车贝雪夫多项式及其在气象中的应用

周家斌 著

气象出版社

车贝雪夫多项式及其在气象中的应用

出版社

车贝雪夫多项式及其在气象中的应用

车贝雪夫多项式
及其在气象中的应用

周家斌　著

气象出版社

内 容 简 介

本书是一本关于车贝雪夫多项式的专著。书中论述了车贝雪夫多项式的基本原理及其向不规则格点的推广和作者提出的新的时间序列预报方法，并介绍了车贝雪夫多项式在天气气候分析，时间序列预报、单点预报和气象要素分布预报等方面应用的实例和这些方法在二十个省市自治区的气象、水文、水电、农业、医学等部门及部队应用的情况。书末附有详尽的车贝雪夫多项式表和有关计算程序。本书可供科学工作者、高等院校教师、研究生、高年级学生以及气象、水文台站的科技人员参考。

车贝雪夫多项式及其
在气象中的应用
周家斌 著
责任编辑 刘生长
* * *
气象出版社 出版
（北京西郊白石桥路46号）
北京燕华营印刷厂印刷
气象出版社发行 全国各地新华书店经售
* * *
开本：787×1092 1/16 印张：17.125 字数：592千字
1990年3月第一版 1990年3月第一次印刷
印数：1—1200 定价：12.25元
ISBN7-5029-0345-3/P·0190

符号说明

x，y，z	坐标
i，j，l	分别为x，y，z方向的格点序号
ν	多维空间格点的一维序号
I_0，J_0，L_0	x，y，z方向总格点数
$I_1(j)$，$I_2(j)$	第j行格点的起点与终点
P_0	总格点数
φ，ψ，χ	x，y，z方向车贝雪夫多项式
ζ	二维车贝雪夫多项式
φ'，ψ'，χ'，ζ'	乘有常数因子的车贝雪夫多项式
$\tilde{\varphi}$，$\tilde{\psi}$，$\tilde{\chi}$	x，y，z方向规一化车贝雪夫多项式
$\tilde{\xi}$	二维规一化车贝雪夫多项式
$\varphi^{\bullet}$，$\psi^{\bullet}$，$\chi^{\bullet}$	与φ，ψ，χ对应的图形
$\tilde{\xi}^{\bullet}$	与ζ对应的图形
$\tilde{\varphi}^{\bullet}$，$\tilde{\psi}^{\bullet}$，$\tilde{\chi}^{\bullet}$	与$\tilde{\varphi}$，$\tilde{\psi}$，$\tilde{\chi}$对应的图形
$\zeta^{\bullet}$	与$\tilde{\xi}$对应的图形
k，s，q	x，y，z方向车贝雪夫多项式的阶
α_k，β_s，π_k	车贝雪夫多项式前的常数因子
γ	二维车贝雪夫多项式的阶
K_0，S_0，Q_0	x，y，z方向车贝雪夫多项式的截止阶数
Γ_0	二维车贝雪夫多项式截止阶数
M，N，Λ	x，y，z方向车贝雪夫多项式的模
Ω	二维车贝雪夫多项式的模
μ，ν，λ	x，y，z方向等距格点车贝雪夫多项式的模
ω	二维等距格点车贝雪夫多项式的模
A_k，A_{ks}，$A_{ks\cdots q}$	一维，二维，多维车贝雪夫系数
A_ν	二维车贝雪夫系数
A'_k，A'_{ks}，A'_γ，$A'_{ks\cdots q}$	用φ'，$\varphi'\psi'$，ζ'，$\varphi'\psi'\cdots\chi'$计算的车贝雪夫系数
$\widetilde{A}_k$，$\widetilde{A}_{ks}$，$\widetilde{A}_\gamma$，$\widetilde{A}'_{ks\cdots q}$	用规一化多项式计算的车贝雪夫系数
$\Sigma(z^2)$	信息平方和
V	方差贡献（特征指数）
r	相关指数
$\Sigma_{K_0}(\hat{z}^2)$，$\Sigma_{K_0,S_0}(\hat{z}^2)$，$\Sigma_{K_0,S_0\cdots Q_0}(\hat{z}^2)$，$\Sigma_{\Gamma_0}(\hat{z}^2)$	逼近平方和
R	复相关指数
$\Sigma_{K_0}(e^2)$，$\Sigma_{K_0,S_0}(e^2)$，$\Sigma_{K_0S_0\cdots Q_0}(e^2)$，$\Sigma_{\Gamma_0}(e^2)$	残差平方和
ρ	相对误差
σ	均方根误差
θ_k，δ_{k-1}	递推公式中的常数
F	非线性算子

$\mathbf{X}$	非线性变换前的自变量向量
x_1，x_2，x_n	非线性变换前的自变量
Ξ	非线性变换后的自变量向量
ξ_1，ξ_2，ξ_n	非线性变换后的自变量
$T_k(x)$	第一类车贝雪夫多项式
τ_k	矩
$C_k(i)\psi_s(j)$，$S_k(i)\psi_s(j)$	车贝雪夫-傅立叶混合多项式

前　　言

一看书名，就知道本书是专讲车贝雪夫多项式的。

作者开始接触车贝雪夫多项式是在六十年代初期。那时我在北京大学就读，按教学计划应写毕业论文。张家诚先生提出了一个关于车贝雪夫多项式的题目，我出于好奇，就选了它，谁知从此竟与这一数学工具结下了不解之缘。

七十年代，我多次到气象台站进行科研实践和学习，与台站预报员建立了深厚的感情。其时我进行了一些能用于气象台站的统计预报研究。多年来萦绕在我的脑际中的一个问题是如何能为台站预报工作的发展多做一点贡献，而这也就是推动我再次操起车贝雪夫多项式这把似乎已经老了的刀子的原因。

我的关于用不规则格点上的车贝雪夫多项式作要素分布预报的论文，引起了一些气象台站的兴趣，这使我感到莫大的喜悦。之后我们得到中央气象局的资助，成立了"车贝雪夫多项式应用"协作组。协作组的工作，使车贝雪夫多项式得以推广，也使我的科研工作不断取得新的营养而逐步有所发展。因此，从亲身实践中，我深深地体会到理论与实践必须统一，科研与生产必须结合。只有这样才能使科学研究获得迅猛的健康的发展，才能使四化建设高速地有成效地进行。

深切感谢协作组的同志们，是他们的辛勤劳动为这本小书增添了光彩。中国科学院大气物理研究所叶笃正、陶诗言、杨鑑初、曾庆存，南京大学么枕生，气象科学研究院张家诚，华东水利学院周恩济，中国科学院大气物理研究所陈于湘、汪莹章等同志，对作者的工作给于了热情的鼓励和支持，陶诗言同志担任了协作组的顾问，么枕生、张家诚同志详细审阅了本书，李欣荣、鲁丽罗、崔桂云等同志为本书的出版做了很多工作。作者仅在此向他们表示衷心的感谢。

作者才疏学浅，书中错误与不当之处难免，敬希前辈和各位读者批评指正。

作者

1985年元月于中关村

目　　录

Contents

第一章 绪 论

车贝雪夫（Чеьышев）多项式，作为一个数学工具，已有很久的历史了[1,2]。但将它用到气象工作中来，却只有三十多年。

1948年，Wadsworth和Bryan[3]第一次将车贝雪夫多项式用于气象预报。他们在91个格点上用车贝雪夫多项式展开了地面气压场，并将分析结果用于相似预报。此后，美国麻省理工学院，苏联中央预报研究所做过一系列工作。六十年代以来，苏联又开展了关于应用第一类车贝雪夫多项式的研究。主要的工作在苏联两极研究所进行。1963年，张家诚等[4]将车贝雪夫多项式方法引进到我国气象界。此后还有一些工作。

以上这些工作，可以概括为如下三个方面：

（一）天气气候分析　许多作者展开了各种气象场，并计算了场的车贝雪夫系数与气象要素的相关，分析了环流与天气的关系。例如，Friedman[5]研究了700百帕和地面环流与月降水量的关系，Белинский等[6]分析了气旋、反气旋活动，Звеев[7]分析了逐日850百帕形势与降水的关系，Бардин等[8]应用车贝雪夫系数确定基本天气过程（Элементарный синолтический процесс）的起讫日期，Bedi等[9]分析了环流演变与印度降水的关系。张家诚等[4]研究了大气环流季节变化及其转换，陈玉琼等[10,11]、章基嘉等[12]也研究了季节演变。施永年[13]研究了气候振动。Багров等[14]用车贝雪夫多项式计算了拉普拉斯场。

（二）单点预报　单点预报多采用回归方程，其中预报因子取为车贝雪夫系数。例如，Friedman[5]的逐日降水预报（以700百帕高度和地面气压的车贝雪夫系数为因子），Miller[15]的逐日天气指标（用日照百分率、相对湿度、降水量组合而成）预报，Звеев[7]的欧洲中部地区降水预报（化作单点问题处理），陈玉琼等[10]的长江中下游预报等。

（三）气象要素分布预报　预报方法有两个。其一为逐点预报，然后给出平面上的分布。Miller等[15]就是这样做的。其二为先预报车贝雪夫系数，然后用系数再合成平面分布。Багров等[16]的环流形势中期预报、Бардин等[17]的北极气压距平预报都是按这一思路做的。

但是，所有这些研究，都只限于等距矩形格点，因而在实际应用中受到很大限制。我们知道，大部分气象资料都是在气象台站上的。如欲在等距矩形格点上作车贝雪夫展开，则必须首先在天气图上读出网格点上的数字，然后才能作统计处理。这不仅增加了工作量，而且使原始资料的风貌受损。因此，最好能直接处理气象台站上的资料。

作者在文献〔18〕中将车贝雪夫多项式推广到不规则格点上，从而使对气象台站原始资料直接进行车贝雪夫展开有了可能。在此基础上，作者[19]提出了一个预报气象台站上气象要素水平分布的方法。这一工作在第二次全国概率统计预报会议上报告之后，引起了一些气象台站的兴趣。于是，一些单位组织起来，成立了"车贝雪夫多项式在天气分析和预报中的应用"协作组。1982年3月，这一课题正式列入中央气象局重点科学技术推广项目并得到资助。两年多来，协作组取得了一批科研成果，召开了三次科研协作会议。协作组的成员有：中国科学院大气物理研究所，北京市、河北省、湖南省、河南省、扬州市气象台，江苏省、浙江省、黑龙江省气象科学研究所，辽宁省气象局，北京市农林科学院农业综合发展研究所等。

两年多来，协作组的工作成果有：

（一）车贝雪夫多项式在业务预报中的应用　目前，各协作单位已将作者提出的时间序列预报方法[21][22]、单点预报方法[23]和气象要素分布预报方法[19][20]应用于业务预报之中。主要的预报方案有：河北、黑龙江的降水分布预报，河南的降水集中时段、郑州温度和西华泛区农场小麦产量预报，扬州的旱涝趋势预报，北京、扬州的降水趋势预报，大气物理所的单点和降水分布预报试验，江苏省、浙江省气科所、北京农科院的降水分布预报试验，北京农科院的玉米估产模式等。这些预报方案中已有不少取得了较好的预报效果，获得了一定的经济效益。

（二）天气气候分析　各协作单位应用车贝雪夫多项式分析了当地和大范围的天气气候特征以及气象因素与农作物产量的关系等，得到了许多有助于天气预报的结果。

（三）预报方法研究　为了建立预报工具，就必须开展预报方法的研究。作者为适应台站工作的需要，提出了一种新的时间序列预报方法[21]。此后又作了进一步的研究[22]。使之理论上更加完整，使用上更加方便。各单位在使用这一方法时，又积累了许多经验。作者提出的要素分布预报方法[19]后来又有了进一步的发展[20]。各单位结合自己的实际情况，进行了广泛的研究，从而形成了风格各异的预报方案。作者提出的以不规则格点上车贝雪夫展开所求得的系数为预报因子的单点预报方法[23]也得到了广泛应用。

（四）关于车贝雪夫多项式原理的研究　Багров[24]系统地论述了车贝雪夫多项式的原理。我们在发展预报方法的过程中，又对车贝雪夫展开作了进一步的研究，使之可以用于非矩形网格[25,26]，同时还对拟合精度问题作了系统的分析[25,26,27]。我们关于车贝雪夫多项式原理的另一主要结果是向不规则格点的推广[18,25,26]。这一推广使得车贝雪夫展开可以用于台站资料，从而大大扩展了它的用途，形成了这几年来我国气象业务部门广泛应用这一技术方法的局面。

在协作组外，通过广泛的横向联系，车贝雪夫多项式方法现已推广到、吉林、安徽、内蒙、广西、福建、江西、天津、贵州、山东、陕西等省、市、自治区的气象、水文、水电、农业部门及部队，并且受到了医学部门的重视。

作者关于车贝雪夫多项式方法的研究成果，已提交了五个国际会议[21,20,22,68,75]1)。

本书是一本关于车贝雪夫多项式的专著。在内容的安排方面采取原理与应用并重的原则，兴趣只在应用的读者，可以略去有关的公式推导不读，这并不影响掌握实际操作技术。

在开始叙述具体的内容之前，我们尚需作一点声明。本书的绝大部分所说的车贝雪夫多项式，并不是一般数学书上所讲的车贝雪夫多项式，而是车贝雪夫称之为离散点上的平方内插函数的正交多项式。在西方的文献中，常称之为车贝雪夫正交多项式，有时也简称为正交多项式。为完整起见，书中也简要地介绍了第一类车贝雪夫多项式和傅立叶-车贝雪夫混合多项式。为行文方便，我们现在约定，在本书中除特别声明者外，凡是提到车贝雪夫多项式，均指离散点上的平方内插函数。为了简捷，有时我们也简称其为多项式。

本书第二至七章叙述车贝雪夫多项式原理，第八章介绍它在天气分析中的应用，第九至十一章是关于预报方法的问题，第十二章讨论资料处理，第十三章对全书作一个小结并将车贝雪夫多项式与气象上常用的其他正交函数作一比较。书末附有几个附录，分别给出本书的公式，关于误差的证明、车贝雪夫多项式值及有关的程序。

1）文献〔21〕、〔20〕、〔22〕、〔68〕、〔75〕分别提交如下国际会议：

Second Inter.Metting on Statis Climat. (1983, Lisbon); 8th Conf.on Probab.&Statis.in Atmos.Sci. (1983, Hot Springs); Inter. Conf. on Appl. Met. & Climat. (1985, Manila); Third Inter. Metting on Statis.Climat. (1986, Weinna); First WMO Conf.on Long-range Forecasting (1986, Sofia).

第二章　车贝雪夫多项式

§2.1　车贝雪夫多项式

在x轴的某区间上给定如下离散点：

$$x_1,\ x_2,\ \cdots,\ x_{I_0}$$

其中下标I_0表示格点总数。在上述格点上定义下列车贝雪夫多项式

$$\begin{cases}\varphi_0(x_i)=1 & (2.1)\\ \varphi_1(x_i)=x_i-P_{1,0}\varphi_0(x_i) & (2.2)\\ \varphi_2(x_i)=x_i^2-P_{2,1}\varphi_1(x_i)-P_{2,0}\varphi_0(x_i) & (2.3)\\ \varphi_3(x_i)=x_i^3-P_{3,2}\varphi_2(x_i)-P_{3,1}\varphi_1(x_i)-P_{3,0}\varphi_0(x_i) & (2.4)\\ \cdots\cdots & \\ \varphi_k(x_i)=x_i^k-P_{k,k-1}\varphi_{k-1}(x_i)-P_{k,k-2}\varphi_{k-2}(x_i)- & \\ \qquad\cdots-P_{k,1}\varphi_1(x_i)-P_{k,0}\varphi_0(x_i) & (2.5)\end{cases}$$

为了构成正交多项式系，要求

$$\sum_{i=1}^{I_0}\varphi_k(x_i)\varphi_l(x_i)=0\qquad(k\neq l)\tag{2.6}$$

如果我们能够求出（2.1）—（2.5）式中的各个系数$P_{k,l}$，则车贝雪夫多项式的表达式就得到了。

以$\varphi_0(x_i)$乘（2.2）式，并在I_0个离散点上求和，得

$$\sum_{i=1}^{I_0}\varphi_0(x_i)\varphi_1(x_i)=\sum_{i=1}^{I_0}x_i\varphi_0(x_i)-P_{1,0}\sum_{i=1}^{I_0}\varphi_0^2(x_i)$$

利用正交关系（2.6）式，即得

$$P_{1,0}=\frac{\sum\limits_{i=1}^{I_0}x_i\varphi_0(x_i)}{\sum\limits_{i=1}^{I_0}\varphi_0^2(x_i)}\tag{2.7}$$

以$\varphi_l(x_i)$（$l<k$）乘（2.5）式并作同样运算，则有

$$\sum_{i=1}^{I_0}\varphi_l(x_i)\varphi_k(x_i)=\sum_{i=1}^{I_0}x_i^k\varphi_l(x_i)-P_{k,k-1}\sum_{i=1}^{I_0}\varphi_l(x_i)\varphi_{k-1}(x_i)$$
$$-\cdots-P_{k,l}\sum_{i=1}^{I_0}\varphi_l^2(x_i)-\cdots-P_{k,k-2}\sum_{i=1}^{I_0}\varphi_l(x_i)\varphi_{k-2}(x_i)$$
$$-\cdots-P_{k,1}\sum_{i=1}^{I_0}\varphi_l(x_i)\varphi_1(x_i)-P_{k,0}\sum_{i=1}^{I_0}\varphi_l(x_i)\varphi_0(x_i)$$

利用（2.6）式的关系，则得

$$P_{k,l}=\frac{\sum\limits_{i=1}^{I_0}x_i^k\varphi_l(x_i)}{\sum\limits_{i=1}^{I_0}\varphi_l^2(x_i)}\quad(l=1,\ 2,\ 3,\ \cdots,\ k-1)\tag{2.8}$$

此式($k=1$，$l=0$时就是（2.7）式）就是求（2.1）至（2.5）式中$P_{k,l}$的通式。应用此式，可由低阶到高阶依次递推求得所有$P_{k,l}$，从而求出车贝雪夫多项式。

下面，再进一步讨论（2.8）式中分子与分母的计算问题。由（2.1）式得

$$\sum_{i=1}^{I_0}\varphi_0^2(x_i)=I_0 \tag{2.9}$$

以$\varphi_k(x_i)$乘（2.5）式然后对i求和，并利用（2.6）式可得

$$\sum_{i=1}^{I_0}\varphi_k^2(x_i)=\sum_{i=1}^{I_0}\varphi_k(x_i)\left[x_i^k-P_{k,k-1}\varphi_{k-1}(x_i)-\right.$$

$$\left.P_{k,k-2}\varphi_{k-2}(x_i)-\cdots-P_{k,1}\varphi_1(x_i)-P_{k,0}\varphi_0(x_i)\right]$$

$$=\sum_{i=1}^{I_0}x_i^k\varphi_k(x_i) \tag{2.10}$$

当$k=1$时，（2.10）式给出

$$\sum_{i=1}^{I_0}\varphi_1^2(x_i)=\sum_{i=1}^{I_0}x_i\varphi_1(x_i)$$

将（2.2）与（2.7）代入，则得

$$\sum_{i=1}^{I_0}\varphi_1^2(x_i)=\sum_{i=1}^{I_0}x_i^2-\frac{\left[\sum_{i=1}^{I_0}x_i\varphi_0(x_i)\right]^2}{\sum_{i=1}^{I_0}\varphi_0^2(x_i)} \tag{2.11}$$

当$k=2$时，由（2.10），（2.3），（2.8）式得

$$\sum_{i=1}^{I_0}\varphi_2^2(x_i)=\sum_{i=1}^{I_0}x_i^4-\frac{\left[\sum_{i=1}^{I_0}x_i^2\varphi_1(x_i)\right]^2}{\sum_{i=1}^{I_0}\varphi_1^2(x_i)}-\frac{\left[\sum_{i=1}^{I_0}x_i^2\varphi_0(x_i)\right]^2}{\sum_{i=1}^{I_0}\varphi_0^2(x_i)} \tag{2.12}$$

同理，有

$$\sum_{i=1}^{I_0}\varphi_3^2(x_i)=\sum_{i=1}^{I_0}x_i^6-\frac{\left[\sum_{i=1}^{I_0}x_i^3\varphi_2(x_i)\right]^2}{\sum_{i=1}^{I_0}\varphi_2^2(x_i)}$$

$$-\frac{\left[\sum_{i=1}^{I_0}x_i^3\varphi_1(x_i)\right]^2}{\sum_{i=1}^{I_0}\varphi_1^2(x_i)}-\frac{\left[\sum_{i=1}^{I_0}x_i^3\varphi_0(x_i)\right]^2}{\sum_{i=1}^{I_0}\varphi_0^2(x_i)} \tag{2.13}$$

以上各式中，(2.10)式是（2.8）式中分母的简化计算式。式(2.9)、(2.11)、（2.12)，(2.13）则是其进一步简化的计算式。利用这些式子，可以由较低阶的多项式值递推求出较高阶多项式值的平方和。

对于（2.8）式中的分子，可给出如下简化计算式。由（2.1）式得

$$\sum_{i=1}^{I_0} x_i\varphi_0(x_i)=\sum_{i=1}^{I_0} x_i \tag{2.14}$$

由（2.2），（2.7），（2.1）式得

$$\sum_{i=1}^{I_0} x_i^2\varphi_1(x_i)=\sum_{i=1}^{I_0} x_i^3-\frac{\sum_{i=1}^{I_0} x_i\sum_{i=1}^{I_0} x_i^2}{\sum_{i=1}^{I_0}\varphi_0^2(x_i)} \tag{2.15}$$

由（2.3），（2.8），（2.1）式得

$$\sum_{i=1}^{I_0} x_i^3\varphi_2(x_i)=\sum_{i=1}^{I_0} x_i^5-\frac{\sum_{i=1}^{I_0} x_i^2\varphi_1(x_i)\sum_{i=1}^{I_0} x_i^3\varphi_1(x_i)}{\sum_{i=1}^{I_0}\varphi_1^2(x_i)}$$

$$-\frac{\sum_{i=1}^{I_0} x_i^2\sum_{i=1}^{I_0} x_i^3}{\sum_{i=1}^{I_0}\varphi_0^2(x_i)} \tag{2.16}$$

还可求得类似的计算式。

有了（2.9）—（2.16）各式，我们就可以由（2.8）式求得$P_{k,l}$，从而求出各个车贝雪夫多项式的表达式。

当$l=0$时，由于$\varphi_0(x_i)=1$，故（2.6）式给出

$$\sum_{i=1}^{I_0}\varphi_k(x_i)=0 \qquad (k\neq 0) \tag{2.17}$$

上式说明除0阶多项式外，其余各阶多项式的值在所有格点上之和为0。

§2.2 多项式的递推公式

用（2.1）—（2.5）和（2.8）式逐步递推求$\varphi_k(x_i)$的表达式，原则上没有困难。但当多项式阶数k逐步升高时，计算起来十分繁复。因此，我们需要推导一个各阶多项式之间的简单的递推公式，以便直接由低阶多项式求得高阶多项式。

根据（2.5）式，可以写出

$$\varphi_{k+1}(x_i)=x_i^{k+1}-P_{k+1,k}\left[x_i^k-F_1(x^{k-1})\right]-F_2(x^{k-1})$$

$$\varphi_k(x_i)=x_i^k-P_{k,k-1}x_i^{k-1}-F_3(x^{k-2})$$

因此

$$\begin{aligned}\varphi_{k+1}(x_i)-(x_i-\theta_k)\varphi_k(x_i)&=x_i^{k+1}-P_{k+1,k}\left[x_i^k-F_1(x^{k-1})\right]\\&\quad -F_2(x^{k-1})-(x_i-\theta_k)\left[x_i^k-P_{k,k-1}x_i^{k-1}-F_3(x^{k-2})\right]\\&=(\theta_k-P_{k+1,k}+P_{k,k-1})x_i^k+P_{k+1,k}F_1(x^{k-1})-F_2(x^{k-1})\\&\quad -\theta_k\left[P_{k,k-1}x_i^{k-1}-F_3(x^{k-2})\right]\\&=(\theta_k-P_{k+1,k}+P_{k,k-1})x_i^k-F_4(x_i^{k-1})\end{aligned} \tag{2.18}$$

以上三式中$F_1(x_i^{k-1})$，$F_2(x_i^{k-1})$，$F_4(x_i^{k-1})$代表不高于$k-1$阶的x_i的多项式，$F_3(x_i^{k-2})$表示阶数不超过$k-2$的x_i的多项式，θ_k为待定常数。