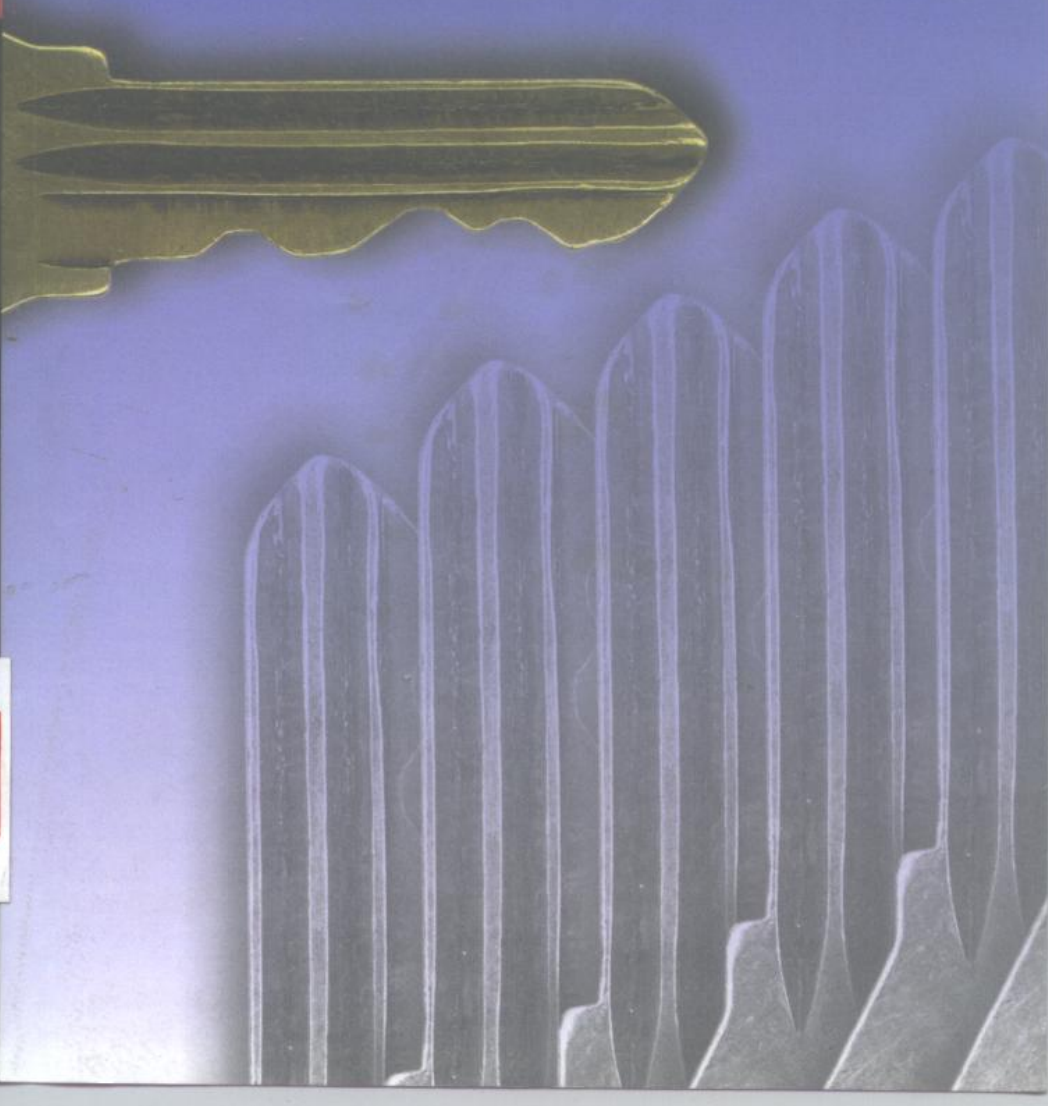
高等学校教学参考书

弹·塑性力学难题分析

黄文彬 曾国平 编著



社

高等学校教学参考书

弹·塑性力学难题分析

黄文彬　曾国平　编著

高等教育出版社

(京)112 号

图书在版编目(CIP)数据

弹·塑性力学难题分析/黄文彬,曾国平编著.-北京:高等教育出版社,1998
高等学校教学参考书
ISBN 7-04-006443-X

Ⅰ.弹… Ⅱ.①黄… ②曾… Ⅲ.①弹性力学-解题-高等学校-教学参考资料②塑性力学-解题-高等学校-教学参考资料 Ⅳ.034-44

中国版本图书馆 CIP 数据核字 (98) 第 00733 号

*

高等教育出版社出版
北京沙滩后街 55 号
邮政编码:100009　　传真:64014048　　电话:64054588
新华书店总店北京发行所发行
高等教育出版社印刷厂印装

*

开本 850×1168　1/32　印张 13.375　字数 340 000
1998 年 5 月第 1 版　1998 年 5 月第 1 次印刷
印数 0 001-2 193

定价 16.90 元

凡购买高等教育出版社的图书,如有缺页、倒页、脱页等质量问题者,请与当地图书销售部门联系调换

内容简介

本书是根据作者广泛收集的近年来在弹性力学和塑性力学领域的教学和科研成果，以及自身多年来在习题研究中的心得编著成集的。与一般的弹性力学、塑性力学习题集不同，所选的题目多数具有一定的难度，既突出解题技巧但又力求不太烦琐。书中对有关难点都作了详尽的分析。全书共分十章，弹性力学和塑性力学各占五章，内容包含应力与应变分析，弹性力学基本方程求解，弹性力学的平面问题、空间问题和变分求解；塑性力学的简单问题，屈服条件和广义屈服条件，单元体本构关系及其解，塑性力学平面问题和轴对称问题，塑性力学上下限定理与变分原理。

读者对象：高等学校理工科大学生、研究生，有关教师和科技工作者。

前　言

作者编写的《塑性力学难题分析》由于各种原因未能及时出版，为了扩大读者面，现重新编写了《弹·塑性力学难题分析》。从书名已可看出，这不是一般的习题集，而是要求有一定数量的题目有一定的难度。希望读者从书中题目的分析中，能加深对基本理论的理解和提高自己解题的技巧，作者正是从这方面来选择和编写的。相对来说弹性力学的难题要少一些，太繁的题目又不宜选用，因此需要在弹性力学的基本范围内选用难题，限于篇幅，弹性力学的分支内容，如板与壳、薄壁杆件、各向异性问题、复合材料、弹性稳定、线弹性断裂力学以及弹性动力学等都不在这里收集。国内如《力学与实践》等期刊登载一些讨论和研究与弹性力学有关的文章，都尽可能改编为难题进行分析。塑性力学难题相对要多一些，在作者参编的《塑性力学引论》(1992 年的修订版)一书中，已给出数量较多的塑性力学习题，其中不少题目难度较大。虽然作者已给出答案和提示，但不少读者反映独立解题还有不少困难，我们选择其中部分难题在此进行分析。因此，本书的出版无疑对他们会有很大的帮助。为节省篇幅，塑性力学的分支内容，如安定分析、弹塑性稳定以及弹塑性动力学等都不收入。

本书分成三部分，第一部分是题目，弹性力学与塑性力学各为五章；第二部分是答案，鼓励有较强解题能力的读者先独立求解，再与答案进行比较；第三部分是解题分析，如发现所得结果与答案不符或者根本无从下手，就可查看这部分对应题目的分析。对于难度大的题目阐述得更加详尽，这部分用了较多篇幅。本书所用符号已尽量按国家标准进行规范，但有些符号，流传已久，暂时还给以保留。

杨桂通教授和夏志皋教授对本书的初稿提出了十分宝贵的意

见，由于程建钢同志和其他一些同志的热心支持，高等教育出版社有关同志的关心帮助、克服重重困难，才使本书最终能与广大读者见面，在此作者谨向他们致以衷心的感谢，同时诚恳欢迎读者批评指正。

作者　1997

于中国农业大学(东校区)

责任编辑　黄　毅
封面设计　刘晓翔
责任绘图　尹　莉
责任校对　黄　毅
责任印制　宋克学

目　录

第一部分　题　　目

第一篇　弹性力学部分

第一章　应力与应变分析

1.1　设某点应力张量 σ_{ij} 的分量值已知，求作用在过此点平面 $ax+by+cz=d$ 上的应力矢量 $p_n(p_{nx},p_{ny},p_{nz})$，并求该应力矢量的法向分量 σ_n。

1.2　利用上题结果求应力分量为 $\sigma_x=0,\sigma_y=2,\sigma_z=1,\tau_{xy}=1,\tau_{xz}=2,\tau_{yz}=0$ 时，过平面 $x+3y+z=1$ 处的应力矢量 p_n，及该矢量的法向分量 σ_n 及切向分量 τ_n。

1.3　已知应力分量为 $\sigma_x=10,\sigma_y=5,\sigma_z=-1,\tau_{xy}=4,\tau_{xz}=-2,\tau_{yz}=3$，其特征方程为三次多项式 $\sigma^3+b\sigma^2+c\sigma+d=0$，求 b,c,d。如设法作变换，把该方程变为形式 $x^3+px+q=0$，求 p,q 以及 x 与 σ 的关系。

1.4　对 Cardan 方程 $x^3+px+q=0$，如满足关系 $(q/2)^2+(p/3)^3<0$ 及 $p<0$，则有三个不等的实根，$x_1=2\sqrt[3]{r}\cos\theta$，$x_2=2\sqrt[3]{r}\cos(\theta+2\pi/3)$，$x_3=2\sqrt[3]{r}\cos(\theta+4\pi/3)$，其中 $r=\sqrt{-(p/3)^3}$，$\theta=\arccos(-q/2r)/3$。利用该结果，求上题的三个主应力 $\sigma_1\geqslant\sigma_2\geqslant\sigma_3$。

1.5　已知应力分量中 $\sigma_x=\sigma_y=\tau_{xy}=0$，求三个主应力 $\sigma_1\geqslant\sigma_2\geqslant\sigma_3$。

1.6　已知主应力偏张量 s_1,s_2,s_3 满足特征方程 $s^3-J_2's-J_3'=0$，式中 $J_2'=(s_1^2+s_2^2+s_3^2)/2$，$J_3'=s_1s_2s_3$ 是应力偏张量的不变量，现在反过来要求用 J_2' 和 J_3' 来表示 s_1,s_2,s_3。

1.7　已知应力分量 $\sigma_x=0.9\sigma_s,\sigma_y=0.2\sigma_s,\sigma_z=0.1\sigma_s,\tau_{xy}=$

$0.1\sigma_s, \tau_{yz}=0.2\sigma_s, \tau_{zx}=0.1\sigma_s, \sigma_s$ 是材料的屈服极限，求 J_2', J_3' 及主应力 $\sigma_1, \sigma_2, \sigma_3$。

1.8 已知应力分量中 $\sigma_x=\sigma_y=\sigma_z=\tau_{xy}=0$，求三个主应力 $\sigma_i(i=1,2,3)$，以及每个主应力所对应的方向余弦 $(l_i, m_i, n_i)(i=1,2,3)$。

1.9 设某个主应力值 σ_i 已知，引进记号 $A=\tau_{xy}\tau_{yz}+\tau_{zx}(\sigma_i-\sigma_y)$，$B=(\sigma_i-\sigma_x)\tau_{yz}+\tau_{zx}\tau_{xy}$，$C=(\sigma_i-\sigma_x)(\sigma_i-\sigma_y)-\tau_{xy}^2$，$D=(A^2+B^2+C^2)^{1/2}$，试证该主应力 σ_i 的方向余弦为 $l=A/D, m=B/D, n=C/D$。利用该结果，对题 1.7，已求得一个主应力 $\sigma_1=0.901\sigma_s$，求对应的 l, m, n 值。

1.10 当 $\tau_{zx}=\tau_{yz}=0$ 时，证明 $J_3'=s_z(s_z^2-J_2')$ 成立。

1.11 试求应力偏张量不变量对应力张量 σ_{ij} 的微分 $\dfrac{\partial(\sqrt{J_2'})}{\partial\sigma_{ij}}$ 与 $\dfrac{\partial J_3'}{\partial\sigma_{ij}}$。

1.12 取 λ, G 为弹性常数，$\lambda=\dfrac{E\nu}{(1+\nu)(1-2\nu)}$，$G=\dfrac{E}{2(1+\nu)}$，试用应变不变量 I_1, I_2, I_3 表示应力不变量 J_1, J_2, J_3。

1.13 取 E, ν 为弹性常数，试将应变能 $U=\dfrac{1}{2}\sigma_{ij}\varepsilon_{ij}$ 分别用应力不变量 J_1, J_2, J_3 及应变不变量 I_1, I_2, I_3 表示。

1.14 对各向同性材料，由应变能 U 的非负条件，导出泊松比 ν 的允许变化范围为 $0\leqslant\nu\leqslant0.5$。

1.15 设 $x=\rho\cos\varphi, y=\rho\sin\varphi$，利用微分关系

$$\frac{\partial\rho}{\partial x}=\cos\varphi,\ \frac{\partial\rho}{\partial y}=\sin\varphi,\ \frac{\partial\varphi}{\partial x}=-\frac{\sin\varphi}{\rho},\ \frac{\partial\varphi}{\partial y}=\frac{\cos\varphi}{\rho} \qquad (1.1)$$

试将直角坐标系下的平面问题应力函数关系

$$\sigma_x=\frac{\partial^2\varphi_f}{\partial y^2},\ \sigma_y=\frac{\partial^2\varphi_f}{\partial x^2},\ \tau_{xy}=-\frac{\partial^2\varphi_f}{\partial x\partial y}$$

化成柱坐标下的关系

$$\sigma_\rho=\frac{1}{\rho}\frac{\partial\varphi_f}{\partial\rho}+\frac{1}{\rho^2}\frac{\partial^2\varphi_f}{\partial\varphi^2},\sigma_\varphi=\frac{\partial^2\varphi_f}{\partial\rho^2}$$

$$\tau_{\rho\varphi}=-\frac{\partial}{\partial\rho}\left(\frac{1}{\rho}\frac{\partial\varphi_f}{\partial\varphi}\right)$$

1.16 试利用 $u_x=u_\rho\cos\varphi-u_\varphi\sin\varphi,\varepsilon_x=\frac{\partial u_x}{\partial x}$及(1.1)式，导出极坐标下的应变与位移关系：

$$\left.\begin{aligned}\varepsilon_\rho&=\frac{\partial u_\rho}{\partial\rho}\\ \varepsilon_\varphi&=\frac{1}{\rho}\frac{\partial u_\varphi}{\partial\varphi}+\frac{u_\rho}{\rho}\\ \gamma_{\rho\varphi}&=\frac{1}{\rho}\frac{\partial u_\rho}{\partial\varphi}+\frac{\partial u_\varphi}{\partial\rho}-\frac{u_\varphi}{\rho}\end{aligned}\right\}\tag{1.2}$$

1.17 设直角坐标系三个正交单位矢量为 $\boldsymbol{e}_x,\boldsymbol{e}_y,\boldsymbol{e}_z$，柱坐标系的三个正交单位矢量为 $\boldsymbol{e}_\rho,\boldsymbol{e}_\varphi,\boldsymbol{e}_z$。并有关系

$$\boldsymbol{e}_\rho=\cos\varphi\,\boldsymbol{e}_x+\sin\varphi\,\boldsymbol{e}_y$$

$$\boldsymbol{e}_\varphi=-\sin\varphi\,\boldsymbol{e}_x+\cos\varphi\,\boldsymbol{e}_y$$

1)试证明除$\frac{\partial\boldsymbol{e}_\rho}{\partial\varphi}=\boldsymbol{e}_\varphi$,及$\frac{\partial\boldsymbol{e}_\varphi}{\partial\varphi}=-\boldsymbol{e}_\rho$外，$\boldsymbol{e}_\rho,\boldsymbol{e}_\varphi,\boldsymbol{e}_z$对 ρ,φ,z 的微分都为零。

2)设 $\boldsymbol{u}$ 为位移矢量，在柱坐标系表示为

$$\boldsymbol{u}=u_\rho\boldsymbol{e}_\rho+u_\varphi\boldsymbol{e}_\varphi+u_z\boldsymbol{e}_z\tag{1.3}$$

应变可以用下列矢量运算表示

$$\varepsilon_\rho=\frac{\partial\boldsymbol{u}}{\partial\rho}\cdot\boldsymbol{e}_\rho$$

$$\varepsilon_\varphi=\frac{1}{\rho}\frac{\partial\boldsymbol{u}}{\partial\varphi}\cdot\boldsymbol{e}_\varphi$$

$$\gamma_{\rho\varphi}=\frac{1}{\rho}\frac{\partial\boldsymbol{u}}{\partial\varphi}\cdot\boldsymbol{e}_\rho+\frac{\partial\boldsymbol{u}}{\partial\rho}\cdot\boldsymbol{e}_\varphi$$

试导出关系(1.2)式。

1.18 设将张量作为并矢矢量来处理，例如柱坐标下的应力张量可表示为

$$\boldsymbol{\sigma}=\boldsymbol{a}_\rho\boldsymbol{e}_\rho+\boldsymbol{a}_\varphi\boldsymbol{e}_\varphi+\boldsymbol{a}_z\boldsymbol{e}_z$$

$$\boldsymbol{a}_\rho=\sigma_\rho\boldsymbol{e}_\rho+\tau_{\rho\varphi}\boldsymbol{e}_\varphi+\tau_{\rho z}\boldsymbol{e}_z$$

$$\boldsymbol{a}_\varphi=\tau_{\rho\varphi}\boldsymbol{e}_\rho+\sigma_\varphi\boldsymbol{e}_\varphi+\tau_{\varphi z}\boldsymbol{e}_z$$

$$\boldsymbol{a}_z=\tau_{\rho z}\boldsymbol{e}_\rho+\tau_{\varphi z}\boldsymbol{e}_\varphi+\sigma_z\boldsymbol{e}_z$$

定义张量的散度为(在柱坐标时)矢量

$$\begin{aligned}\operatorname{div}\boldsymbol{\sigma}&=\frac{\partial\boldsymbol{a}_\rho}{\partial\rho}+\frac{\boldsymbol{a}_\rho}{\rho}+\frac{1}{\rho}\frac{\partial\boldsymbol{a}_\varphi}{\partial\varphi}+\frac{\partial\boldsymbol{a}_z}{\partial z}\\&=A\boldsymbol{e}_\rho+B\boldsymbol{e}_\varphi+C\boldsymbol{e}_z\end{aligned}$$

试证明当取 $A=B=C=0$ 时,即为无体力时柱坐标下的应力平衡方程

$$A=\frac{\partial\sigma_\rho}{\partial\rho}+\frac{\sigma_\rho-\sigma_\varphi}{\rho}+\frac{1}{\rho}\frac{\partial\tau_{\rho\varphi}}{\partial\varphi}+\frac{\partial\tau_{\rho z}}{\partial z}=0$$

$$B=\frac{\partial\tau_{\rho\varphi}}{\partial\rho}+\frac{1}{\rho}\frac{\partial\sigma_\varphi}{\partial\varphi}+\frac{\partial\tau_{\varphi z}}{\partial z}+2\frac{\tau_{\varphi\rho}}{\rho}=0$$

$$C=\frac{\partial\tau_{\rho z}}{\partial\rho}+\frac{1}{\rho}\frac{\partial\tau_{\varphi z}}{\partial\varphi}+\frac{\partial\sigma_z}{\partial z}+\frac{\tau_{\rho z}}{\rho}=0$$

1.19 设对(1.3)式的位移矢量 $\boldsymbol{u}$,规定 $\nabla\boldsymbol{u}$ 是并矢矢量,定义为

$$\nabla\boldsymbol{u}=\frac{\partial\boldsymbol{u}}{\partial\rho}\boldsymbol{e}_\rho+\frac{1}{\rho}\frac{\partial\boldsymbol{u}}{\partial\varphi}\boldsymbol{e}_\varphi+\frac{\partial\boldsymbol{u}}{\partial z}\boldsymbol{e}_z$$

而 $\nabla^2\boldsymbol{u}$ 又是矢量,定义为

$$\nabla^2\boldsymbol{u}=\operatorname{div}(\nabla\boldsymbol{u})=A\boldsymbol{e}_\rho+B\boldsymbol{e}_\varphi+C\boldsymbol{e}_z$$

试求以下三个问题:

1)给出 $\nabla\boldsymbol{u}$ 的张量表达形式。

2)给出 $\nabla^2\boldsymbol{u}$ 中的 A,B,C 表达式。

3)若无体力时的位移平衡方程是

$$\nabla\boldsymbol{u}+\frac{1}{1-2\nu}\mathbf{grad}\ (\operatorname{div}\boldsymbol{u})=0$$

式中 ν 是泊松比,试导出关系:

$$\nabla^2u_\rho-\frac{u_\rho}{\rho^2}-\frac{2}{\rho^2}\frac{\partial u_\varphi}{\partial\varphi}+\frac{1}{1-2\nu}\frac{\partial\theta}{\partial\rho}=0$$

$$\nabla^2 u_\varphi - \frac{u_\varphi}{\rho^2} + \frac{2}{\rho^2}\frac{\partial u_\rho}{\partial \varphi} + \frac{1}{1-2\nu}\frac{1}{\rho}\frac{\partial \theta}{\partial \varphi} = 0$$

$$\nabla^2 u_z + \frac{1}{1-2\nu}\frac{\partial \theta}{\partial z} = 0$$

$$\theta = \frac{\partial u_\rho}{\partial \rho} + \frac{u_\rho}{\rho} + \frac{1}{\rho}\frac{\partial u_\varphi}{\partial \varphi} + \frac{\partial u_z}{\partial z}$$

$$\nabla^2 = \frac{\partial^2}{\partial \rho^2} + \frac{1}{\rho}\frac{\partial}{\partial \rho} + \frac{1}{\rho^2}\frac{\partial^2}{\partial \varphi^2} + \frac{\partial^2}{\partial z^2}$$

1.20 设 $\boldsymbol{E} = \varepsilon_{ij}\boldsymbol{e}_i\boldsymbol{e}_j$ 是直角坐标系下的并矢矢量，$\boldsymbol{E}$ 的旋度也是并矢矢量，并定义为

$$\boldsymbol{B} = \mathbf{rot}\ \boldsymbol{E} = \boldsymbol{e}_k \times \frac{\partial}{\partial x_k}(\varepsilon_{ij}\boldsymbol{e}_i\boldsymbol{e}_j) = \boldsymbol{e}_k \times (\varepsilon_{ij}\boldsymbol{e}_i\boldsymbol{e}_j)_{,k}$$

试求：

1）给出 $\boldsymbol{B}$ 的张量表达形式。

2）求 $\boldsymbol{Q} = \mathbf{rot}\ \boldsymbol{B}^{\mathrm{T}}$，当 ε_{ij} 是应变张量分量时，由 $\boldsymbol{Q} = 0$ 可得六个应变协调方程。

1.21 将上题应用于柱坐标系，引进记号

$$\frac{\partial}{\partial \rho} = (\ )_{,1}, \quad \frac{1}{\rho}\frac{\partial}{\partial \varphi} = (\ )_{,2}, \quad \frac{\partial}{\partial z} = (\ )_{,3}$$

$$\boldsymbol{e}_\rho = \boldsymbol{e}_1, \quad \boldsymbol{e}_\varphi = \boldsymbol{e}_2, \quad \boldsymbol{e}_z = \boldsymbol{e}_3$$

对标架微分表示为

$$\boldsymbol{e}_{j,i} = \Gamma_{ijk}\boldsymbol{e}_k$$

容易证明：除 $\Gamma_{212} = 1/\rho$ 及 $\Gamma_{221} = -1/\rho$ 外，Γ 的其余分量均为零。试求：

1）设 $\boldsymbol{E} = \varepsilon_{ij}\boldsymbol{e}_i\boldsymbol{e}_j$，$\varepsilon_{ij}$ 是柱坐标下的应变分量，$\boldsymbol{B} = \mathbf{rot}\ \boldsymbol{E}$，求 $\boldsymbol{B}$ 的分量 B_{ij}。

2）$\boldsymbol{Q} = \mathbf{rot}\ \boldsymbol{B}^{\mathrm{T}}$，$\boldsymbol{Q} = 0$ 即为柱坐标下的六个应变协调方程

$$Q_{11} = \frac{\partial^2 \varepsilon_\varphi}{\partial z} + \frac{1}{\rho^2}\frac{\partial \varepsilon_z}{\partial \varphi^2} + \frac{1}{\rho}\frac{\partial \varepsilon_z}{\partial \rho} - \frac{2}{\rho}\frac{\partial^2 \varepsilon_{\varphi z}}{\partial \varphi \partial z} - \frac{2}{\rho}\frac{\partial \varepsilon_{\rho z}}{\partial z} = 0$$

$$Q_{22} = \frac{\partial^2 \varepsilon_z}{\partial \rho^2} + \frac{\partial^2 \varepsilon_\rho}{\partial z^2} - 2\frac{\partial^2 \varepsilon_{\rho z}}{\partial \rho \partial z} = 0$$

$$Q_{33}=\left(\frac{1}{\rho^2}\frac{\partial^2}{\partial\varphi^2}-\frac{1}{\rho}\frac{\partial}{\partial\rho}\right)\varepsilon_\rho+\frac{1}{\rho^2}\frac{\partial}{\partial\rho}\left(\rho^2\frac{\partial\varepsilon_\varphi}{\partial\rho}\right)-\frac{2}{\rho^2}\frac{\partial}{\partial\rho}\left(\rho\frac{\partial\varepsilon_{\rho\varphi}}{\partial\varphi}\right)=0$$

$$Q_{23}=Q_{32}=-\frac{1}{\rho}\frac{\partial^2\varepsilon_\rho}{\partial\varphi\partial z}-\frac{\partial}{\partial\rho}\left[\frac{1}{\rho}\frac{\partial}{\partial\rho}(\rho\varepsilon_{\varphi z})\right]+\frac{\partial}{\partial\rho}\left(\frac{1}{\rho}\frac{\partial\varepsilon_{\rho z}}{\partial\varphi}\right)+\frac{1}{\rho^2}\frac{\partial}{\partial\rho}\left(\rho^2\frac{\partial\varepsilon_{\rho\varphi}}{\partial z}\right)=0$$

$$Q_{13}=Q_{31}=-\frac{1}{\rho}\frac{\partial}{\partial\rho}\left(\rho\frac{\partial\varepsilon_\varphi}{\partial z}\right)+\frac{1}{\rho^2}\frac{\partial}{\partial\rho}\left(\rho\frac{\partial\varepsilon_{\varphi z}}{\partial\varphi}\right)-\frac{1}{\rho^2}\frac{\partial^2\varepsilon_{\rho z}}{\partial\varphi^2}+\frac{1}{\rho}\frac{\partial\varepsilon_{\rho\varphi}}{\partial\varphi\partial z}=0$$

$$Q_{12}=Q_{21}=-\frac{\partial}{\partial\rho}\left(\frac{1}{\rho}\frac{\partial\varepsilon_z}{\partial\varphi}\right)+\rho\frac{\partial}{\partial\rho}\left(\frac{1}{\rho}\frac{\partial\varepsilon_{\varphi z}}{\partial z}\right)+\frac{1}{\rho}\frac{\partial^2\varepsilon_{\rho z}}{\partial\varphi\partial z}-\frac{\partial^2\varepsilon_{\rho\varphi}}{\partial z^2}=0$$

1.22 设对于轴对称问题，引进

$$f_1=\varepsilon_\rho-\varepsilon_\varphi-\rho\frac{\partial\varepsilon_\varphi}{\partial\rho}$$

$$f_2=\rho\frac{\partial^2\varepsilon_\varphi}{\partial z^2}+\frac{\partial\varepsilon_z}{\partial\rho}-2\frac{\partial\varepsilon_{\rho z}}{\partial z}$$

试证明上题的 Q_{ij} 都可用 f_1,f_2 表示，当 $f_1=f_2=0$ 时，能保证 $Q_{ij}=0$。

1.23 在平面应变问题中 $\varepsilon_y=\gamma_{xz}=\gamma_{yz}=0$，而 $\varepsilon_x,\varepsilon_y,\gamma_{xy}$ 与 z 无关。试证明，只要满足一个协调方程 $\frac{\partial^2\varepsilon_x}{\partial y^2}+\frac{\partial^2\varepsilon_y}{\partial x^2}=\frac{\partial^2\gamma_{xy}}{\partial x\partial y}$ 就够了，其它协调方程都自动满足，而在柱坐标情形只需满足题 1.21 中的 $Q_{33}=0$ 一个方程就够了。

1.24 对平面应变问题，已知 $\varepsilon_\rho=(a_1\rho+a_2\rho^{-3}+a_3\rho^{-1})\cos\varphi$，$\varepsilon_\varphi=(b_1\rho+b_2\rho^{-3}+b_3\rho^{-1})\cos\varphi$，$\gamma_{\rho\varphi}=(c_1\rho+c_2\rho^{-3}+c_3\rho^{-1})\cos\varphi$，由 $Q_{33}=0$ 方程，导出这些系数之间的关系。

1.25 已知某轴对称问题的应变分量 ε_z 具有 $\varepsilon_z=f(z)$ 的形式，又设材料是不可压缩的，求 $\varepsilon_\rho,\varepsilon_\varphi$ 应具有什么形式？

1.26 已知应变分量有如下形式 $\varepsilon_x=a_1y^2+a_2xy^2+a_3y^3+a_4yz$，$\varepsilon_y=b_1x^2+b_2x^3+b_3x^2y+b_4xz$，$\varepsilon_z=d_1z+d_2z^2$，$\gamma_{xy}=c_1xy+c_2x^2y+c_3xy^2+c_4xz+c_5yz$，$\gamma_{xz}=\gamma_{yz}=0$，由应变协调方程，试导出

这些系数之间应满足什么关系。

1.27 已知应变分量有如下形式 $\varepsilon_x=\dfrac{\partial^2 f_1(x,y)}{\partial y^2}$，$\varepsilon_y=\dfrac{\partial^2 f_1}{\partial x^2}$，$\gamma_{xy}=-2\dfrac{\partial^2 f_1}{\partial x\partial y}$，$\gamma_{xz}=\dfrac{\partial f_2(x,y)}{\partial y}$，$\gamma_{yz}=-\dfrac{\partial f_2}{\partial x}$，$\varepsilon_z=f_3(z)$，由应变协调方程，试导出 f_1,f_2,f_3 应满足什么方程。

1.28 如果由温度 T 引起的应变

$$\varepsilon_x=\varepsilon_y=\varepsilon_z=\alpha T,\qquad \gamma_{xy}=\gamma_{yz}=\gamma_{zx}=0$$

如不产生应力，问对 T 有什么限制。

1.29 设应力和应变用矩阵表示为

$$\boldsymbol{\sigma}=(\sigma_1,\sigma_2,\sigma_3,\tau_{23},\tau_{31},\tau_{12})^{\mathrm{T}}$$

$$\boldsymbol{\varepsilon}=(\varepsilon_1,\varepsilon_2,\varepsilon_3,\gamma_{23},\gamma_{31},\gamma_{12})^{\mathrm{T}}$$

正交各向异性材料沿材料主轴方向时(即上式的 1,2,3 方向)有本构关系

$$\boldsymbol{\varepsilon}=\boldsymbol{s}\boldsymbol{\sigma},\qquad \boldsymbol{s}=\begin{pmatrix}\boldsymbol{A} & 0\\ 0 & \boldsymbol{B}\end{pmatrix}$$

$$\boldsymbol{A}=\begin{pmatrix}\dfrac{1}{E_1} & \dfrac{-\nu_{12}}{E_2} & \dfrac{-\nu_{13}}{E_3}\\[2ex] \dfrac{-\nu_{21}}{E_1} & \dfrac{1}{E_2} & \dfrac{-\nu_{23}}{E_3}\\[2ex] \dfrac{-\nu_{31}}{E_1} & \dfrac{-\nu_{32}}{E_2} & \dfrac{1}{E_3}\end{pmatrix},\boldsymbol{B}=\begin{pmatrix}\dfrac{1}{G_{23}} & 0 & 0\\[2ex] 0 & \dfrac{1}{G_{31}} & 0\\[2ex] 0 & 0 & \dfrac{1}{G_{12}}\end{pmatrix}$$

由矩阵的对称性应有

$$\frac{\nu_{ij}}{E_j}=\frac{\nu_{ji}}{E_i}\qquad (i,j=1,2,3)$$

在平面应力时，$\boldsymbol{\sigma},\boldsymbol{\varepsilon}$ 退化为

$$\boldsymbol{\sigma}=(\sigma_1,\sigma_2,\tau_{12})^{\mathrm{T}}$$

$$\boldsymbol{\varepsilon}=(\varepsilon_1,\varepsilon_2,\gamma_{12})^{\mathrm{T}}$$

本构关系退化为 $\boldsymbol{\sigma}=\boldsymbol{C}\boldsymbol{\varepsilon}$，试求 $\boldsymbol{C}$ 矩阵。

1.30 设上题的 $\boldsymbol{\sigma}$ 中的六个应力分量改用 $\sigma_i(i=1,2,\cdots,6)$