泛函分析基础

刘培德　编

武汉大学出版社

泛函分析基础

刘培德　编

武 汉 大 学 出 版 社
1992

泛函分析基础
刘培德　编
*
武汉大学出版社出版发行
（430072 武昌 珞珈山）
武汉正佳文字处理
武汉大学印刷厂印刷
*
850×1168　1/32　7.5 印张　189 千字
1992 年 10 月第 1 版　1992 年 10 月第 1 次印刷
印数:1—2000
ISBN 7-307-01172-7/O・98
定价:2.60 元

内容简介

本书以简短的篇幅叙述了线性泛函分析的基础理论。全书分五章，按章序分别讲解度量空间的公理系统和点集拓扑性质、有界线性算子和有界线性泛函的基本定理、共轭空间与共轭算子、Hilbert 空间的几何学以及有界线性算子的谱理论。本书注重阐述空间和算子的一般理论；取材既有简捷的一面又有深入的一面；在突出基本理论框架的同时又有选择地叙述了它在若干方面的应用。本书虽然是为综合性大学高年级学生编写的教材，但也适宜作为师范院校和理工科大学的研究生、本科生的教科书或参考书。

前　言

本世纪初，分析数学中出现了抽象化的趋势，探求其中结论与方法的一般性和统一性是它的突出特点，泛函分析正是在这一趋势中产生的。这一趋势的出现并不是偶然的，一方面它反映了数学中积累的素材已足够丰富，并且不同学科（包括经典分析，变分学，积分方程等）的某些对象之间显示了思想上和方法上的相似之处，需要加以整理和总结；另一方面它反映了一种愿望：建立一套理论，能够对已有的或将要出现的同种类型的对象运用统一的方法去处理。这些愿望由于早期在数学物理和量子力学等学科中成功的运用而得到有力的支持。事实证明这些类型通常就是具有代数结构或拓扑结构的集合，而这里的方法则是代数的、几何的、分析的以及不断引入的新方法的综合运用。几十年来的历史告诉我们，泛函分析在其发展过程中保持了这一特点和风格，它不断地从其它学科吸取营养，通过加工和升华形成带系统性的新思想和新方法，然后返回到各学科中去解决理论的和应用的问题。这就无怪乎纯粹数学和应用数学的几乎所有学科领域都和泛函分析有着广泛的联系。从微分方程的现代理论、概率论、计算数学、现代物理、控制论到应用数学和工程技术都渗透着泛函分析的思想和方法。时至今日，泛函分析已成为内容丰富、方法系统，应用广泛并且仍在蓬勃发展的学科，同时也是从事数学理论研究和实际应用的人们不可缺少的一门学科。

对于泛函分析的内容可以作不同形式的分类，例如依照所研究的算子是否为线性的区分为线性的和非线性的泛函分析。也可

以依照基本空间的拓扑性质分为度量空间上的和一般拓扑空间上的泛函分析。但就其实质而言，泛函分析包括了三部分内容：空间理论、算子理论以及作为二者与其它学科相互联系的应用，三者有机地结合在一起。本书是为高年级大学生编写的教材，由于讲授时间所限，仅限于度量空间和线性泛函分析。希望以简短的篇幅叙述这一领域的基本思想方法和基本理论并提供相关学科以基本的工具。本教材着意加强基础理论的讲解，在突出理论框架的同时有重点地介绍对于其它学科的应用。我们一开始(第一章)便铺开了度量空间、赋范空间以及内积空间的公理体系并讨论它们彼此的联系，介绍了度量空间上的点集拓扑。对于泛函分析的基本定理(第二章)尽可能给出最广泛的形式。较为详细地介绍了 Banach 空间与其一次和二次共轭空间的相互关系，对于自反空间和一致凸空间也作了扼要介绍(第三章)。用较新的观点处理了 Hilbert 空间的几何结构问题。最后，第五章简要地叙述了紧算子，自共轭算子和有界算子的谱表示理论。书中有重点地选择不动点定理，Schauder 基问题，最佳逼近问题以及微分方程和 Fourier 分析中的问题作了介绍，以从中了解泛函分析对于其它学科的应用及相互联系。

本书自 1984 年以来为武汉大学数学系本科生所用讲义并先后在助教进修班和中法数学试验班讲授过。在正式出版之前又作了一定的修改和补充。

编者感谢李国平教授的支持和帮助，感谢赵俊峰教授和侯友良同志对原稿提出的宝贵意见。对于在本书编写和出版过程中给予帮助的同志这里也一并表示由衷的感谢。

由于学识浅薄，书中错误和漏洞定为不免，诚望读者给予批评指正。

编　者

1992.1.于武昌珞珈山

目　录

第一章　线性度量空间

正如前言中提到的，泛函分析的基础建立在两种结构之上，一种是代数结构即线性结构之上，另一个是拓扑（本书中体现为度量）结构之上. 本章将首先介绍线性空间、度量空间、赋范空间、内积空间的公理系统，讨论它们之间的相互关系；然后给出常用到的某些赋范空间的具体例子；在此基础上叙述度量空间的两个重要概念——完备性和紧性以及它们的某些应用. 本章提供了全书的基础知识.

§1　线性度量空间

今后我们以 Φ 代表标量域，即实数域 R 或复数域 C.

定义 1　设 X 为某个集合，其中规定了两种运算（"加法"与"数乘"），使得

（Ⅰ）　X 关于加法构成交换群，即对于 $\forall\, x,y\in X$，存在 $u\in X$，$u=x+y$ 称为 x 与 y 之和，满足

(1) $x+y=y+x$，

(2) $(x+y)+z=x+(y+z)$，

(3) 存在 $0\in X$ 使得 $\forall\, x\in X$，$x+0=x$，

(4) 对于 $\forall\, x\in X$，存在 $x'\in X$ 使得 $x+x'=0$ 记 $x'=-x$ 称为 x 的负元.

（Ⅱ）有数乘运算，对于 $\forall\, x\in X$，$a\in\Phi$，存在 $v\in X$，$v=ax$ 称为 a 与 x 的积，满足对于 $\forall\, a,b\in\Phi$，$x,y\in X$，

(1) $1x = x$;

(2) $a(bx) = (ab)x$;

(3) $a(x+y) = ax + ay$,

$(a+b)x = ax + bx$.

则 X 称为线性空间或向量空间，其中的元称为向量.

当 $\Phi = R$ 时称 X 为实向量空间.

当 $\Phi = C$ 时称 X 为复向量空间.

向量空间的子集合 E，若对于同样的标量域构成线性空间，则称 E 为 X 的线性子空间. 显然 E 是 X 的线性子空间，当且仅当 $\forall\ x, y \in E, \alpha, \beta \in \Phi$ 则 $\alpha x + \beta y \in E$.

我们采用以下记号：当 $x \in X, E_1, E_2 \subset X, \alpha \in \Phi$ 时，记

$$x + E_1 = \{x + x_1, x_1 \in E_1\}.$$

$$\alpha E_1 = \{\alpha x_1, x_1 \in E_1\}.$$

$$E_1 + E_2 = \{x_1 + x_2, x_1 \in E_1, x_2 \in E_2\}.$$

称 αE 是 E 的倍集，称 $E_1 + E_2$ 是 E_1, E_2 的(线性)和集. $x + E_1$ 是 $E_2 = \{x\}$ 时的简便写法.

注意，应该把线性空间的子集之间的这些运算与集合论中“并”与“交”的运算区别开来. 就运算性质来说，一般地，当 $E \subset X$ 时，$2E \subset E + E$，其中的包含关系可能是严格的. 此外，对于 $\forall\ E \subset X$，$-E$ 有明确的意义；若 $E \neq \varnothing$，则 $E - E \neq \varnothing$ 等等.

X 的子集 E 称为是凸的，若对于 $\forall\ x, y \in E, 0 \leqslant r \leqslant 1, rx + (1-r)y \in E$. 对于任一集合 $E \subset X$，记

$$\mathrm{co}\{E\} = \left\{\sum_{i=1}^{n} r_i x_i, x_i \in E, r_i \geqslant 0, \sum_{i=1}^{n} r_i = 1, n = 1, 2\cdots\right\},$$

称 co$\{E\}$是 E 的凸壳。形如 $\sum_{i=1}^{n} r_i x_i$ 的元素称为 $x_1, \cdots, x_n$ 的凸组合. 记

$$\mathrm{Span}\{E\} = \left\{\sum_{i=1}^{n} a_i x_i, x_i \in E, a_i \in \Phi, n = 1, 2\cdots\right\},$$

称 Span$\{E\}$是由 E 张成的子空间，形如 $\sum_{i=1}^{n} a_i x_i$ 的元素称为 x_1，$\cdots$，x_n 的线性组合.

命题1 (1)co$\{E\}$是 X 中的凸集，它是 X 中包含 E 的所有凸集的交集.

(2)Span$\{E\}$是 X 的线性子空间，它是 X 中包含 E 的所有线性子空间的交集.

证明 这里仅证(1)，类似的方法可以证明(2).

1° co$\{E\}$是凸集. 实际上对于$\forall\ x,y\in$ co$\{E\}$，不妨设 $x=\sum_{i=1}^{n} r_i x_i$，$y=\sum_{j=1}^{m} s_j y_j$，其中 $x_i,y_j\in E$，$r_i\geqslant 0$，$s_j\geqslant 0$，$\sum_{i=1}^{n} r_i=1$，$\sum_{j=1}^{m} s_j=1$. 对于$\forall\ r$，$0\leqslant r\leqslant 1$，由于

$$rx+(1-r)y=\sum_{i=1}^{n} r r_i x_i+\sum_{j=1}^{m}(1-r)s_j y_j,$$

$$\sum_{i=1}^{n} r r_i+\sum_{j=1}^{m}(1-r)s_j=r+(1-r)=1;$$

由 co$\{E\}$的定义知道 $rx+(1-r)y\in$ co$\{E\}$. 故 co$\{E\}$是凸集.

2° 对于任一凸集 A，A 中任意 n 个元素的凸组合仍在 A 中. 我们用归纳法证之. 当 $n=2$ 时，只要 $x_1,x_2\in A$，$r_1+r_2=1$，$r_i>0$，则 $r_1x_1+r_2x_2\in A$，这由定义直接得出. 现在设 $n=k$ 时成立，我们证明 $n=k+1$ 也成立. 实际上若 $x_1,\cdots,x_k,x_{k+1}\in A$，$r_i>0$，$\sum_{i=1}^{k+1} r_i=1$，注意 $\sum_{i=1}^{k}\frac{r_i}{1-r_{k+1}}=1$. 由归纳假设 $x=\sum_{i=1}^{k}\frac{r_i x_i}{1-r_{k+1}}\in A$，从而 $(1-r_{k+1})x+r_{k+1}x_{k+1}=\sum_{i=1}^{k+1} r_i x_i\in A$.

3° 设 $\{E_\lambda,\lambda\in\Lambda\}$ 是包含 E 的全体凸集，由 $E\subset E_\lambda$，显然 co$\{E\}\subset$ co$\{E_\lambda\}$. 由 2°，co$\{E_\lambda\}=E_\lambda$，从而 co$\{E\}\subset\bigcap_{\lambda\in\Lambda}E_\lambda$. 由 1°，co$\{E\}$ 是包含 E 的凸集，从而有 $\lambda_0\in\Lambda$，co$\{E\}=E_{\lambda_0}$，于是

$$\text{co}\{E\}=E_{\lambda_0}\supset E_{\lambda_0}\cap\Big(\bigcap_{\lambda\neq\lambda_0}E_\lambda\Big)=\bigcap_{\lambda\in\Lambda}E_\lambda.$$

总之，co$\{E\}=\bigcap_{\lambda\in\Lambda}E_\lambda$.

线性空间 X 中的元素 x_1，…，x_n 称为是线性无关的，若对于 $\forall\, a_1$，…，$a_n\in\Phi$，$a_1x_1+\cdots+a_nx_n=0$ 时 $a_1=\cdots=a_n=0$. X 的子集合 E 称为是线性无关集，若 E 中任意有限多个元素都线性无关，不是线性无关的集合称为是线性相关的. 若 E 线性无关并且 $\mathrm{Span}\{E\}=X$,则称 E 是 X 的基底（Hamel 基）. 此时若 E 仅由有限个元素 x_1，…，x_n 组成，则称 X 是 n 维空间，记为 $\dim X=n$. 若 E 由无穷多个元素构成，称 X 为无穷维的，记为 $\dim X=\infty$. 当 $X=\{0\}$ 时，记 $\dim X=0$.

利用 Zorn 引理（见本书附录）可以证明，任一线性空间必存在极大线性无关集合，这一集合即是 X 的 Hamel 基. 换句话说，任一线性空间必存在 Hamel 基.

例 1 有限维空间.

其中的每个元是一个 n 数组 $x=(x_1,\cdots,x_n)$，$x_i\in\Phi$，定义

$$(x_1,\cdots,x_n)+(y_1,\cdots,y_n)=(x_1+y_1,\cdots,x_n+y_n),$$
$$a(x_1,\cdots,x_n)=(ax_1,\cdots,ax_n)(a\in\Phi).$$

这些 n 数组构成线性空间，其维数为 n.

例 2 无穷序列空间.

其中的每个元都是一个无穷序列 $x=(x_1,x_2,\cdots)$，$x_n\in\Phi$，定义

$$(x_1,x_2,\cdots)+(y_1,y_2,\cdots)=(x_1+y_1,x_2+y_2,\cdots),$$
$$a(x_1,x_2,\cdots)=(ax_1,ax_2,\cdots)(a\in\Phi),$$

则无穷序列空间是线性空间，其维数是无穷的.

例 3 函数空间.

设 Ω 为任一点集，X 是在 Ω 上定义的标量值函数全体，规定 $f=f(t)$、$g=g(t)$时，

$$(f+g)(t)=f(t)+g(t),$$
$$(af)(t)=af(t)\quad(a\in\Phi).$$

容易验证 X 是线性空间.

今后对于有限维空间，无穷序列空间和函数空间将分别采用

以上规定的线性运算.

定义 2 设 X 为某个集合,若对于 $\forall\ x,y\in X$,对应有实数 $\rho(x,y)$,满足

(1) $\rho(x,y)\geqslant 0$, $\rho(x,y)=0$ 当且仅当 $x=y$.

(2) $\rho(x,y)=\rho(y,x)$.

(3) $\rho(x,z)\leqslant\rho(x,y)+\rho(y,z)$(三角不等式). 则称 ρ 是 X 上的度量函数,称 X 为度量空间,有时为了明确记为 (X,ρ).

度量空间的子集合 E,仍以 ρ 为 E 上度量构成的度量空间称为 (X,ρ) 的子空间.

例 4 对于 n 维空间中的点 $x=(x_1,\cdots,x_n)$ 和 $y=(y_1,\cdots,y_n)$ 定义

$$\rho(x,y)=\Big(\sum_{i=1}^{n}|x_i-y_i|^2\Big)^{1/2},$$

容易验证 ρ 是度量函数. 其中的三角不等式即数学分析中常用的 Minkowski 不等式

$$\Big(\sum_{i=1}^{n}|x_i-z_i|^2\Big)^{1/2}\leqslant\Big(\sum_{i=1}^{n}|x_i-y_i|^2\Big)^{1/2}+\Big(\sum_{i=1}^{n}|y_i-z_i|^2\Big)^{1/2},$$

(可直接证明)记此空间为 (Φ^n,ρ),称之为欧几里德空间.

在 Φ^n 上还可以定义其它度量,例如 $\tilde{\rho}(x,y)=\max\limits_{1\leqslant i\leqslant n}|x_i-y_i|$,此时 $(\Phi^n,\tilde{\rho})$ 仍是度量空间. 但须注意应把 (Φ^n,ρ) 与 $(\Phi^n,\tilde{\rho})$ 视为不同的度量空间.

例 5 空间 s.

考虑例 2 中定义的线性空间,对于 $x=(x_n)$, $y=(y_n)$ 定义

$$\rho(x,y)=\sum_{i=1}^{\infty}\frac{1}{2^i}\,\frac{|x_i-y_i|}{1+|x_i-y_i|}.$$

现在证明 ρ 是 s 上的度量函数.

(1) 显然 $\rho(x,y)\geqslant 0$.

若 $\rho(x,y)=0$,则必 $|x_i-y_i|=0$,即 $x_i=y_i\ (i=1,2,\cdots)$,故 $x=y$.

(2) $\rho(x,y)=\rho(y,x)$显然.

(3) 考虑函数 $f(t)=\dfrac{t}{1+t}$, $t\geqslant 0$. 由于 $f(t)$的递增性,对于任意实数 a,b,由 $|a+b|\leqslant|a|+|b|$得到

$$\frac{|a+b|}{1+|a+b|}\leqslant\frac{|a|+|b|}{1+|a|+|b|}\leqslant\frac{|a|}{1+|a|}+\frac{|b|}{1+|b|},$$

所以

$$\begin{aligned}\rho(x,z)&=\sum_{i=1}^{\infty}\frac{1}{2^i}\frac{|x_i-z_i|}{1+|x_i-z_i|}\\&=\sum_{i=1}^{\infty}\frac{1}{2^i}\frac{|x_i-y_i+y_i-z_i|}{1+|x_i-y_i+y_i-z_i|}\\&\leqslant\sum_{i=1}^{\infty}\frac{1}{2^i}\left(\frac{|x_i-y_i|}{1+|x_i-y_i|}+\frac{|y_i-z_i|}{1+|y_i-z_i|}\right)\\&=\rho(x,y)+\rho(y,z).\end{aligned}$$

例 6 空间 $C[a,b]$.

区间$[a,b]$上的连续函数全体,对于$\forall\ x,y\in C[a,b]$,定义

$$\rho(x,y)=\max_{a\leqslant t\leqslant b}|x(t)-y(t)|.$$

ρ 是 $C[a,b]$上的度量函数. 容易验证:

1° $\rho(x,y)\geqslant 0$,若 $\rho(x,y)=0$ 则对于$\forall\ t\in[a,b]$, $x(t)=y(t)$,故 $x=y$.

2° 显然 $\rho(x,y)=\rho(y,x)$.

3°
$$\begin{aligned}\rho(x,z)&=\max_{a\leqslant t\leqslant b}|x(t)-z(t)|\\&\leqslant\max_{a\leqslant t\leqslant b}\{|x(t)-y(t)|+|y(t)-z(t)|\}\\&\leqslant\max_{a\leqslant t\leqslant b}|x(t)-y(t)|+\max_{a\leqslant t\leqslant b}|y(t)-z(t)|\\&=\rho(x,y)+\rho(y,z).\end{aligned}$$

$C[a,b]$是度量空间.

定义 3 设(X,ρ)是度量空间.

(1) 称子集合$E\subset X$是有界集,若对于 X 中的一点 x_0, $\sup\limits_{x\in E}\rho(x,x_0)<\infty$,

(2) 对于 $x_n, x\in X$，称 x_n(依度量 ρ)收敛于 x，若 $\rho(x_n,x)\to 0$ $(n\to\infty)$，记之为 $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = x$ 或 $x_n\to x$.

定理 1 度量空间中序列的极限是唯一的. 收敛序列的元素构成有界集.

证明 若 $x_n\to x, x_n\to y$，即

$$\rho(x_n,x)\to 0,\ \rho(x_n,y)\to 0 \quad (n\to\infty).$$

由三角不等式知道

$$0\leqslant \rho(x,y)\leqslant \rho(x_n,x)+\rho(x_n,y)\to 0 \quad (n\to\infty).$$

故 $\rho(x,y)=0, x=y$. 后一结论是明显的.

定理 2 $\rho(x,y)$ 是两个变元的连续函数，即当 $x_n\to x, y_n\to y$ 时，

$$\rho(x_n,y_n)\to\rho(x,y).$$

证明 由三角不等式知道，

$$\rho(x,z)-\rho(x,y)\leqslant\rho(y,z),$$

$$\rho(x,y)-\rho(x,z)\leqslant\rho(z,y)=\rho(y,z),$$

于是

$$|\rho(x,y)-\rho(x,z)|\leqslant\rho(y,z). \tag{1}$$

由于

$$\begin{aligned}|\rho(x_n,y_n)-\rho(x,y)| &\leqslant |\rho(x_n,y_n)-\rho(y_n,x)| + \\ &\qquad |\rho(y_n,x)-\rho(x,y)| \\ &\leqslant \rho(x_n,x)+\rho(y_n,y)\to 0.\end{aligned}$$

故

$$\rho(x_n,y_n)\to\rho(x,y).$$

例 7 设 X 是任一点集，定义

$$\rho(x,y)=\begin{cases}0 & x=y,\\ 1 & x\neq y.\end{cases}$$

容易验证 (X,ρ) 是度量空间. 称此类空间为离散度量空间.

此例说明对于任一点集 X，可以在 X 上规定某种度量函数使

之成为度量空间.但是我们研究度量空间的目的在于研究空间的性质并用于解决实际问题,因此我们通常所关心的是与空间的某种性质紧密联系的度量函数.下面是这方面的例子.

命题 2 $C[a,b]$中的序列 x_n 依度量收敛于 x 等价于 x_n 在$[a,b]$上一致收敛于 x.

由 $C[a,b]$中度量函数的定义直接得出.

例 8 空间 S. 设(Ω,Σ,μ)是有限测度空间,关于 Σ 可测的函数全体记为 S. 若 $x,y\in S$,定义

$$\rho(x,y)=\int_\Omega \frac{|x(t)-y(t)|}{1+|x(t)-y(t)|}d\mu, \tag{2}$$

将 S 中关于 μ 几乎处处相等的函数视为同一元,由定义直接验证知道(S,ρ)是度量空间.

命题 3 S 中函数序列依度量(2)收敛等价于依测度收敛.

证明 若 x_n, $x\in S$, x_n 依测度收敛于 x, 则对于任何 $\sigma>0$, $\lim\limits_{n\to\infty}\mu\{t,|x_n(t)-x(t)|\geqslant\sigma\}=0$. 记

$$E_n(\sigma)=\{t,|x_n(t)-x(t)|\geqslant\sigma\}$$

则

$$\rho(x_n,x)=\int_{E_n(\sigma)}\frac{|x_n(t)-x(t)|}{1+|x_n(t)-x(t)|}d\mu+\int_{\Omega\setminus E_n(\sigma)}\frac{|x_n(t)-x(t)|}{1+|x_n(t)-x(t)|}d\mu$$
$$\leqslant\mu(E_n(\sigma))+\frac{\sigma}{1+\sigma}\mu(\Omega).$$

对于事先给定的 $\varepsilon>0$,先取 σ 足够小使第二项小于$\frac{\varepsilon}{2}$,然后取 n 足够大使第一项小于$\frac{\varepsilon}{2}$,则知 $\rho(x_n,x)\to0$.

反之,对于每个 $\sigma>0$,由于

$$\frac{\sigma}{1+\sigma}\mu(E_n(\sigma))\leqslant\int_{E_n(\sigma)}\frac{|x_n(t)-x(t)|}{1+|x_n(t)-x(t)|}d\mu\leqslant\rho(x_n,x),$$

所以当 $\rho(x_n,x)\to0$ 时,$\lim\limits_{n\to\infty}\mu(E_n(\sigma))=0$,这说明 x_n 依测度收敛于 x.

定义 4 设(X,ρ)是度量空间.

(1) 若$x_0\in X$,$r>0$,称$O(x_0,r)=\{x,\rho(x,x_0)<r\}$与$S(x_0,r)=\{x,\rho(x,x_0)\leqslant r\}$分别是以$x_0$为中心,$r$为半径的球和闭球.

(2) 集合$B\subset X$称为开集,若对于$\forall\ x\in B$,存在$r_x>0$,使得$O(x,r_x)\subset B$.

(3) 包含x的任一开集称为x的邻域.

(4) 集合$E\subset X$称为闭集,若$X\setminus E$为开集.

引理 球$O(x_0,r)(r>0)$是开集.

证明 对于$\forall\ y\in O(x_0,r)$,取$r'=r-\rho(y,x_0)$,则$r'>0$,对于$\forall\ z\in O(y,r')$,

$$\begin{aligned}\rho(z,x_0)&\leqslant \rho(z,y)+\rho(y,x_0)\\&<r-\rho(y,x_0)+\rho(y,x_0)=r\end{aligned}$$

故$z\in O(x_0,r)$,z是任意的,所以$O(y,r')\subset O(x_0,r)$,故得之.

下面两个定理可以仿照实数直线上的情况证明之,这里将具体的证明略去.

定理 3 设X为度量空间,则

(1) 空集$\varnothing$与X是开集,

(2) 任意多个开集之并是开集,

(3) 有限个开集之交是开集.

定理 4 设X为度量空间,则

(1) $\varnothing$与X为闭集,

(2) 有限个闭集之并是闭集,

(3) 任意多个闭集之交是闭集.

设有集合X的子集族$\{B_\lambda,\lambda\in\Lambda\}$,若空集$\varnothing$与$X$都属于该集族并且该集族中的集合对于任意并和有限交封闭,则称$\{B_\lambda,\lambda\in\Lambda\}$是$X$上的拓扑,称$X$是拓扑空间,每个$B_\lambda$都称为是该空间中的一个开集.定理 3 表明度量空间中由全体开集构成的集族是它的拓扑,从而每个度量空间是一个拓扑空间.

定义 5 设X为度量空间,$E\subset X$,$x_0\in X$.