空间的初步理论．它供学完了普通初等微积分后，在进一步的数学训练中，着重点从计算方面的“知其然”转移到强调概念方面的“知其所以然”，这样的一些大学生们使用．

本书文体简明，从读者较熟悉的内容引导到较抽象的理论．书中对命题的证明较为细致，而且，为帮助学生理解，重要的结果常常以几种不同的方法分别加以证明．除了正文以外，还有较多数量的富有启发性的练习，其中有许多附有解答．这些练习的目的在于补充和推广正文内所讨论的结果，以及阐明这些结果的用处．

在编写一本教材时，决定要写些什么材料当然是重要的，但我觉得不写些什么的问题甚至更为重要．因为“少而精”的原则已经被人们证明是一条成功的教育经验，所以，我断然把注意力集中于那些重要性已确定无疑的课题上，在不远离本书宗旨的范围内，试图把它们写得全面些．对更高深的内容及进一步的学习，请读者参阅我为研究生写的教材《实分析》（美国 Elsevier 出版公司出版，纽约，1973）．

（下为致谢部分，译略．）

G. 克莱鲍尔

目　录

第一章 实 数 系

在这一章，我们考察实数系的一些性质，它们对于真正地理解微积分的基本概念（如收敛性，连续性，微分和积分）是必不可少的．不过，对于初学者来说，本章前两节中命题的证明细节可以略去不看．

1．整数，有理数与无理数

全体正整数（自然数）之集 N 有两个重要性质．我们将叙述这两个性质并建立其等价性．

良序原理　任何非空正整数集有最小元素．

数学归纳原理　若 P 是具有下列性质的正整数集：

(i) P 含有数 1；

(ii) 只要 P 含有正整数 n，它也含有正整数 $n+1$；

则 P 含有所有正整数，即 $P=N$．

命题 1　数 1 是最小正整数．

证法 1　（根据数学归纳原理）　设 S 是所有 $\geqslant 1$ 的正整数集．显然，1 属于 S．若整数 n 属于 S，则 $n\geqslant 1$．因此 $n+1>n\geqslant 1$，$n+1$ 属于 S．由数学归纳原理，$S=N$，故所有正整数大于或等于 1．

证法 2　（根据良序原理）　从良序原理知道存在最小正整数，比如说是 s．设 $s<1$．以 s 乘不等式 $0<s<1$ 得 $0<s^2<s$，这说明 s 不是最小正整数．由于设 $s<1$ 导致矛盾，故这个假设不正确．因而 1 是最小正整数．

推论　若 n 是整数，则 n 与 $n+1$ 之间不存在整数．

证　设存在整数 k 满足 $n<k<n+1$，则 $0<k-n<1$，与 1 是

最小正整数矛盾.

注 断言"存在最大正整数 n"是错误的，因为由此将有 $n^2=n$，而这就是说 n 应该等于 1.

命题 2 数学归纳原理与良序原理等价，即，只要以整数的通常的算术性质为前提，就能从其中之一推出另一个.

证(第一部分) 设良序原理成立，S 是具有性质

(i) 1 属于 S;

(ii) 若 n 属于 S，则 $n+1$ 也属于 S

的正整数集. 我们应该证明 S 是所有正整数之集 N.

设 T 是所有不属于 S 的正整数之集. 若 T 非空，则由良序原理知 T 有最小元素，设为 t. 因为 1 属于 S 且 1 是最小正整数(见用良序原理建立的命题 1)，故 $t>1$. 这样，$t-1$ 必定是属于 S 的正整数，因为 $t-1<t$. 由于 $t=(t-1)+1$，S 的第二个性质保证 t 也属于 S. 但 S 与 T 不相交，故矛盾. 由于我们假设 T 非空导致矛盾，故 T 是空集，即 $S=N$.

(第二部分) 假定数学归纳原理成立. 其次，设存在非空正整数集 S 没有最小元素. 因为 1 是最小正整数(见用数学归纳原理建立的命题 1)，故 1 不属于 S 且小于 S 的所有元素.

设 T 是比 S 的所有元素小的全体正整数之集. 我们已经知道 1 属于 T. 设 n 属于 T. 若 $n+1$ 属于 S，则由于 n 与 $n+1$ 之间不存在整数(由命题 1 推论)，$n+1$ 将是 S 的最小元素；但这与我们对 S 的假设矛盾. 因而，n 属于 T 时 $n+1$ 必属于 T. 由数学归纳原理，T 含有全体正整数，从而 S 是空集. 但这又与原来假设 S 非空矛盾. 故若 S 是非空正整数集，则 S 有最小元素. 证毕.

数学归纳原理的一种修改过的、但等价的形式说：

满足下列两个性质的关于正整数的陈述对所有正整数成立：

(i) 此陈述对整数 1 成立；

(ii) 若这个陈述对正整数 n 成立，则对正整数 $n+1$ 也必成立.

定义 设 a、b 是整数，$b\neq 0$. 若存在第三个整数 c 使 $bc=a$，则称 a 能被 b 整除. 我们也说 b 整除 a 或 a 是 b 的倍数，记为 $b|a$. 若 $b\neq 0$ 且 a 不能被 b 整除，则写成 $b\nmid a$.

容易证明下列性质：

(i) $b|a$ 与 $a>0$，$b>0$ 蕴含 $1\leqslant b\leqslant a$；

(ii) $c|b$ 与 $b|a$ 蕴含 $c|a$；

(iii) 对所有整数 m，n，$c|a$ 与 $c|b$ 蕴含 $c|ma+nb$.

定义 设 $p>1$ 是整数，若除 1 以外 p 不能被比它小的正整数整除，则称 p 为素数. 不是素数的大于 1 的正整数叫合数.

命题 3 大于 1 的整数是素数或素数之积. 其次，如果不计因数的次序，则分解为素因数之积的方法唯一.

证 先证明合数可分解为素数之积.

设这个结论不正确，则存在不能写成素数之积的合数. 设 n 是这样的数里最小的一个(由良序原理，这样的 n 是存在的). 因为 n 是合数，故可写作

$$n=ab,\quad 1<a<n,\quad 1<b<n.$$

当 a 比 n 小时，a 是素数或素数之积；对 b 也一样. 但这样一来，$n=ab$ 是素数之积，矛盾. 因此合数都可以分解为素因数之积.

现在证明分解方法唯一. 设存在分解方法不唯一的合数. 这样的数里最小的一个(这里用到良序原理)设为

$$Q=p_1p_2\cdots p_k=q_1q_2\cdots q_j,$$

这里的 p_1，p_2，…，p_k 与 q_1，q_2，…，q_j 都是素数. 显然，所有的 p 与所有的 q 都不同，否则可约去某个 p 与某个 q 而得到更小的有两种不同分解的整数. 设

$$p_1\leqslant p_2\leqslant\cdots\leqslant p_k,\quad q_1\leqslant q_2\leqslant\cdots\leqslant q_j.$$

由于 $p_1\neq q_1$，故可设 $p_1<q_1$ 而不会带来什么不便. 考虑

$$P=p_1q_2\cdots q_j.$$

显然，$p_1|P$，$p_1|Q$，故 $p_1|(Q-P)$. 但

$$Q-P=(q_1-p_1)q_2q_3\cdots q_j,$$

因此 $Q-P$ 是正的. 把 q_1-p_1 写成素数之积，设为

$$q_1-p_1=r_1\cdots r_s,$$

则
$$Q-P=r_1\cdots r_s q_2\cdots q_j.$$

我们已经知道 p_1 与各个 q_i 都不相等. 由于 $p_1\nmid(q_1-p_1)$，故对所有 i 有 $p_1\nmid r_i$. 因此所有的 q 和 r 都与 p_1 不同. 另一方面，$Q-P$ 能被 p_1 整除，因而

$$Q-P=p_1 t_1\cdots t_h,$$

这里的各个 t 都是素数. 这样，我们得到了 $Q-P$ 的两种不同的因数分解，其中之一出现 p_1，另一种不出现 p_1. 这与 Q 的最小性矛盾，因为 $0<Q-P<Q$. 证毕.

命题 4 任意给定的素数的有限集之外存在另一个素数，即，不存在最大素数.

证 设 $q=2\cdot3\cdot5\cdots p$ 是所有 $\leqslant p$ 的素数之积. 数

$$q+1=(2\cdot3\cdot5\cdots p)+1$$

不能被这些素数里的任何一个整除. 由于 $q+1>1$，故 $q+1$ 或者是比 p 大的素数，或者能被比 p 大的素数整除. 所以素数必是无限个.

注 设 p_n 表示第 n 个素数. 由上述命题的证明可知，存在某个 $m>n$，使

$$p_m\mid(p_1p_2\cdots p_n+1),$$

因此 $p_{n+1}\leqslant p_m<p_n^n+1$.

现在易由数学归纳原理验证估计式

$$p_n<2^{2^n}.$$

若
$$p_1<2^2,\ p_2<2^{2^2},\ \cdots,\ p_n<2^{2^n},$$

则
$$p_{n+1}\leqslant p_1p_2\cdots p_n+1<2^{2+4+\cdots+2^n}+1<2^{2^{n+1}}.$$

命题 5 若 p 是素数，则 $\sqrt{p}$ 不是有理数，也就是说，它不是两个整数之比而是无理数.

证 这个结论是说：不可能有自然数 m，n 使

$$p=\left(\frac{m}{n}\right)^2=\frac{m^2}{n^2}.$$

设这是可能的，则有

$$pm^2=n^2.$$

但平方数总有偶数个素因数，故此式左端的数有奇数个素因数，而右端的数有偶数个素因数，与素因数分解的唯一性矛盾，因而上述等式不可能成立．证毕．

注 由上述命题的证明易知：若 $k(>1)$ 不是平方整数，则 $\sqrt{k}$ 必是无理数．事实上，设 p 是 k 的有奇指数的素因数，则 $kn^2=m^2$ 的左端有奇数个素因数 p，而右端没有，违反命题 3．

命题 6 设 k 是自然数，但不是平方整数．设 U 为平方大于 k 的所有正有理数之集，L 为不属于 U 的所有有理数之集，则 U 无最小元素，L 无最大元素．

证 设 L 含有最大元素 a，U 含有最小元素 b，则由假设有 $a^2<k$，$b^2>k$．取两个正整数 m，n，使

$$m^2>kn^2.$$

令

$$\frac{ma+nk}{na+m}=a', \qquad \frac{mb+nk}{nb+m}=b',$$

则

$$a'-a=\frac{n(k-a^2)}{na+m}>0, \qquad b'-b=\frac{m(k-b^2)}{nb+m}<0,$$

$$(a')^2-k=\frac{(ma+nk)^2-k(na+m)^2}{(na+m)^2}$$

$$=\frac{(m^2-kn^2)(a^2-k)}{(na+m)^2}<0,$$

$$(b')^2-k=\frac{(mb+nk)^2-k(nb+m)^2}{(nb+m)^2}$$

$$=\frac{(m^2-kn^2)(b^2-k)}{(nb+m)^2}>0.$$

因此，$a'>a$，$(a')^2<k$，$0<b'<b$，$(b')^2>k$；这就是说，a' 属于 L，b' 属于 U，违反 a 是 L 的最大元素及 b 是 U 的最小元素的假设．证毕．

注 命题 6 说明并非任何非空正有理数集都有最小元素．命题 5 及其后面的附注说明存在无限个无理数．为了能体会出无理数(的个数)对有理数(的个数)的压倒优势，我们指出，我们能作一

个开区间集覆盖数轴上的所有有理点，即，每个有理点属于这个开区间集的某个元素，而这些开区间的长度之和任意小；尽管有理数集稠密（这是指任两有理数间存在另一个有理数，例如中点就是），我们仍能这样做．事实上，由于可以使有理数集与正整数集 N 一一对应（这个事实在下面证明），我们可以考虑所有有理数之集的计数

$$r_1,\ r_2,\ r_3,\ \cdots,$$

并且绕数轴上的有理点 r_k 作开区间 I_k，使 r_k 为 I_k 的中点，I_k 长 $2^{-k}c$．这样得到的区间集覆盖所有有理点之集，其长度之和为

$$\frac{c}{2}+\frac{c}{2^2}+\frac{c}{2^3}+\cdots=c.$$

剩下来还要证明可以使有理数集与正整数集 N 一一对应．现在就来做这件事．

先考虑把正有理数 n/m 依次排列的规则，为避免有理数的表达式不唯一，设同时整除 n 与 m 的最大自然数是 1．若下列条件 (i) 或 (ii) 之一成立，则称 n_1/m_1 在 n_2/m_2 前面：

(i) $n_1+m_1<n_2+m_2$;

(ii) $n_1+m_1=n_2+m_2,\ n_1<n_2$.

这个规则确定了正有理数集的次序，它是这样开始的：

$$\frac{1}{1},\ \frac{1}{2},\ \frac{2}{1},\ \frac{1}{3},\ \frac{3}{1},\ \frac{1}{4},\ \frac{2}{3},\ \frac{3}{2},\ \frac{4}{1},\ \frac{1}{5},\ \frac{5}{1},\ \cdots.$$

这个包括所有正有理数的计数 $t_1,\ t_2,\ t_3,\ \cdots$ 可以修改成所有有理数的计数，例如以

$$0,\ t_1,\ -t_1,\ t_2,\ -t_2,\ t_3,\ -t_3,\ \cdots$$

这样的方式插进负数和零，从而完成我们的证明．

注意 有兴趣的读者可以查阅本章末的练习 74，它与上述附注是有连系的．

2. Dedekind 分割

这一节学习 R. Dedekind 提出的一种方法，它以有理数集的

分割构造实数. 学习的主要目标是说明实数系统次序的完备性(命题 30).

考虑以自然位置散布在数轴上的所有有理数(即形如 n/m 的数,其中 n 和 m 为整数, $m\neq 0$)之集 Q. 若 A 是 Q 的子集,则不属于 A 的所有有理数之集记为 A'.

基本定义 称有理数集 α 为分割,若

(I) α 至少含有一个有理数,但不含有所有有理数;

(II) 若 $p\in\alpha$, $q<p$ 而 q 是有理数,则 $q\in\alpha$;

(III) α 没有最大有理数.

记号约定 在这一节里,除非特别申明, p, q, r, s, … 等小写拉丁字母总用来表示有理数,而分割以小写希腊字母 α, β, γ, δ, … 表示.

命题 7 若 $p\in\alpha$, q 是有理数, $q\notin\alpha$, 则 $q>p$.

证 由(II),若 $q\leqslant p$ 则 $q\in\alpha$,故矛盾.

据此, α 的元素有时叫做 α 的下数,而不属于 α 的有理数叫 α 的上数. 分割 α 的所有上数之集记为 α'. 若对 α 的某个上数有比它小的 α 的上数,则称之为 α 的真上数.

命题 8 设 r 是有理数, α 是满足 $p<r$ 的所有有理数 p 之集,则 α 是分割,且 r 是 α 的最小上数.

证 验证 α 满足条件(I)(II)是简单的. 条件(III)也满足,因为,由 $p<(p+r)/2<r$ 知 $p\in\alpha$ 蕴含 $(p+r)/2\in\alpha$. 因此 α 是分割. 由于不会有 $r<r$, 故 $r\notin\alpha$. 因为 $p<r$ 蕴含 $p\subset\alpha$, 所以 r 是 α 的最小上数. 证毕.

上述命题中构造的分割叫有理分割. 当想要指明 α 是以上述构造方法与 r 相连系的有理分割时,我们写作 $\alpha=r^*$.

定义 设 α, β 是分割. 若 $p\in\alpha$ 蕴含 $p\in\beta$, 且 $p\in\beta$ 蕴含 $p\in\alpha$, 即若集 α 与 β 重合,则称分割 α 与 β 相等,记为 $\alpha=\beta$; 否则,写为 $\alpha\neq\beta$. 若存在有理数 p 属于 β 而不属于 α, 即若 α 是 β 的真子集,则称分割 β 大于分割 α, 记为 $\beta>\alpha$ 或 $\alpha<\beta$. 记号 $\alpha\leqslant\beta$ 指 $\alpha=\beta$ 或 $\alpha<\beta$, 记号 $\alpha\geqslant\beta$ 意味着 $\beta\leqslant\alpha$. 若 $\alpha\geqslant 0^*$, 则称 α 非

负．类似地，若$\alpha<0^*$，则α叫负分割，若$\alpha\leqslant 0^*$，则称α非正．

注意 符号$<$既用于表示两个有理数之间的不等，也用来表示两个分割间的不等；不过，采取什么含义使用这个符号从上下文之间将会明白地看出来．

命题9 分割满足下述定律：

(i) (三分律)对任两分割α和β，$\alpha=\beta$或$\alpha<\beta$或$\beta<\alpha$之一成立．

(ii) (传递律)对任意三个分割α，β和γ，若$\alpha<\beta$，$\beta<\gamma$，则$\alpha<\gamma$．

证 先考虑三分律．显然，若$\alpha=\beta$，则$\alpha<\beta$和$\beta<\alpha$都不可能成立．其次，$\alpha<\beta$与$\beta<\alpha$互斥，因为对有理数p，q而言，$p<q$与$q<p$不可能同时成立．因此这三个关系至多能成立一个．若$\alpha\neq\beta$，则这两个集不等；即，或存在有理数p属α而不属β(这表明$\beta<\alpha$)，或存在q属β而不属于α(这时$\alpha<\beta$)．

为证明传递律，注意$\alpha<\beta$意味着存在有理数p使$p\in\beta$且$p\notin\alpha$；又，由$\beta<\gamma$知道存在有理数q使$q\in\gamma$，$q\notin\beta$．但由$p\in\beta$与$q\notin\beta$得$p<q$，由此及$p\notin\alpha$得$q\notin\alpha$．因此$q\in\gamma$，$q\notin\alpha$，就是说$\alpha<\gamma$．证毕．

注 性质$\alpha=\beta$或$\alpha<\beta$或$\beta<\alpha$(且只有其一成立)蕴含：对任一分割α，$\alpha<\alpha$不成立．

命题10 设α，β是分割，γ是满足$r=p+q$的所有有理数r之集，这里$p\in\alpha$，$q\in\beta$．则γ是分割，叫做α与β的和，记为$\alpha+\beta$．

证 我们要证明γ是分割．因为α和β非空，故γ非空；又由于α'和β'非空(回想起"$'$"号表示该分割的上数之集)，故存在p_0与q_0，使对每个$p\in\alpha$及$q\in\beta$有$p_0>p$，$q_0>q$．这样一来，$p_0+q_0\notin\gamma$，从而γ不含有所有有理数．

其次要证明：若$r\in\gamma$，$s<r$，s是有理数，则$s\in\gamma$．因为$r\in\gamma$，故对某个$p\in\alpha$及$q\in\beta$有$r=p+q$．但$s=[p+(s-r)]+q$，并且$p+(s-r)\in\alpha$(因为α是分割)，$q\in\beta$，因此$s\in\gamma$．

最后，设 $r\in\gamma$，$r=p+q$，$p\in\alpha$，$q\in\beta$，则存在 s 使 $s>p$，$s\in\alpha$. 因此 $s+q>p+q$，$s+q\in\gamma$；这就是说 r 不是 γ 中的最大有理数.

命题 11 若 α，β，γ 是分割，则

(i) $(\alpha+\beta)+\gamma=\alpha+(\beta+\gamma)$；

(ii) $\alpha+\beta=\beta+\alpha$；

(iii) $\alpha+0^*=\alpha$.

证 性质(i)(ii)易由有理数的结合律及交换律得到. 对于(iii)：若 r 属于 $\alpha+0^*$，则对某个 $p\in\alpha$ 及 $q\in 0^*$(即 $q<0$)有 $r=p+q$，因此 $r=p+q<p$，$r\in\alpha$；若 $r\in\alpha$，则存在 s 使 $s\in\alpha$，$s>r$，因此由 $r=s+(r-s)$，$s\in\alpha$，$r-s<0$(即 $r-s\in 0^*$)得 $r\in\alpha+0^*$. 这说明集 α 与 $\alpha+0^*$ 重合. 证毕.

命题 12 任给分割 α 和正有理数 r，存在 p，q 使 $p\in\alpha$，$q\in\alpha'$，$q-p=r$ 且 q 不是 α' 的最小元素(若存在这样的最小元素)，即 q 是 α 的真上数.

证 取 $s\in\alpha$，$t\in\alpha'$，则 $t-s>0$，$r>0$，因而由有理数的阿基米德性质，存在正整数 n 使

$$nr>t-s,\quad \text{即}\quad t<s+nr.$$

故 $s+nr\in\alpha'$ 且存在唯一的正整数 $m\leqslant n$ 使

$$s+(m-1)r\in\alpha,\quad s+mr\in\alpha'.$$

若 $s+mr$ 不是 α 的最小上数，则取

$$p=s+(m-1)r,\quad q=s+mr;$$

若 $s+mr$ 是 α 的最小上数，则取

$$p=s+\left(m-\frac{1}{2}\right)r,\quad q=s+\left(m+\frac{1}{2}\right)r.$$

不管哪种情形，都有 $p\in\alpha$，q 不是 α 的最小上数且 $q-p=r$.

注 上述证明中用到了有理数的阿基米德性质：若 a，b 是正有理数，则存在自然数 n 使 $na>b$. 这个性质当然等价于这样的性质：若 r 是正有理数，则存在自然数 n 使 $n>r$. 由于 r 可以看作两个正整数之比，设为 p/q，故不等式 $n>r$ 归结为 $nq>p$. 但

阿基米德性质对正整数显然成立. 事实上, 若 p, q 是正整数, 则 pq 大于或等于 p 及 q 两者.

命题 13 对任意分割 α, β, γ, 若 $\alpha<\beta$, 则 $\alpha+\gamma<\beta+\gamma$.

证 由 $\alpha<\beta$, 存在 p 使 $p\in\beta$, $p\in\alpha'$, 因此存在 q 使 $q\in\beta$, $q\in\alpha'$, $q>p$. 这样, 由命题 12, 存在 r 和 s 使 $r\in\gamma$, $s\in\gamma'$ 且 $s-r=q-p$, 即 $p+s=q+r$. 但 $q+r\in\beta+\gamma$, 而(由于 p 大于 α 中的每个 v, s 大于 γ 中的每个 w) $p+s\notin\alpha+\gamma$. 因此 $\alpha+\gamma<\beta+\gamma$. 证毕.

推论 若 $\alpha+\gamma=\beta+\gamma$, 则 $\alpha=\beta$. 又, 若 $\alpha+\gamma=\alpha$, 则 $\gamma=0^*$.

命题 14 设 α 是分割, p 是 α 的真上数, 则所有有理数 $-p$ 之集 $(-\alpha)$ 是分割, 且 $\alpha+(-\alpha)=0^*$. 又, 若 β 是分割且 $\alpha+\beta=0^*$, 则 $\beta=(-\alpha)$.

证 设 q 是 α 的上数, $s=\max\{q, 0\}$, 这里的 $\max\{q, 0\}$ 表示两个数 q 与 0 中较大的一个. 那末 $s+1$ 是比 q 大的正有理数, $-(s+1)\in(-\alpha)$, 故 $(-\alpha)$ 非空. 其次, 对任一负的 $q\in\alpha$(不止一个), $-q$ 是有理数, 但 $-(-q)$ 不是 α 的真上数, 因此 $-q\notin(-\alpha)$; 这表明 $(-\alpha)$ 不含有所有有理数.

为检查基本定义的条件(II), 取 $r\in(-\alpha)$ 及有理数 $s<r$, 则 $-r$ 是 α 的真上数. 又 $-s>-r$, 故 $-s$ 也是 α 的真上数, 即 $s\in(-\alpha)$.

为检查基本定义的条件(III), 取 $r\in(-\alpha)$, 则 $-r$ 是 α 的真上数. 因此存在 α 的更小的真上数 p, 即 $p<-r$, $p\notin\alpha$. 所以 $r<-p$, 且 $s=\frac{1}{2}[r+(-p)]$ 是满足 $r<s<-p$ 及 $p<-s<-r$ 的有理数. 由 $p<-s$ 及 $p\notin\alpha$ 知 $-s$ 是 α 的真上数, 因而 $s=-(-s)\in(-\alpha)$. 此时, $r<s$ 说明 $(-\alpha)$ 没有最大元素.

上面证明了 $(-\alpha)$ 是分割, 现在要验证 $\alpha+(-\alpha)=0^*$.

任取 $r\in\alpha+(-\alpha)$ 并写 $r=s+(-p)$, 这里 $s\in\alpha$, $-p\in(-\alpha)$. 因此 $p\notin\alpha$(实际上 p 是 α 的真上数), $s<p$, 从而 $r=s-p<0$. 结果 $r\in0^*$ 且 $\alpha+(-\alpha)$ 是 0^* 的子集. 另一方面, 任取 $r\in0^*$, 则 $-r$

>0. 以 $-r$ 替代命题 13 中的 r, 得到 $p\in\alpha$ 及 α 的真上数 q 使 $q-p=-r$. 因此 $-q\in(-\alpha)$, $r=p-q=p+(-q)\in\alpha+(-\alpha)$. 这样, 0^* 是 $\alpha+(-\alpha)$ 的子集. 因而有 $\alpha+(-\alpha)=0^*$.

最后, 设 β 是满足 $\alpha+\beta=0^*$ 的任一分割, 则

$$\begin{aligned}\beta=0^*+\beta&=[\alpha+(-\alpha)]+\beta=(-\alpha)+(\alpha+\beta)\\&=(-\alpha)+0^*=(-\alpha),\end{aligned}$$

证毕.

命题 15 若 α, β 是分割, 则存在唯一的分割 γ 使 $\alpha+\gamma=\beta$.

证 令 $\gamma=\beta+(-\alpha)$, 则

$$\alpha+\gamma=\alpha+[\beta+(-\alpha)]=[\alpha+(-\alpha)]+\beta=0^*+\beta=\beta.$$

设 δ 是满足 $\alpha+\delta=\beta$ 的任一分割, 则

$$\delta=0^*+\delta=(-\alpha)+(\alpha+\delta)=(-\alpha)+\beta=\gamma.$$

注 命题 15 中构造的分割 γ 记为 $\beta-\alpha$. 即, 今后写 $\beta-\alpha$ 代替 $\beta+(-\alpha)$, 写 $-\alpha$ 代替 $(-\alpha)$.

命题 16 对任意分割 α 和 β, $-(-\alpha)=\alpha$, $-(\alpha-\beta)=-\alpha+\beta$.

证 由于 $(-\alpha)+[-(-\alpha)]=0^*=(-\alpha)+\alpha$, 故由命题 13 推论得 $-(-\alpha)=\alpha$. 若 $\alpha+\delta=\beta$, 则由命题 15, δ 必是 $\beta-\alpha$, 因此 $-(\beta-\alpha)=\alpha-\beta$. 证毕.

注 易知随 $-\alpha<0^*$, $-\alpha>0^*$, $-\alpha=0^*$ 而有 $\alpha>0^*$, $\alpha<0^*$, $\alpha=0^*$.

命题 17 设 α, β 是分割且 $\alpha\geqslant 0^*$, $\beta\geqslant 0^*$. 又设 γ 是 Q (Q 表示所有有理数之集) 的子集, 它由满足 $r<0$ 或 $r=pq$ 的所有元素 r 组成, 其中 $p\in\alpha$, $q\in\beta$, $p\geqslant 0$, $q\geqslant 0$, 则 γ 是分割. 如此构造的分割 γ 记为 $\alpha\beta$ 并叫做 α 和 β 的积.

证 γ 显然非空. 由于对任何 $s\in\alpha'$, $t\in\beta'$, $s>0$, $t>0$ 必有 $v=st\in\gamma'$ (否则有 $v=pq$, 这里 $p\in\alpha$, $q\in\beta$, $p>0$, $q>0$; 但 $0<p<s$, $0<q<t$, 结果 $pq<st$, 这不可能), 所以 γ' 也非空. 基本定义的条件 (I) 满足.

为验证条件 (II), 设 $r\in\gamma$, $t<r$, 则 $r<0$ 或 $r=pq$, $p\in\alpha$,