初等数学教程

〔法〕G·达尔布 主编

代 数

〔法〕 C·布尔勒著

上海科学技术出版社

〔法〕G．达尔布主编

·初等数学教程·

代　　数

〔法〕C．布尔勒　著
朱广才　译

上海科学技术出版社

内容提要

本书从负数的引进开始，介绍了函数的概念以及有关代数的各种运算，着重讨论了一次、二次方程的解，对极限、导数、微分等作了初步介绍，最后讨论了级数及对数．说理清楚，讨论深入，系统性、严谨性很强．可供中学数学教师，师范学院、校数学系学生，及高中学生参考．

LEÇONS D'ALGÈBRE ÉLÉMENTAIRE

Carlo Bourlet

Librairie Armand Colin

〔法〕G. 达尔布主编 •初等数学教程•

代　　数

〔法〕C. 布尔勒 著

朱 广 才 译

上海科学技术出版社出版

（上海瑞金二路450号）

新华书店上海发行所发行　安徽新华印刷厂印刷

开本850×1156 1/32　印张16　字数425,000

1964年4月第1版　1980年3月第[illegible]次印刷

书号：13119·776　　定价：1.80元

中译本序

第一次世界大战后，美国数学会曾派出一个以 M. Bocher 为首的考察团到法国，目的是了解为什么当时法国数学如此发达。该考察团在巴黎和法国外省都进行了详尽的调查，回国后在 Bulletin of American Mathematical Society 上发表了一个报告．结论是：法国数学的发展，得力于它的中等数学教育．

诚然，法国中学教师一般都是高等师范学校 (Ecole Normale Supérieure) 毕业的．该校历史悠久，入学考试很严格．毕业后还需经过很严格的教师合格考试 (Agrégation) 才能成为合格教师 (Agrégé)．中学教师也同大学教师一样称教授 (Professeur)．

中学教授讲课一般不用教科书，教了几年后，各教授都要写一套教科书，所以这类教科书很多，对中学生的自学提供了很大的方便．数学在中学课程中占很大的份量．特别数学班 (Classe de Mathématiques Spéciale) 则是中学最高的班次，也可以说是准备投考大学或高等学校的预备班．教特别数学班的教师一般是最有经验的教师．特别数学班教科书也最多．其中 G. Darboux 院士主编的一套尤被推崇．

中学，特别是它的后期，是人们求知欲最强烈的时期，也是精力最充沛的时期．在这个时期(年龄大约在 17～20 岁左右)，使学生有大量吸收新知识和迅速扩大思维能力的机会，一旦到象高等师范学校这样一个处于当代自然科学最前线的地方，耳濡目染，就能很容易地发现有价值的新课题和解决这种新课题应走的道路．法国数学家一般在 22～23 岁时就能完成有开创性的博士论文．这就说明了为什么法国数学的发展得力于中学数学教育．

1963年上海科学技术出版社为了发展祖国数学，为了提供中学教师和中学生以良好的数学参考读物，曾组译出版了 G. Darboux 院士主编的那套书的三部四本．问世以后，颇受读者欢迎，最近，中学教育受到了很大的重视，需要该套书的人很多，但书店早已脱销，读者每致向隅．上海科学技术出版社决定重印，因纸版已被毁，不得已决定重排．原套还有 J. Tannery 所著 "Leçons d'Arithmétique théorique et pratique"一书，丰富翔实，很多内容为同套其他各书所引用，此次也已请朱德祥同志译出，可望在稍后出版．

主编者 G. Darboux 院士晚年任法兰西学院终身书记，早年毕业于高等师范学校，是微分几何学家，在分析各方面也有很多重要贡献．J. Tannery 院士长期任高等师范学校校长，曾指导了许多年青数学家的开创性工作，例如 J. Hadamard, E. Borel 和 E. Cartan 三院士，都是在他指导下开始工作的．他撰写的这本算术书，事实上是数论初步．对数的概念从自然数到实数的拓广，特别是实数概念的建立和极限概念的引进，叙述明确，立论严谨，构成这套教科书其它各书的骨胳，也是现代分析的基础．德国曾有该书译本并稍加增补．

J. Hadamard 院士主要致力于把柯西在分析上的局部理论推论到全局．在复域里，体现在他的"戴劳级数所定义的函数的解析延拓"方面的成就，这个成就导致了解析数理的建立．在实域里，体现在常微分方程定性理论，线性偏微分方程定解问题理论，变分学和泛函分析等方面的成就．在这套教科书中，J. Hadamard 撰写了"几何"平面和空间各一册，Bourlet 教授写了"代数"和"平面三角"，Bourlet 曾在偏微分方程理论和泛函分析方面做出了重要贡献．

这套书的特点，推理严谨，观点清新．力求给人以"规矩"，而不过分追求技巧．若引进一新的概念，则其定义必求是最新的，这样就使中学生阅读之后便于将来接受大学中的新知识．若叙述一方法，则力求尽其用，力求用简明的方法，解决一系列问题．许多

附录都是必要的补充，目的还是使中学生便于将来顺利地接受大学教程. 随着课文附加一些有意义的习题. 这些习题的选择和部署是经过一番精心考虑的. 特别是"几何"，俄译本曾将所有平面部分的习题全部给出解答，朱德祥同志又把这些解答全部译为中文。

这样一套教科书，既能为中学生提供学习大学数学课程的坚实基础,又能培养中学生的思考能力和计算能力.

鉴于现代数学在物理学、化学、地学和生物学等学科中已逐渐变为不可缺少的工具,中学数学教育的提高,将对我国整个自然科学的发展起着作用.

为了迅速提高中学数学教育水平,除在中学师资的培养上,采取一系列有力的措施外，也应在丰富和提高中学教材和参考读物上深下功夫. 这套书中译本的出版，对提供中学参考教材方面是颇有意义的.

吴 新 谋

1979年3月于中国科学院数学研究所

第六版序

十四年前，在这部初等代数教程刚出版的时候，不但理科学士[1]考试大纲不包括导数论，而且争取学士学位的人，连"函数"这个名词都可以不知道.

在我的老师，科学院常任书记 (Secrétaire perpétuel) G. 达尔布先生允诺和指点之下，我怀着不无冒进的心情，编写了引导学生远远超出公令规定的范围之外的这部书.

在这部书里，人们初次见到，在代数运算之前，把负数列在首位，并作为专论详加说明. 由于决定放弃寻求极大值和极小值虚构的老方法，为了简化繁重的证明，所以从极限的理论入手，引到导数的理论. 根据个人的经验，我深信，学生不难了解这种一般性的方法，而且很容易习惯于函数和导数的概念，从而使中学里的高年级的代数教学获得一大进步.

事情的演变证明我的看法完全是对的. 从 1902 年起，导数已列入学士考试大纲，到 1905 年，又下降为高中二、三年级 C, D 班必修的课程.

所以，先于这些大纲、而迟晚与之相符的本书，能在漫长的一段时期适用，而无需有重大修订.

然而日子长了，这本书终于落伍了，而第一个感到愉快的人就是我.

许多采用此书做教本的同事，曾向我提出有益的意见，我决定把它彻底修订，使之与现行的初等数学班 A,B 教学大纲完全符合.

---

[1] 在法国，高中毕业后，参加学士会考 (Baccalauréat) 及格者，获得学士 (Bachelier) 学位和入大学的资格. ——译者注

除了若干细节上的变动以外，其中主要是负数的应用和代数运算，我从头至尾彻底修订了关于二次课题的讨论、导数论和应用导数来研究函数变化的几章.

深入地讨论二次课题，对学生是一种最好的训练，能养成其有条理的习惯和运用分析的方法. 关于这方面，不可能给予他们绝对严密的法则；而且用一些太细致的框框，想把他们关起来，甚至还是危险的，因为这将毁灭他们的钻研和主动的精神. 然而，不必在微细节目上，恣意发挥致成词废，他们还是须有可靠的指导，这就是我所要努力供给他们的.

关于导数，我先把以前放在附录里的圆函数变化全篇移入正文，然后介绍一下微分记法，这是学生在物理学书上到处所遇见的. 我并且把导数应用于函数变化的一般定理重新修订. 今天我敢于做了十四年前以魄力不足所未做的一件事，就是导入有限增量定理. 这个定理的应用，能使说明既谨严又清晰，丝毫也不见得繁复. 为了符合教学大纲，最后我加了几页关于曲线面积的导数和关于原函数.

在结束这篇前言的时候，我再次向诸位同事表示谢意，感谢他们对这本书所提的意见，并将以感激的心情接受他们的任何新的意见，以便再版时加以郑重地考虑.

C. 布尔勒　巴黎 1909 年 6 月

目　录

第一编　代数算法

第二编　一次方程

第三编　二次方程

第四编 导数，函数的变化

第五编 级数，对数

附 录

绪　论

1. 代数学中轴载的有向线段论，在几何学里能起很重要的作用．而且掌握了这个理论，可以很容易说明负数论的基本原则．有这两种理由，我们首先把轴载的有向线段论的要点介绍一下．

定义　规定了指向的一段直线，就叫**有向线段**．为了确定线段的指向，我们把限定线段的两个点加以区别．一个叫做**原点**，一个叫做**终点**．线段的指向就是一个动点由原点沿线段移到终点的方向．

由此看来，有向线段就是一个动点所走的路程，并指出走路的方向．在一切运动问题里，不但需要知道动点所走的路程，而且还要知道它的方向．如果我们说，一个动点从一直线上的点 A 起，沿着直线走了一段路程，那么动点所到达之点就有疑问；因为我们不知道到达点是在出发点的右边，还是在左边．相反的，如果用有向线段来表示，那就一点也没有犹疑了；因为我们不但知道它的路程，而且还知道它的方向．

凡表示一个有向线段，总要先指出原点（动点的出发点），然后指出终点（到达之点）．如"线段 AB"所指的是以 A 为原点、以 B 为终点的有向线段；反之，"线段 BA"所指的则是以 B 为原点、以 A 为终点的有向线段．

由原点到终点的（几何）距离，叫做有向线段的**长度**．长度为零时（即原点与终点重合时），就说有向线段等于零．

同一直线所载的两个有向线段，如其长度相等、指向相同，我们就说它们**相等**．如图 1，两个有向线段，长度 AB 与长度 CD 相

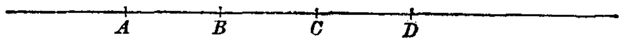

图 1

等，并且是同一指向，我们就写

$$\text{线段 } AB = \text{线段 } CD.$$

两个同载线的相等的有向线段，总可以重合，令其中之一沿载线滑动，使其原点与另一线段的原点重合.

同载线的两个有向线段，如果长度相等，指向相反，就叫做**相反的有向线段**. 如图 1，线段 AB 与线段 DC 就是相反的. 此外，在一直线上随意指两点 A 和 B，这两点就能确定两个相反的有向线段，一是线段 AB，一是线段 BA. 我们不能使两个同载线的相反的有向线段重合，就是说，不能令其循载线滑动，使原点与原点、终点与终点分别重合. 但是，如果令第一线段的原点与第二线段的终点重合，则第二线段的原点就与第一线段的终点重合.

2. 两个有向线段的合量 如果把同载线的两个有向线段连起来，使第二线段的原点与第一线段的终点重合，则以第一线段的原点为原点、以第二线段的终点为终点的有向线段，就叫做这两个有向线段的**合量**，或叫**几何和**.

如图 1，线段 AB 和线段 BC 就是第二线段的原点 B 与第一线段的终点 B 重合，线段 AC 就是它们的合量，其原点是第一线段的原点 A，终点是第二线段的终点 C. 同样，线段 BC 和线段 CA，就以线段 BA 为合量.

当同载线的两个有向线段不相连接时，要求其合量，则令第二线段循载线滑动，使其原点与第一线段的终点重合. 这两个经过滑动后的新的有向线段的合量，或任一与其相等的有向线段，就叫做两个给定线段的合量.

定理 两个有向线段的合量，与求合量时连接它们的次序无关.

设线段 AB 和线段 BC 是相连接的两个有向线段，而线段 AB

在前．它们的合量是线段 AC．另一方面，设

$$\text{线段 } EF = \text{线段 } AB, \quad \text{线段 } DE = \text{线段 } BC$$

是相连接的两个有向线段，而线段 DE 在前．这两个有向线段的合量(线段 DF)，就是线段 BC 和线段 AB 且线段 BC 在前所形成的合量．要证明这两个合量(线段 DF 与线段 AC)相等，有两种不同的情况应加以区别．

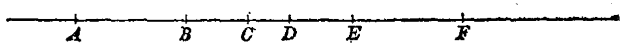

图 2

1° 我们先假定线段 AB 与线段 BC 是同一指向的(图 2)．那么，线段 DE 与线段 EF 也是同一指向．譬如，若 B 在 A 的右边，C 就在 B 的右边，因而也在 A 的右边；于是 B 居于 A 与 C 之间，各段直线的长度的关系有如下等式：

$$AC = AB + BC.$$

同样，E 在 D 的右边，F 在 E 的右边，因而 F 也在 D 的右边，于是

$$DF = DE + EF.$$

由于 $AB = EF$，$BC = DE$，所以 $AC = DF$；线段 AC 与线段 DF 既然长度相等，又是同一指向(因为 C 在 A 的右边，F 在 D 的右边)，所以它们相等．

2° 假定线段 AB 与线段 BC 指向相反，同时假定线段 AB 较长(图 3)．

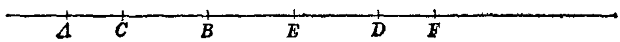

图 3

譬如，若 B 在 A 的右边，C 就在 B 的左边．由于 BC 短于 BA，点 C 必在 A 与 B 之间，并在 A 的右边．同样，因为线段 DE 与线段 BC 同一指向，所以 E 在 D 的左边；因为线段 EF 与线段 AB 同一指向，所以 F 在 E 的右边．由于 EF 长于 ED，F 也在 D 的右边．一方面 C 在 A 与 B 之间，另一方面 D 在 E 与 F 之间，所以

$$AC = AB - BC,$$
$$DF = EF - ED,$$

从而

$$AC = DF.$$

结论是：线段 AC 与线段 DF 既然长度相等，又是同一指向（因为 C 在 A 的右边，F 也在 D 的右边），所以它们相等.

上面的定理可以表达如下：两个有向线段的几何加法是有交换性的.

注意 1° 两个相反的有向线段的合量，是一个零有向线段. 因为（图3），如果 $AB = BC$，点 C 就与点 A 重合. 有向线段 AC 的原点与终点重合，故等于零.

2° 根据上面的定理，给两个有向线段的合量下定义时，无须指明拈取线段的先后，因构成它们的合量的结果与次序无关.

3° 如果一个动点沿一直线先由点 A 移到点 B，然后由点 B 移到点 C，它就先后走了线段 AB 和线段 BC 所表示的路程. 由此看来，两个有向线段的合量，就是动点从出发点 A 直接移到最后到达点 C 所走的路程.

上面的定理指出，动点从同一点 A 出发，到点 C，与其先后走那两个有向线段的次序无关. 譬如动点从点 A 起，先向右移动 100 米，然后，向左移动 50 米，到达点 C，与先向左移动 50 米，然后再向右移动 100 米所到达之点并无不同. 在这两种情况之下，到达之点 C，都与动点直接向右移动 50 米所达之点相同.

3. 两个以上的有向线段的合量 设有给定的几个有向线段 S, S', S'', S'''，载于同一直线上，它们的合量或几何和是如下获得的有向线段：先求出头两个有向线段 S 和 S' 的合量 R'，再求出 R' 和下一个有向线段 S'' 的合量 R''；最后，R'' 和末一个有向线段 S''' 的合量 R'''，就是给定的四个有向线段按给定次序相加的合量 R. 如果给定的有向线段相连接，前面的有向线段的终点与后面的有向线段的原点相重合，则它们的合量就是以第一个有向线段的原点为原点、以末一个有向线段的終点为終点的有向线段. 如图 4，考虑几个有向线段，线段 AB，线段 BC，线段 CD，线段 DE. 线段 AB 和线段 BC 的合量是线段 AC；线段 AC 和线

段 CD 的合量是线段 AD; 最后, 线段 AD 和线段 DE 的合量是线段 AE. 所以, 给定的四个有向线段的合量, 是以第一个有向线段的原点为原点、而以末一个的终点为终点的有向线段 AE.

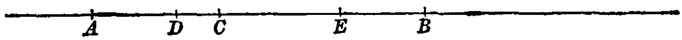

图 4

定理 I 几个同载线的有向线段的合量不变, 如果把两个或两个以上相连的有向线段以它们的合量代替之; 或相反, 一个有向线段, 可用以它为合量的两个或两个以上的有向线段代替之.

设有五个有向线段, 线段 AB, 线段 BC, 线段 CD, 线段 DE, 线段 EF, 其合量为线段 AF (图 5). 试将图上的中间点 C 去掉. 这对于两个极端点 A 和 F 不发生影响, 所余的四个有向线段, 线段 AB, 线段 BD, 线段 DE, 线段 EF, 还是以线段 AF 为合量. 可见, 两个相连的有向线段可以其合量代替. 泛言之, 不拘多少个相连的有向线段, 都可以其合量代替; 因为这无非是在有向线段构成的图形上简单地去掉一个或几个中间点而已.

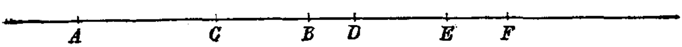

图 5

反之, 设有四个有向线段, 线段 AB, 线段 BD, 线段 DE, 线段 EF, 以线段 AF 为合量; 在载线上任取一点 C. 此点 C 与点 B 及点 D 形成两个相连的有向线段, 线段 BC 和线段 CD, 它们以线段 BD 为合量. 增添点 C 对于两个极端点并无影响, 所获得的五个有向线段还是以线段 AF 为合量. 泛言之, 我们可以把一个有向线段, 用以它为合量的几个线段代替; 因为这无非是在几个有向线段形成的图形上, 增添一个或几个中间点而已.

定理 II 设在同一直线上有给定的几个有向线段, 它们的合量, 与求合量时拈取它们的次序无关.

换句话说, 需要证明, 当交换同载线的有向线段的次序时, 其合量不变. 这有两种情况:

1° 掉换两个相连的有向线段的次序,总合量不变. 依定理I,这两个有向线段可以其合量代替; 然后, 依逆定理又可以把这合量,用以它为合量的两个相连的有向线段代替,特别是,就以原来这两个有向线段交换次序代替之. 两次替代的结果,是使两个相连的有向线段变换了次序,对于总合量并未发生影响.

2° 有向线段的次序可以任意掉换. 依上所述,两个相连的有向线段的次序既然可以变换, 那么, 只须做遍了这样的变换, 就能把给定的有向线段排成任何次序, 而且每次变换并不影响总合量, 定理于是证明. 例如, 设有按下面的次序排列的五个有向线段:

$$S,\ S',\ S'',\ S''',\ S^{\mathrm{IV}}.$$

我们可以把次序变换为

$$S',\ S,\ S^{\mathrm{IV}},\ S''',\ S''.$$

为此,只须作一系列两个相连的有向线段的掉换如下:

$$\underline{S',\ S},\ S'',\ S''',\ S^{\mathrm{IV}};$$

$$S',\ S,\ S'',\ \underline{S^{\mathrm{IV}},\ S'''};$$

$$S',\ S,\ \underline{S^{\mathrm{IV}},\ S''},\ S''';$$

$$S',\ S,\ S^{\mathrm{IV}},\ \underline{S''',\ S''}.$$

(掉换次序的两个有向线段画一横线表示.)

注意 根据这个重要的定理,为了确定几个有向线段的合量,用不着说按什么次序拈取它们以构成这个合量.

有向线段的几何和,具有普通数的算术和的基本性质,即交换各项的次序,其和不变. 一般的几何加法是有**交换性**的.

定理 III 设在同一直线上给定几个有向线段,两个或两个以上的有向线段,可以其合量代替之,总合量不变.

这个定理,在有向线段相连接的情况下业已证明. 如果有向线段不连接,可首先掉换次序,使其连接,这不会影响总合量;然后就可以把所考虑的有向线段,以其合量来代替.

反过来,我们可以把一个有向线段,用以它为合量的几个线段