

电磁场工程中的泛函方法

章文勋 著

上海科学技术文献出版社

内 容 简 介

本书以泛函的观点统一阐述了用于求解电磁场边值问题的各种近似方法,如变分法、矩量法、有限元法、单矩法、边界元法等,并为这些方法的应用提供了必要的数学基础。书中详细讨论了泛函方法在传输线、波导、谐振腔、天线和天线阵、散射物等电磁场工程问题中的应用实例,注重于建立数学模型,以及各种具体解法的比较和演进,并包含了丰富的参考文献。全书将数学方法与电磁场应用有机结合,取材广泛,深入浅出,适合具有大学电磁场理论基础的科技人员、教师、研究生和高年级大学生进修和参考之用。

电磁场工程中的泛函方法

章文勋 著

*

上海科学技术文献出版社出版
(上海市武康路2号)

新华书店上海发行所发行
上海商务印刷厂印刷

*

开本 850×1168 1/32 印张 6.25 字数 151,000

1985年7月第1版 1985年7月第1次印刷

印数: 1—5,100

书号: 15192·397 定价: 1.40元

《科技新书目》95-260

前 言

(一)

1864 年 Maxwell 以统一的数学模型总结了物理学的基本电磁定律,得出在空间存在交变电磁波的重要推理^[1],从而开创了电磁场理论的学科研究和无线电波的开发应用。电磁场理论一方面作为理论物理学的活跃分支,在宏观的经典电动力学的基础上,发展了相对论电动力学、量子电动力学,并试图建立物理学的统一场论;另一方面又作为无线电工程的理论基础,致力于各类边值问题的稳态解,进而研究电磁场的瞬变特性、边值问题的反演理论,并开始探索电磁场与生命物质相互作用的机理。然而,在波导、谐振腔、天线、散射物等电磁场工程应用中面临的基本课题仍是求解各种复杂形状和媒质的边值问题。

(二)

电磁场边值问题包含电磁源分布、媒质和边界条件、电磁场分布三项要素,有三类基本的求解任务[⊖]:(一)已知媒质和边界条件,求可能存在的各种场分布模式;(二)已知媒质和边界条件,求实际激励下的源分布;(三)已知媒质和边界条件以及源分布,求实际的场分布。求场分布的基本数学模型是齐次或非齐次的偏微分方程定解问题,仅在简单的媒质和边界条件下才可能用经典方法(本征函数展开法、保角变换法等)求得解析形式的严格解;求源分布的基本数学模型是积分方程,能得到严格解的实例极为罕见,在

⊖ 边值问题的反演理论,即已知源分布和场分布、求媒质和边界条件的问题,可列作第四类求解任务。

多数情况下需借助于各种近似方法。

早期的近似方法主要有变分法(解析形式的近似解)和有限差分法(离散取样点的数值解)。近二十年来高速大容量电子计算机技术的进步使多维数值积分、高阶矩阵求逆等运算成为切实可行,于是一些新的近似方法如矩量法、有限元法、单矩法、边界元法等相继出现,并广为应用。

在电磁场工程的实际应用中,往往还要求解各种工程参量,如电容量、输入阻抗、传播常数、谐振频率等,它们或可根据场分布的解间接计算;或需要建立专门的数学模型,然后选择适当的方法求解。

本书将对求解电磁场边值问题的一大类近似方法用泛函的观点作统一阐述和系统分类,介绍这些方法的原理和适用场合。

(三)

在电磁场工程应用的实际问题中,求解的主题是从实际问题中抽象出的数学模型,数学方法则是必不可少的求解工具。然而在现有的出版物中,论述数学方法的书籍对建立数学模型的具体过程讨论得很少;研究电磁场边值问题的文献又往往注重于数学方法的某项具体应用,能兼顾各种数学方法和各类电磁场工程应用的书籍为数不多。

关于电磁场工程理论的经典方法及其应用, Morse 和 Feshbach 的名著^[2]提供了方法论的系统论述; Collin^[3]、Harrington^[4]、Bladel^[5]、Jones^[6]和 Stinson^[7]等的著作,从不同的应用方面提供了用经典方法求解边值问题的丰富实例。笔者曾尝试将经典方法的数学理论与求解电磁场边值问题的实例(包括建立数学模型、求解过程、以及解的物理意义)相结合,以教学参考书的形式^[8]在高年级本科生和研究生教学中实践多年,很受欢迎。

关于电磁场工程理论的近似方法及其应用,已经出版的专著都针对某些具体方法,各有其一定的局限。例如: Schwinger 和

Saxon^[9], Cairo 和 Kahan^[10] 的变分法; Harrington^[11] 的矩量法; Chari 和 Silvester^[12], 曾余庚、徐国华、宋国乡^[13] 的有限元法等, 在内容的广度上受到限制. 还有一些汇编的文集, 例如 Mittra 主编的两本书^{[14][15]}, 虽然涉猎广褒, 但各章独立撰稿, 缺乏有机的联系.

本书作为前著^[8]的续笔, 将泛函方法的数学理论与求解电磁场边值问题的实例相结合, 详细讨论各种边值问题数学模型的建立. 为了突出主题并节省篇幅, 本书以前著^[8]作为起点而尽量少重复; 在例释时免除繁琐的解题过程, 代之以引用丰富的参考文献, 并从泛函方法的观点给予适当的评论.

(四)

本书初稿写成于 1982 年 5 月, 在李嗣范教授的关心下, 曾于江苏省电子学会(南京)、电子工业部南京电子技术研究所、中国船舶工业总公司第七二三研究所(扬州)等处对科技人员开设讲座; 并得到陈涵奎教授的热情赞助, 应邀讲学于华东师范大学(上海). 此后又用作南京工学院、中国科学技术大学的研究生选修教材, 还受到黄宏嘉教授的亲切鼓励. 笔者根据多次教学实践的经验、并吸取近年来国际、国内的研究进展, 对初稿作了较多的补充和修改, 付诸出版.

笔者对列位学术前辈的支持, 以及在讲学和讨论中提供了可贵意见的同行们, 深表感谢. 但限于笔者的理论学识水平不高、工程实践经验不足, 书中难免有谬误欠妥之处, 敬希指正.

章文勋 1984 年 3 月

目 录

前言

第一章 泛函的基本概念	1
§ 1.1 集合和映射	1
一、集合	1
二、集合的拓扑表示	1
三、映射	3
§ 1.2 Hilbert 空间	6
一、线性空间	6
二、按内积赋范(线性)空间	6
三、Hilbert 空间	7
§ 1.3 线性算子	9
一、线性算子的定义	9
二、运算性质	9
三、线性算子方程	10
§ 1.4 对称算子和正定算子	10
一、对称算子	10
二、正定算子	11
§ 1.5 自伴算子	11
一、伴随算子	11
二、自伴算子	12
三、Lagrange 意义下的自伴算子	12
第二章 自伴边值问题	13
§ 2.1 Sturm-Liouville 边值问题	13
§ 2.2 Poisson 边值问题	15
§ 2.3 Helmholtz 边值问题	16
一、标量场	16

二、矢量场	17
§ 2.4 Fredholm 边值问题	19
一、确定性问题	19
二、标量场本征值问题	21
三、矢量场本征值问题	21
第三章 变分问题	24
§ 3.1 变分和变分方程	24
§ 3.2 变分问题及 Euler 边值问题	27
一、简单泛函	27
二、含一阶导函数的泛函	27
三、含一阶偏导数的泛函	29
四、含二阶偏导数的泛函	31
§ 3.3 约束条件下的变分问题	33
一、微分方程形式的约束条件	33
二、泛函方程形式的约束条件	35
§ 3.4 线性算子方程化为变分方程	35
一、正算子的确定性方程	36
二、下有界算子的本征值方程	37
三、正定算子的广义本征值方程	40
四、非自伴算子的确定性方程	41
第四章 各种泛函解法	44
§ 4.1 概述	44
§ 4.2 Rayleigh-Ritz 法	46
一、根据物理原理的直接变分解	46
二、确定性算子方程的变分解	47
三、广义本征值算子方程的变分解	48
四、基函数序列的选择	49
§ 4.3 近似变分解的改进	51
一、Ritz 法的误差估计	51
二、直接变分问题中泛函极值的上、下限	52
三、Trefftz 法	52
四、Weinstein 法	53

五、调节边界法	54
§ 4.4 加权余量法	55
§ 4.5 矩量法	59
一、Галеркин 法	60
二、点配置法	61
三、子域法	62
四、最小二乘法	62
五、基函数序列的选择	63
§ 4.6 边界积分法	65
一、内域基的边界积分法	66
二、Green 函数法的应用	68
三、边界基的边界积分法	70
§ 4.7 有限元法和边界元法	72
一、有限元法	72
二、单矩法	76
三、边界元法	78
第五章 电磁场内问题的泛函原理	85
§ 5.1 分立导体间的电容量	85
一、直接变分原理	85
二、电位 Dirichlet 问题的变分原理	86
三、算子方程的加权余量法	87
§ 5.2 波导管的传播常数	88
一、Helmholtz 本征值问题的变分原理	88
二、Fredholm 本征值问题的变分原理	91
三、几种特殊情况的变分原理	93
四、变分解的实例	95
五、加权余量法的应用	95
§ 5.3 谐振腔的谐振频率	96
一、谐振腔的变分原理	97
二、各种泛函方法的比较	100
§ 5.4 波导接头的输入导抗	101

一、输入导抗的变分原理	101
二、场分量匹配的各种方法	108
§ 5.5 波导障碍物的等效网络	111
一、纵向对称障碍物的变分原理	112
二、膜片型障碍物的变分解	122
三、障碍物的其它解法	124
第六章 电磁场外问题的泛函原理	127
§ 6.1 细天线的输入阻抗	127
一、微分-积分方程和变分原理	129
二、积分-微分方程和矩量法	131
三、任意形状天线的互导纳	134
§ 6.2 散射幅度和散射截面	135
一、细导线的散射截面	136
二、无限长柱体的散射幅度	137
三、导电物体散射截面的变分原理	142
§ 6.3 相控阵天线单元的输入阻抗	144
§ 6.4 天线最优化激励的变分原理	148
一、天线阵增益的最优化	148
二、连续源增益的最优化	150
三、赋形波束的最优逼近	152
附录(一~九.)	155
参考文献	167
索引	180

第一章 泛函的基本概念^{[16]~[19]}

§ 1.1 集合和映射

一、集合

定义 符合一定条件的单件事物所组成的整体称为这些单件的集合，其中每一项单件都是该集合的元素。含有无穷多个元素的集合称为无穷集合。

函数理论中的集合分成两大类：数(组)集和函数集。

数(组)集即变量(组)所取值的集合。例如：

1. 在谐振腔问题中，腔体的固有谐振频率 $\{\omega_{01}, \omega_{02}, \omega_{03}, \dots\}$ 是无穷多个离散取值的变量，它们组成可计数的无穷数集。

2. 在辐射问题中，表面 S 上分布电流源的位置矢量(坐标量数组)是无穷多个连续取值的变量组，它们组成不可计数的无穷数组集。

函数集即函数所取形式的集合。例如：

1. 在波导管问题中，电磁波的模式函数是无穷函数集，而这些模式的传播常数是无穷数集。

2. 在一般边值问题中，本征函数是无穷函数集，而本征值是无穷数集。

二、集合的拓扑表示

在形式几何的意义上，用点表示元素，用空间表示集合。于是，集合中的元素被表示成拓扑空间中的点，空间就是点集。

根据集合的类型将空间分成两大类：数值空间和函数空间。

数值空间是数(组)集的拓扑表示。例如：

单变量 x ——一维直观空间的点集；

三变量组 (x, y, z) ——三维直观空间的点集;

n 变量组 $(x_1, x_2, \dots, x_n)$ —— n 维抽象空间 R^n 的点集.

将三维直观空间中的几何概念推广到 R^n 空间中, 作出下列定义:

距离——点 $X(x_1, x_2, \dots, x_n)$ 与点 $Y(y_1, y_2, \dots, y_n)$ 之间的距离为

$$\rho(X, Y) = \sqrt{\sum_{i=1}^n (x_i - y_i)^2}$$

体积——开区间 $\Omega(X) = \{x_i \in (a_i, b_i) \mid i=1, 2, \dots, n\}$ 的体积为

$$|\Omega(X)| = \prod_{i=1}^n (b_i - a_i)$$

若某数集对应的数值空间具有确定的体积值, 则称可测数集, 记作 $E(X)$. 凡数值空间中的可数点集、有界闭集、开集都对应了可测数集.

函数空间是函数集的拓扑表示. 函数空间中的每个点都表示不同形式的函数.

若某个定义在可测数集 $E(X)$ 上的实函数 $f(X)$, 其函数值的任何取值范围所对应的定义域都是可测子数集, 则称可测函数, 即 $f(X)$ 在 $E(X)$ 上可测.

定义在同一可测数集 $E(X)$ 上的不同可测函数组成可测函数集.

在泛函分析中具有特殊重要性的是 p 幂 L 可积函数, 它们是在 $E(X)$ 上可测、且其 p 次幂绝对值的 Lebesgue 积分 Θ 存在的函数, 记作 $L^p(E)$ 函数. 所有 $L^p(E)$ 函数的集合对应了 L^p 空间. 当 $p=2$ 时称平方可积函数, 对应 L^2 空间.

⊖ 一般数学分析中按被积函数的宗量值分段求积的运算称 Riemann 积分, 它适合仅含第一类间断点的被积函数, 简称 R 可积.

实变函数论中按被积函数的函数值分段求积的运算称 Lebesgue 积分, 它适合含第二类间断点的被积函数, 简称 L 可积.

凡 L 可积的函数必定 R 可积, 反之不然.

三、映射

映射是运算规则的拓扑表示。当两个集合中的元素之间具有逐个对应的运算关系时，两个空间中的点之间互相映射(图 1-1)。

按照映射前后两个集合的不同类型，有三种基本的映射关系：函数、泛函、算子。

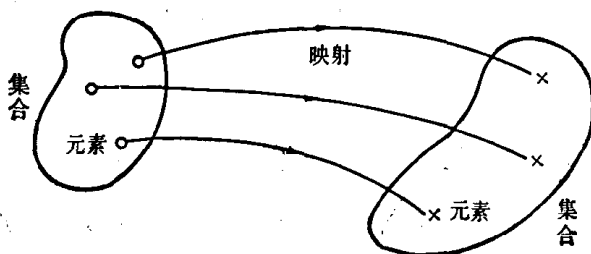


图 1-1 映射关系

函数表示数(组)值 X 与数(组)值 Y 之间的对应关系，即数值空间到数值空间的映射，写成 $Y = F(X)$ 。例如：

一元函数

$$y = f(x)$$

多元函数

$$y = f(x_1, x_2, \dots, x_n)$$

函数组

$$\begin{cases} y_i = f_i(x_1, x_2, \dots, x_n) \\ i = 1, 2, \dots, m \end{cases}$$

泛函表示函数形式 $U(x)$ 与数值之间的对应关系，即函数空间到数值空间的映射，写成 $y = J\{U(x)\}$ 。例如：

简单泛函

$$y = J\{u(x)\}$$

多元函数的泛函

$$y = J\{u(x_1, x_2, \dots)\}$$

含多个函数的泛函

$$y = J\{u_1(x_1, x_2, \dots), u_2(x_1, x_2, \dots), \dots\}$$

泛函组

$$\begin{cases} y_i = J_i\{u_1(x_1, x_2, \dots), u_2(x_1, x_2, \dots), \dots\} \\ i = 1, 2, \dots \end{cases}$$

算子表示函数形式 $\Phi(X)$ 与函数形式 $\Psi(X)$ 之间的对应关系, 即函数空间到函数空间的映射, 又称变换, 写成 $\Psi(X) = \mathbf{A}\Phi(X)$. 例如:

简单算子

$$\Psi(x) = \mathbf{A}\Phi(x)$$

$$\Psi(x_1, x_2, \dots) = \mathbf{A}\Phi(x_1, x_2, \dots)$$

算子组

$$\begin{cases} \Psi_i(x_1, x_2, \dots) = \sum_{j=1}^m \mathbf{A}_{ij} \Phi_j(x_1, x_2, \dots) \\ i=1, 2, \dots \end{cases}$$

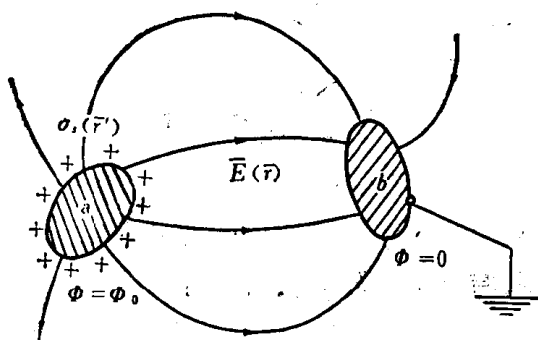


图 1-2 分立导体的静电场

函数的意义是众所熟知的。泛函总具有定积分的形式。函数 $U(X)$ 被包含在积分号内, 当 X 为 n 维数组时泛函为 n 重积分。算子可具有多种形式, 例如: 微商、不定积分、Fourier 变

换、Laplace 变换、梯度、散度、旋度、矩阵乘子等。下面讨论两例电磁场问题, 以说明这三种映射关系的实际意义。

例 1 静电问题(图 1-2)

记静电物理量

数	值	函	数
电 荷 量	Q	电 荷 面 密 度	$\sigma_s(\vec{r}')$
电 位 差	ϕ_0	电 位 分 布	$\phi(\vec{r})$
电 场 储 能	W_E	电 场 强 度	$\vec{E}(\vec{r})$
电 容 量	C	电位 Green 函数	$\ominus G(\vec{r} \vec{r}')$

其中下标 s 表示源量, $\vec{r}'$ 表示源点位置矢量, $\vec{r}$ 表示场点位置矢量。则各种物理关系式的映射性质可列表如下:

⊖ 参阅 [8] § 10.2, § 10.3

	关 系 式	映 射
I	$W_E = \frac{1}{2} C \Phi_0^2$ $W_E = \frac{\epsilon}{2} \iiint_V \vec{E}(\vec{r}) ^2 dv$ $\Phi_0 = \int_a^b \vec{E}(\vec{r}) \cdot d\vec{l}$ $\vec{E}(\vec{r}) = -\nabla \Phi(\vec{r})$	函数 $W_E = F(\Phi_0)$ 泛函 $W_E = J\{ \vec{E}(\vec{r}) \}$ 泛函 $\Phi_0 = J\{\vec{E}(\vec{r})\}$ 算子 $\vec{E}(\vec{r}) = A\Phi(\vec{r})$
II	$Q = C\Phi_0$ $Q = \oint_{S_a} \sigma_s(\vec{r}') ds' = \oint_{S_a} \sigma_s(\vec{r}) ds$ $\Phi(\vec{r}) = \oint_{S[v]} G(\vec{r} \vec{r}') \sigma_s(\vec{r}') ds'$ $(S[v] = S_a + S_b)$ $W_E = \frac{1}{2} \oint_{S[v]} \sigma_s(\vec{r}) \Phi(\vec{r}) ds$ $= \frac{1}{2} \oint_{S[v]} \oint_{S[v]} \sigma_s(\vec{r}) G(\vec{r} \vec{r}') \sigma_s(\vec{r}') ds' ds$	函数 $Q = F(\Phi_0)$ 泛函 $Q = J\{\sigma_s(\vec{r})\}$ 算子 $\Phi(\vec{r}) = A\sigma_s(\vec{r})$ 泛函 $W_E = J\{\sigma_s(\vec{r})\}$

根据 I 组关系式可得电容量 C 作为电位函数 $\Phi(\vec{r})$ 的泛函

$$C = \frac{2W_E}{\Phi_0^2} = \frac{\epsilon \iiint_V |\nabla \Phi(\vec{r})|^2 dv}{\left[\int_a^b \nabla \Phi(\vec{r}) \cdot d\vec{l} \right]^2} \quad (1.1)$$

根据 II 组关系式又得电容量 C 作为电荷面密度 $\sigma_s(\vec{r})$ 的泛函

$$\frac{1}{C} = \frac{2W_E}{Q^2} = \frac{\oint_{S[v]} \oint_{S[v]} \sigma_s(\vec{r}) G(\vec{r}|\vec{r}') \sigma_s(\vec{r}') ds' ds}{\left[\oint_{S_a} \sigma_s(\vec{r}) ds \right]^2} \quad (1.2)$$

以上两式将在 § 5.1 中用作变分法计算静电容量的起点。

例 2 时谐电磁场问题

已知含有电流、磁流源的广义 Maxwell 方程

$$\begin{cases} \nabla \times \vec{H}(\vec{r}) = \vec{i}_s(\vec{r}) + j\omega \vec{\epsilon} \cdot \vec{E}(\vec{r}) \\ \nabla \times \vec{E}(\vec{r}) = -\vec{i}_s^m(\vec{r}) - j\omega \vec{\mu} \cdot \vec{H}(\vec{r}) \end{cases}$$

式中 $\vec{i}_s$ 、 $\vec{i}_s^m$ 为电流、磁流面密度， $\vec{\epsilon}$ 和 $\vec{\mu}$ 为各向异性媒质的并矢介电常数和并矢导磁率。

将式中的源量和场量分离到等号的两侧，改写成 ($\vec{I}$ 是么并矢)

$$\begin{cases} \vec{i}_s(\vec{r}) = -j[\omega \vec{\epsilon} \cdot \vec{E}(\vec{r}) + \nabla \times \vec{I} \cdot j\vec{H}(\vec{r})] \\ j\vec{i}_s^m(\vec{r}) = -j[\nabla \times \vec{I} \cdot \vec{E}(\vec{r}) - \omega \vec{\mu} \cdot j\vec{H}(\vec{r})] \end{cases}$$

记矩阵形式的矢量函数

$$\vec{\Phi}(\vec{r}) = \begin{bmatrix} \vec{E}(\vec{r}) \\ j\vec{H}(\vec{r}) \end{bmatrix}, \quad \vec{\Psi}(\vec{r}) = \begin{bmatrix} \vec{i}_s(\vec{r}) \\ j\vec{i}_s^m(\vec{r}) \end{bmatrix}$$

和矩阵形式的算子

$$\mathbf{M} = -j \begin{bmatrix} \omega \vec{\epsilon} \cdot & \nabla \times \vec{I} \cdot \\ \nabla \times \vec{I} \cdot & -\omega \vec{\mu} \cdot \end{bmatrix}$$

则可概括成算子方程

$$\vec{\Psi}(\vec{r}) = \mathbf{M} \vec{\Phi}(\vec{r})$$

§ 1.2 Hilbert 空 间

一、线性空间

设 $D(E)$ 是定义在 $E(X)$ 上的函数集, 在 $D(E)$ 中任取三个元素 $f(X)$ 、 $g(X)$ 、 $h(X)$, 在实数集中任取 α 和 β , 若都能符合下列性质, 则 $D(E)$ 的拓扑表示属于线性空间。

1. $(\alpha f + \beta g) \in D$
2. $f + g = g + f, (f + g) + h = f + (g + h)$
3. $\alpha(\beta f) = (\alpha\beta)f, (\alpha + \beta)(f + g) = \alpha f + \beta f + \alpha g + \beta g$
4. $1 \cdot f = f$

二、按内积赋范(线性)空间

定义 函数 $f(X)$ 的范数 $\|f\|$ 是符合下列运算性质的实数:
(g 与 f 属于同一线性空间)

1. $\|f\| \geq 0$, 且仅当 $f(X) \equiv 0$ 时 $\|f\| = 0$
2. $\|-f\| = \|f\|$
3. $\|f + g\| \leq \|f\| + \|g\|$
4. $\lim_{\alpha_n \rightarrow 0} \|\alpha_n f\| = 0$, 其中 $\{\alpha_n\} \in K$ 常数域。

能符合上述性质的运算规则不是唯一的，因此对范数可以赋予不同的定义。

定义 函数 $f(X)$ 和 $g(X)$ 的内积 $\langle f, g \rangle$ 是符合下列运算性质的复数: (f, g 与 h 属于同一线性空间)

1. $\langle f, f \rangle \geq 0$, 且仅当 $f(X) \equiv 0$ 时 $\langle f, f \rangle = 0$
2. $\langle f, g \rangle = \langle g, f \rangle^*$ 复共轭
3. $\langle f+h, g \rangle = \langle f, g \rangle + \langle h, g \rangle$
4. $\langle \alpha f, g \rangle = \alpha \langle f, g \rangle$, 其中 α 是常数

能符合上述性质的运算规则也不是唯一的，因此对内积也可以有不同的定义。

若规定范数 $\|f\| = \sqrt{\langle f, f \rangle}$, 就称为按内积赋范。此时范数的运算规则完全取决于内积的定义。

若线性函数集 $D(E)$ 中的每一个元素 $f(X)$ 都有范数存在, 则 $D(E)$ 的拓扑表示属于赋范(线性)空间。

若线性函数集 $D(E)$ 中的每一对元素 $f(X)$ 、 $g(X)$ 都有内积存在, 则 $D(E)$ 的拓扑表示属于内积(线性)空间。

当按内积赋范 $\|f\| = \sqrt{\langle f, f \rangle}$ 时, 赋范(线性)空间就称为按内积赋范(线性)空间。

三、Hilbert 空间

设 $D(E)$ 是线性函数集合, 若每一个收敛的元素序列 $\{f_n(X)\}$ 都以同一集合中的某元素 $f(X)$ 为极限,

$$\lim_{n \rightarrow \infty} f_n(X) = f(X) \in D(E),$$

则 $D(E)$ 的拓扑表示属于完备空间。

定义 完备的赋范(线性)空间称为 Banach 空间, 简称 B 空间。

定义 完备的按内积赋范(线性)空间称为 Hilbert 空间, 简称 H 空间。

B 空间包含了按各种不同赋范规则的完备空间, 按内积赋范

的 H 空间是它的子空间, 即 $H \subset B$.

H 空间又包含了按各种不同内积规则的完备空间, 每一种有确定内积定义的完备空间都是它的子空间. 例如:

1. 平方可积空间 $L^2(E) \subset H$

设 $f(X), g(X) \in L^2(E)$, 定义其内积和范数

$$\left\{ \begin{aligned} \langle f(X), g(X) \rangle &= \int_{E[X]} f(X) g^*(X) dX \\ \|f(X)\| &= \left\{ \int_{E[X]} |f(X)|^2 dX \right\}^{1/2} \end{aligned} \right. \quad (1.3)$$

2. 加权平方可积空间 $L^2(E, \sigma(X)) \subset H$

设 $f(X), g(X) \in L^2(E, \sigma(X))$, 定义其内积和范数

$$\left\{ \begin{aligned} \langle f(X), g(X) \rangle &= \int_{E[X]} \sigma(X) f(X) g^*(X) dX \\ \|f(X)\| &= \left\{ \int_{E[X]} \sigma(X) |f(X)|^2 dX \right\}^{1/2} \end{aligned} \right. \quad (1.4)$$

其中权函数 $\sigma(X)$ 是实函数.

3. 矢量平方可积空间 $\bar{L}^2(E) \subset H$

设矢量函数 $\bar{f}(X), \bar{g}(X) \in \bar{L}^2(E)$, 它们在正交座标系 (u_1, u_2, u_3) 中的分矢量展开式为

$$\bar{f}(X) = \hat{u}_1 f_1(X) + \hat{u}_2 f_2(X) + \hat{u}_3 f_3(X)$$

$$\bar{g}(X) = \hat{u}_1 g_1(X) + \hat{u}_2 g_2(X) + \hat{u}_3 g_3(X)$$

定义其内积和范数

$$\left\{ \begin{aligned} \langle \bar{f}(X), \bar{g}(X) \rangle &= \int_{E(X)} [f_1(X) g_1^*(X) + f_2(X) g_2^*(X) \\ &\quad + f_3(X) g_3^*(X)] dX \\ &= \int_{E(X)} \bar{f}(X) \cdot \bar{g}^*(X) dX \\ \|\bar{f}(X)\| &= \left\{ \int_{E(X)} [|f_1(X)|^2 + |f_2(X)|^2 \right. \\ &\quad \left. + |f_3(X)|^2] dX \right\}^{1/2} \end{aligned} \right. \quad (1.5)$$