HUAZHONG UNIVERSITY OF SCIENCE AND TECHNOLOGY PRESS

工程数学(一)

GONGCHENG SHUXUE

华中理工大学数学系主编

华中理工大学出版社

高等学校教材

工　程　数　学

（一）

华中理工大学数学系主编

华中理工大学出版社

(鄂)新登字第10号

图书在版编目(CIP)数据

工程数学(一)/华中理工大学数学系主编
武汉:华中理工大学出版社, 1996.2
ISBN 7-5609-1255-9

Ⅰ.工…
Ⅱ.①华… ②林… ③施… ④汪…
Ⅲ.工程数学-线性代数-计算方法-概率论与数理统计
Ⅳ.O13

工程数学
(一)
华中理工大学数学系主编
责任编辑:龙纯曼 李立鹏
*
华中理工大学出版社出版发行
(武昌喻家山 邮编:430074)
新华书店湖北发行所经销
华中理工大学出版社照排室排版
中科院科技印刷厂印刷
*
开本:787×1092 1/16 印张:21 字数:518 000
1996年2月第1版 1996年2月第1次印刷
印数:1-6 000
ISBN 7-5609-1255-9/O·145
定价:16.50元

内容简介

本书为高等院校工科用工程数学课程教材，分（一）、（二）两册出版。《工程数学》（一）包括线性代数、计算方法、概率论与数理统计等三门课程内容；《工程数学》（二）包括复变函数与积分变换、数 学物理方程与特殊函数两门课程内容。该书根据国家教委高等学校工科数学课程教学指导委员会制订的《工科数学课程教学基本要求》编写，这次出版又根据 1993 年修订的《工科数学课程教学基本要求》进行了修改。本书适合高等学校工程各专业使用。

前　言

工程数学课程是高等学校工科的重要必修课程，为了适应教学改革和当前教学的需要，于1993年列为华中理工大学教学改革基金课题。《工程数学》教材是这个教研项目的重要组成部分，这套教材是由我系几位经验丰富的教师，根据国家教委高等学校工科数学课程教学指导委员会制订的《工科数学课程教学基本要求》，在教学实践的基础上首先写成讲义．而后，在多次的教学实践中使用过这套讲义，经多次修改，效果是好的．这次，又根据1993年修订的《工科数学课程教学基本要求》，对讲义的内容再次进行调整修订，由华中理工大学出版社正式出版．本教材适于高等学校工科各专业使用．在编写这套教材的过程中，作了如下的分工：

第一篇　线性代数．32～36学时，由林昇旭副教授编写；

第二篇　计算方法，40～42学时(包括上机)，由施超群副教授编写；

第三篇　概率论与数理统计，44～52学时，由汪昌瑞副教授编写；

第四篇　复变函数与积分变换，42～46学时，由黄先春、林益副教授编写；

第五篇　数学物理方程与特殊函数，32～36学时，由孙金海副教授编写．

为了出版与使用的方便，本教材分为两册．第一册包括前三篇，第二册包括后两篇；全书的习题，是在教学实践中不断积累、更新而成．既有基本概念、基本理论和基本方法的题目，又有在此基础上的提高题．在书的最后，附有习题的答案或提示，其目的是为了帮助读者克服在解题过程中的困难，而不是为了某些读者好逸之需．书中打星号“*”之处，是供某些专业实际需要时使用的内容．

本教材在编写过程中，曾得到华中理工大学教务处和数学系领导及许多同志们的关心与支持．校教改基金会本课题负责人、数学系林益副主任组织了本书的编写工作．高等学校工科数学课程教学指导委员会委员林化夷教授审阅了全部书稿．华中理工大学出版社的领导与责任编辑们，保证了本书的如期出版．所有这一切，对本书的诞生和完善，都起了关键性作用．为此，感谢他们的关心、支持与帮助．

由于编者水平有限，加之本书出版工作时间较紧．因此，书中考虑不周，乃至鱼鲁之误，自属难免，敬请读者惠予指正．

华中理工大学数学系

1995年12月

目　　录

第一篇　线性代数

第二篇 计算方法

第三篇 概率论与数理统计

第 一 篇

线性代数

林升旭　编

线性代数研究的对象，是一种可进行线性运算(加法和数乘)的代数结构. 它在 19 世纪已取得了光辉的成就. 本篇讨论的主要内容有：行列式，矩阵，线性方程组，向量空间与线性变换等. 这些内容是互相交错，密切相关的. 特别是其中的矩阵，不但是线性代数的理论基础，而且是微分方程，计算方法，离散数学的计算工具. 在线性代数的许多基本概念中，线性无关(相关)和矩阵的秩的重要性更为突出.

线性代数的应用极为广泛，它是工科工程数学中的首要部分.

第一章　行列式

行列式是线性代数中一个重要概念，也是解线性方程组的一个工具. 本章将由二、三阶行列式推广到 n 阶行列式，然后介绍行列式的基本性质和行列式的计算，最后用 Gramer 法则来求解线性方程组.

§1.1　二、三阶行列式

设二元线性方程组

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 = b_1, \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 = b_2, \end{cases} \tag{1.1.1}$$

其中 x_i 表示第 i 个未知数，a_{ij}表示处于(1.1.1)式中第 i 行第 j 列的元素. 用消元法先从(1.1.1)式中消去 x_2，得

$$(a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21})x_1 = a_{22}b_1 - a_{12}b_2.$$

当 $a_{11}a_{22}-a_{12}a_{21}\neq 0$ 时有

$$x_1 = \frac{a_{22}b_1 - a_{12}b_2}{a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21}}.$$

同样地，从(1.1.1)式中消去 x_1，可得

$$x_2 = \frac{a_{11}b_2 - a_{21}b_1}{a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21}}.$$

为便于记忆，我们引入记号

$$D=\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix}=a_{11}a_{22}-a_{12}a_{21}, \tag{1.1.2}$$

并称 D 为二阶行列式，简记为 $D=\det(a_{ij}),(i,j=1,2)$.

二阶行列式是两项的代数和，第一项是从左上角到右下角的对角线上两个元素的乘积，带上正号；第二项是从右上角到左下角的对角线两个元素的乘积，带上负号. 由此规则也有

$$D_1=\begin{vmatrix} b_1 & a_{12} \\ b_2 & a_{22} \end{vmatrix}=b_1a_{22}-a_{12}b_2, D_2=\begin{vmatrix} a_{11} & b_1 \\ a_{21} & b_2 \end{vmatrix}=a_{11}b_2-a_{21}b_1.$$

其中 D_i 表示把 D 中第 i 列换成(1.1.1)的右边常数列得到的行列式.

于是二元线性方程组的解就表为

$$x_1=\frac{D_1}{D}, x_2=\frac{D_2}{D}. \tag{1.1.3}$$

例 1 用二阶行列式解方程组

$$\begin{cases} 2x_1+x_2=-1, \\ 5x_1+3x_2=3. \end{cases}$$

解 计算二阶行列式

$$D=\begin{vmatrix} 2 & 1 \\ 5 & 3 \end{vmatrix}=1, D_1=\begin{vmatrix} -1 & 1 \\ 3 & 3 \end{vmatrix}=-6, D_2=\begin{vmatrix} 2 & -1 \\ 5 & 3 \end{vmatrix}=11,$$

由(1.1.3)式得：

$$x_1=D_1/D=-6, x_2=D_2/D=11.$$

对于三元线性方程组

$$\begin{cases} a_{11}x_1+a_{12}x_2+a_{13}x_3=b_1, \\ a_{21}x_1+a_{22}x_2+a_{23}x_3=b_2, \\ a_{31}x_1+a_{32}x_2+a_{33}x_3=b_3. \end{cases} \tag{1.1.4}$$

求解这个方程组，先消去前两式中的 x_3，得到一个只含未知数 x_1,x_2 的二元方程，再消去后两式中的 x_3，又得到一个只含 x_1,x_2 的二元方程，从而获得含 x_1,x_2 两个未知数的二元方程组. 按照解二元方程组的方法得

$$\begin{aligned}&(a_{11}a_{22}a_{33}+a_{12}a_{23}a_{31}+a_{13}a_{21}a_{32}-a_{13}a_{22}a_{31}-a_{11}a_{23}a_{32}-a_{12}a_{21}a_{33})x_1 \\ &=b_1a_{22}a_{33}+b_3a_{12}a_{23}+b_2a_{13}a_{32}-b_3a_{22}a_{13}-b_1a_{23}a_{32}-b_2a_{12}a_{33}.\end{aligned}$$

把 x_1 的系数记为

$$D=\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix}=a_{11}a_{22}a_{33}+a_{12}a_{23}a_{31}+a_{13}a_{21}a_{32}-a_{13}a_{22}a_{31}-a_{11}a_{23}a_{32}-a_{12}a_{21}a_{33}, \tag{1.1.5}$$

称 D 为**三阶行列式**. 它是由三行三列共 9 个元素构成的一个数. (1.1.5)式的右边有 6 个项，每项是由处于 D 中不同行不同列的三个元素的乘积，并按照一定的规则，带有正号或负号. 对于三阶行列式的六个项可用所谓**对角线法**来计算，其计算法则如图 1.1.1 所示.

从左上角到右下角的对角线叫**主对角线**，从右上角到左下角的对角线叫**副对角线**. 在对角线计算法则中，主对角线上三个元素之积及平行于主对角线上三个元素之积的项取正号，如图(1.1.1)式中用实数连接的三个项. 副对角线上三个元素之积及平行于副对角线上三个元素之

积的项取负号，如图(1.1.1)式中虚线连接的三个项.

我们称(1.1.5)式的 D 是方程组(1.1.4)式的**系数行列式**. 若 $D\neq 0$，则 x_1 可表为

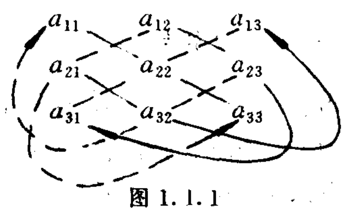

图 1.1.1

$$x_1=\frac{D_1}{D}=\frac{1}{D}\begin{vmatrix} b_1 & a_{12} & a_{13}\\ b_2 & a_{22} & a_{23}\\ b_3 & a_{32} & a_{33}\end{vmatrix}.$$

同样可得

$$x_2=\frac{D_2}{D},x_3=\frac{D_3}{D},\tag{1.1.6}$$

其中
$$D_2=\begin{vmatrix} a_{11} & b_1 & a_{13}\\ a_{21} & b_2 & a_{23}\\ a_{31} & b_3 & a_{33}\end{vmatrix},D_3=\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & b_1\\ a_{21} & a_{22} & b_2\\ a_{31} & a_{32} & b_3\end{vmatrix}.$$

D_i 是把系数行列式 D 中的第 i 列删去，换上(1.1.4)式的右边的常数列所得的行列式.

例 2 解三元线性方程组

$$\begin{cases}3x_1+2x_2-x_3=4,\\ x_1-x_2+2x_3=5,\\ 2x_1-x_2+x_3=3.\end{cases}$$

解 用对角线法计算行列式，得

$$D=\begin{vmatrix} 3 & 2 & -1\\ 1 & -1 & 2\\ 2 & -1 & 1\end{vmatrix}=8,D_1=\begin{vmatrix} 4 & 2 & -1\\ 5 & -1 & 2\\ 3 & -1 & 1\end{vmatrix}=8,$$

$$D_2=\begin{vmatrix} 3 & 4 & -1\\ 1 & 5 & 2\\ 2 & 3 & 1\end{vmatrix}=16,D_3=\begin{vmatrix} 3 & 2 & 4\\ 1 & -1 & 5\\ 2 & -1 & 3\end{vmatrix}=24,$$

故解得 $x_1=\frac{D_1}{D}=1,x_2=\frac{D_2}{D}=2,x_3=\frac{D_3}{D}=3.$

§1.2 n 阶行列式的概念

用对角线法计算二、三阶行列式，虽然简便直观，但是对高于三阶的行列式，该方法就不适用了. 在自然科学和技术中的许多问题往往归结为解线性方程组，而线性方程组未知数的个数一般都超过三个，甚至更多. 因此为了解决实际问题中大型方程组的求解问题，有必要把二、三阶行列式进一步推广. 为此我们先分析三阶行列式的展开项的结构，从中得到其一般规律性.

观察(1.1.5)式的三阶行列式 D 的右边，它由 $3!=6$ 项构成，每项是 3 个位于 D 中不同行不同列的元素之积. 如果我们把每一项的行下标都按自然顺序排列，那么列下标一共有六个排列：123，231，312，321，132，213 这是自然数 123 的所有全排列. 我们发现，前三个排列都由 123 经 0 次或两次对换而得到的，而后三个排列是由 123 经 1 次对换而得的. 例如 231 是把 123 中的 1 与 2 对换，再把 1 与 3 对换得来的. 又如 132 是把 123 中 2 与 3 对换而来的. 前三个排列对换次数皆为偶次，则(1.1.5)的展开式中对应的项取正号，后三个排列对换为奇次，则对应项取负号. 这就是说，行列式的项的符号与排列对换的奇偶性有关. 为了讲清楚 n 阶行列式的定

义，我们将引入排列逆序与奇偶性的概念.

一、排列的逆序

由自然数 1 2 3 4…n 按一定顺序排成一排，称为一个 **n 元排列**，记为 $i_1i_2\cdots i_n$. n 元排列的总数为 $n!$ 个. 例如自然数 1 2 3 的所有排列为 $3!=6$ 个，用 $i_1i_2i_3$ 表示这 6 个排列.

定义 1 在一个 n 元排列 $i_1i_2\cdots i_n$ 中，排在数字 i_p 之前比 i_p 大的数字的个数称为该数字的**逆序数**. 这个排列中所有数字的逆序数的总和称为这个排列的**逆序**. 记为 $\tau[i_1i_2\cdots i_n]$.

例 1 求下列排列的逆序

$$3241;\quad 13524;\quad n,n-1,\cdots\cdots 2,1.$$

解 在排列 3241 中，数字 1 的逆序数为 3，数字 4 的逆序数为 0，2 有逆序数为 1，3 的逆序数为 0，故

$$\tau[3241]=3+0+1+0=4.$$

同样可得

$$\tau[13524]=1+2=3,$$

$$\tau[n\ n-1\cdots 2\ 1]=(n-1)+(n-2)+\cdots+2+1=\frac{n(n-1)}{2}.$$

定义 2 若排列的逆序为奇(偶)数，则称为**奇(偶)排列**.

例 1 中排列 3241 是偶排列，13524 是奇排列，而排列 $n(n-1)\cdots\cdots 2\ 1$ 要根据 n 的取值来决定奇偶性. 自然数排列的逆序为零，是一个偶排列.

一个排列中，把某两个数字的位置互换，而其余的数字不动，就得到一个新的排列，这种变换称为一个**对换**. 而相邻两个数字的对换称为**邻换**. 对换有如下性质：

定理 1 一次对换改变排列的奇偶性.

证明 首先证明：一次邻换改变排列的奇偶性. 设 n 元排列，简记为，$\cdots\cdots i_p\,i_q\cdots\cdots$，将相邻两个数字 i_p,i_q 对换得到新排列$\cdots\cdots i_q\,i_p\cdots\cdots$，由于除 i_p,i_q 两个数字外，其余数字不动，因而其余数字之间的逆序数没有改变. 若 $i_p>i_q$ 时新排列逆序数比原排列的逆序数减少 1；若 $i_p<i_q$ 时，则新排列的逆序数增加 1，故一次邻换就使原排列偶(奇)变奇(偶).

其次设 n 元排列

$$\cdots\cdots i_p\,i_{p+1}\cdots i_{p+s}\,i_q\cdots\cdots,$$

数字 i_p 和 i_q 之间相隔 s 个数字. 要实现 i_p 和 i_q 的对换，可先把 i_p 与 i_{p+1}做邻换，再把 i_p 与 i_{p+2} 做邻换，如此继续下去，经 $s+1$ 次邻换就把 i_p 调到 i_q 之后，即

$$\cdots\cdots i_{p+1}\cdots\cdots i_{p+s}\,i_q\,i_p\cdots\cdots.$$

然后再把 i_q 依次做连续邻换到 i_{p+1}之前，即移到原来 i_p 的位置上，这样要经过 s 次邻换. 总共经 $2s+1$ 次邻换就完成了 i_p 与 i_q 的对换

$$\cdots\cdots i_q\,i_{p+1}\cdots\cdots i_{p+s}\,i_p\cdots\cdots.$$

由上面结论可知，一次对换改变排列的奇偶性.

二、n 阶行列式的定义

有了排列逆序的奇偶性概念，我们就可以把(1.1.5)的行列式表为如下形式

$$D=\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13}\\ a_{21} & a_{22} & a_{23}\\ a_{31} & a_{32} & a_{33}\end{vmatrix}=\sum_{[i_1i_2i_3]}(-1)^{\tau[i_1i_2i_3]}a_{1i_1}a_{2i_2}a_{3i_3},$$

其中$(-1)^{\tau[i_1i_2i_3]}$表示排列$i_1i_2i_3$的奇偶性来决定对应项的符号. $\sum\limits_{[i_1i_2i_3]}$表示对所有3元排列求和.

对于n阶行列式有

定义3 把n^2个数$a_{ij}, i, j=1,2,\cdots,n$,排成$n$行$n$列,如下形式所确定的数,记为

$$D=\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix}=\sum_{[i_1i_2\cdots i_n]}(-1)^{\tau[i_1i_2\cdots i_n]}a_{1i_1}a_{2i_2}\cdots a_{ni_n}, \tag{1.1.7}$$

称为**n阶行列式**. 简记为$D=\det(a_{ij})$. 在D中,横排称行,纵排称列,元素a_{ij}的第一个下标i表示该元素所在位置的行数,第二个下标j表示所在位置的列数,a_{ij}表示位于D中的第i行,第j列的元素.

在(1.1.7)式的右边的每项是n个数字乘积$a_{1i_1}a_{2i_2}\cdots a_{ni_n}$,其元素取之行列式$D$中不同行不同列. 当行下标按自然顺序排列时,相应的列下标排列是自然数$123\cdots n$的一个n元排列$i_1i_2\cdots i_n$. 若排列是偶的,则该项取正号,若排列是奇的,则取负号,用$(-1)^{\tau[i_1i_2\cdots i_n]}$来表示. 行列式$D$中共有$n!$个乘积项,以$\sum\limits_{[i_1i_2\cdots i_n]}$表示对所有$n$元排列求和.

例2 计算下三角行列式

$$D=\begin{vmatrix} a_{11} & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ a_{21} & a_{22} & 0 & \cdots & 0 \\ \vdots & & \ddots & & \vdots \\ \vdots & & & \ddots & 0 \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix}.$$

解 由于第一行除a_{11}外其余为零,要得到非零项,则行列式的通项中第一个元a_{1i_1}只能选a_{11},而第二个元素a_{2i_2}不能选取a_{21},因为同一项中元素不能有两个同时出现在同一列中,故只能选取a_{22}. 同理a_{3i_3}只能选取a_{33},……末行只能选取a_{nn},因而得

$$D=(-1)^{\tau[1\,2\cdots n]}a_{11}a_{22}\cdots a_{nn}=a_{11}a_{22}\cdots a_{nn}.$$

上面行列式的主对角线上方的元素皆为零,此行列式叫做**下三角行列式**. 下三角行列式等于主对角线上的元素的乘积. 若主对角线下方的元素皆为零的行列式,则叫做**上三角行列式**. 同样上三角行列式也等于主对角线上元素的乘积,即

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & \cdots & a_{1n} \\ & a_{22} & \cdots & \cdots & a_{2n} \\ & & \ddots & & \vdots \\ & & & \ddots & \vdots \\ & & & & a_{nn} \end{vmatrix}=a_{11}a_{22}\cdots a_{nn}.$$

特别

$$\begin{vmatrix} a_{11} & & & \\ & a_{22} & & \\ & & \ddots & \\ & & & a_{nn} \end{vmatrix}=a_{11}a_{22}\cdots a_{nn}.$$

上面未写出的元素都表示零元,称此行列式为**对角行列式**.

例 3 确定 4 阶行列式中一项 $a_{31}a_{13}a_{42}a_{24}$ 所带的符号.

解 把该项元素的行下标按自然顺序排列得 $a_{13}a_{24}a_{31}a_{42}$，则列下标排列的逆序为

$$\tau[3\ 4\ 1\ 2]=2+2+0+0=4,$$

该项取正号.

应当指出，n 阶行列式可以有若干种定义. 若把行列式每项的列下标按自然顺序排列，则行下标是 n 元排列的某一个排列，这样便可以得到行列式的另一个定义式

$$D=\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix}=\sum_{[i_1i_2\cdots i_n]}(-1)^{\tau[i_1i_2\cdots i_n]}a_{i_11}a_{i_22}\cdots a_{i_nn}. \qquad (1.1.8)$$

§1.3 行列式的性质

用行列式的定义来计算行列式，一般要算 $n!$ 个乘积项，且还要确定每项所带的符号，因此对于阶数较高的行列式，计算量是十分繁重的. 为了简化行列式的计算，本节给出了行列式的基本性质.

设 n 阶行列式

$$D=\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix},$$

把 D 的行与列互换，得到新的行列式，记为

$$D^T=\begin{vmatrix} a_{11} & a_{21} & \cdots & a_{n1} \\ a_{12} & a_{22} & \cdots & a_{n2} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{1n} & a_{2n} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix},$$

称 D^T 为 D 的**转置行列式**. 显示 $(D^T)^T=D$.

性质 1 行列式与它的转置行列式相等，即 $D^T=D$.

行列式的转置性质说明了行列式的行与列具有对称性. 因此凡是行列式的行具有的性质，列也必有同样的性质，反之亦然.

性质 2 用一个非零的数 k 乘行列式，等于行列式的某一行(列)元素都乘上 k，即

$$k\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix}=\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ ka_{i1} & ka_{i2} & \cdots & ka_{in} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix}. \qquad (1.1.9)$$

也可以说，行列式某行(列)的元素有公因子 k，则可以把 k 提出来.

性质 3 若行列式的一行(列)的每个元素都表成两数之和，则行列式等于下列两个行列式之和.

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{i1}+b_{i1} & a_{i2}+b_{i2} & \cdots & a_{in}+b_{in} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{i1} & a_{i2} & \cdots & a_{in} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ b_{i1} & b_{i2} & \cdots & b_{in} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix}. \tag{1.1.10}$$

或者说，若两个行列式中的第 i 行不同，而其余 $n-1$ 行对应相同，则两个行列式只对 i 行相加，其余保持不变.

性质 4 若对换行列式的任意两行(列)，则行列式变号，即

$$D = \begin{array}{r} \\ \\ i \\ \\ j \\ \\ \\ \end{array}\begin{vmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1n} \\ \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{i1} & \cdots & a_{in} \\ \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{j1} & \cdots & a_{jn} \\ \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{n1} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix} = - \begin{vmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1n} \\ \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{j1} & \cdots & a_{jn} \\ \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{i1} & \cdots & a_{in} \\ \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{n1} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix}\begin{array}{l} \\ \\ i \\ \\ j \\ \\ \\ \end{array}. \tag{1.1.11}$$

推论 1 行列式的两行(列)相同，则行列式等于零.

这是因为：若设 D 的 i 和 j 两行元素相同，则互换 D 的 i,j 两行，所得的行列式仍是 D，由性质 4 有 $D=-D$，从而 $D=0$.

推论 2 行列式两行(列)成比例，则行列式等于零.

性质 5 行列式 D 的第 j 行(列)元素乘以数 k，然后加到第 i 行(列)的对应元素上去，则行列式的值不变. 即

$$D = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{i1} & a_{i2} & \cdots & a_{in} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{i1}+ka_{j1} & a_{i2}+ka_{j2} & \cdots & a_{in}+ka_{jn} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{j1} & a_{j2} & \cdots & a_{jn} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix}. \tag{1.1.12}$$

证明 由行列式性质 3 及推论 2，(1.1.12)式的右端等于

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{i1} & a_{i2} & \cdots & a_{in} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{j1} & a_{j2} & \cdots & a_{jn} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ ka_{j1} & ka_{j2} & \cdots & ka_{jn} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{j1} & a_{j2} & \cdots & a_{jn} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix} = D + 0 = D.$$

例 1 计算

$$D=\begin{vmatrix}1&2&3&4\\2&3&4&5\\5&6&7&8\\6&7&8&9\end{vmatrix}.$$

解 用性质 5，将第一行乘(－2)加到第二行，第一行乘(－5)加到第三行，得

$$D=\begin{vmatrix}1&2&3&4\\0&-1&-2&-3\\0&-4&-8&-12\\6&7&8&9\end{vmatrix}=4\begin{vmatrix}1&2&3&4\\0&1&2&3\\0&1&2&3\\6&7&8&9\end{vmatrix}=0.$$

例 2 证明

$$D=\begin{vmatrix}1&p&q&r+s\\1&q&r&p+s\\1&r&s&p+q\\1&s&q&p+r\end{vmatrix}=0.$$

证明 把第二，三列都加到第 4 列上去得

$$D=\begin{vmatrix}1&p&q&p+q+r+s\\1&q&r&p+q+r+s\\1&r&s&p+q+r+s\\1&s&q&p+q+r+s\end{vmatrix}=(p+q+r+s)\begin{vmatrix}1&p&q&1\\1&q&r&1\\1&r&s&1\\1&s&q&1\end{vmatrix}=0.$$

例 3 计算

$$D_n=\begin{vmatrix}a&b&b&\cdots&b\\b&a&b&\cdots&b\\\vdots&&\ddots&\ddots&b\\\vdots&&&\ddots&\\b&\cdots&\cdots&b&a\end{vmatrix}.$$

解 将第二列至第 n 列都加到第一列上去得

$$D_n=\begin{vmatrix}a+(n-1)b&b&b&\cdots&b\\a+(n-1)b&a&b&\cdots&b\\\vdots&&\ddots&&\vdots\\\vdots&&&\ddots&\vdots\\a+(n-1)b&b&b&\cdots&a\end{vmatrix}=(a(n-1)b)\begin{vmatrix}1&b&b&\cdots&b\\1&a&b&\cdots&b\\\vdots&&\ddots&&\vdots\\\vdots&&&a&\vdots\\1&b&b&b&a\end{vmatrix},$$

再将上式第一行乘(－1)加到各行上去，得

$$D_n=(a+(n-1)b)\begin{vmatrix}1&b&b&\cdots&b\\0&a-b&0&\cdots&0\\0&0&a-b&\cdots&\cdots\\\cdots&\cdots&\cdots&\ddots&\\0&0&0&\cdots&a-b\end{vmatrix}=(a+(n-1)b)(a-b)^{n-1}.$$