

高等学校教材

电 路

下 册

主 编 彭正未

副主编 李裕能



中国水利水电出版社
www.waterpub.com.cn

TM13
P52
2

454623

高等学校教材

电 路

(下册)

主 编 彭正未

副主编 李裕能

中国水利水电出版社

内 容 提 要

《电路》是所有电类专业以及计算机、自动化、通信等专业必备的技术基础课。本教材分上、下两册。上册内容包括电路的基本定律和定理，基本分析计算方法，交、直流电路，非正弦周期电流电路，即主要是集总参数线性电路中的稳态过程，并且以交、直流电路对比的方式进行讲述。下册则主要讲述集总参数线性电路中的暂态过程，二端口网络，运算放大器电路，均匀传输线，信号传输网络等，包括拉普拉斯变换和傅里叶变换。本书可作为大学本科教材，且适合函授生学习，也可供有关专业技术人员参考，每章除有习题外，还备有复习提问，以促进学习者深入阅读和思考。

图书在版编目(CIP)数据

电路 下册/彭正未主编. - 北京: 中国水利水电出版社, 1998
ISBN 7-80124-825-2

I. 电… II. 彭… III. 电路理论 IV. TM13

中国版本图书馆 CIP 数据核字 (98) 第 23620 号

书 名	电路 (下册)
作 者	主编 彭正未 副主编 李裕能
出版、发行	中国水利水电出版社 (北京市三里河路 6 号 100044) 网址: www.waterpub.com.cn E-mail: sale@waterpub.com.cn 电话: (010) 63202266 (总机)、68331835 (发行部)
经 售	全国各地新华书店
排 版	北京金剑照排厂
印 刷	水利电力出版社印刷厂
规 格	787×1092 毫米 16 开本 14 印张 324 千字
版 次	1998 年 12 月第一版 1998 年 12 月北京第一次印刷
印 数	0001—5000 册
定 价	22.00 元

凡购买我社图书，如有缺页、倒页、脱页者，本社发行部负责调换
版权所有·侵权必究

前 言

时至今日,在我国,电路原理这门课程内容不只是增加了一些新的东西,以适应科学技术的发展变化,也相应删除或调整了一些内容,以适应教学计划时数要求。总的趋势是:较少强调基础理论性,而较多地向实用型转化。对于理工院校来说,这无疑是个好现象。因为不单是课程间教学内容要严格分工,以保证教学质量和减轻学生学习负担,同时也是本门课程在专业人才培养中应如何更好地发挥作用的需要。

本着促进人才培养,让学生经过本门课程学习,既有比较扎实的基础理论知识,又有较强的运用技能,编者以为,只有强调“三基”(即基本概念、基本原理、基本方法),在学生学过相关的高等数学、工程数学和物理学内容的条件下,尽可能在教材中和各个教学环节中体现“理论如何从实践中来,又如何到实践中去”,才是解决问题的根本途径。因为只当学生理解和掌握这一套思想方法,才谈得上真正学到手,实现独立思考、独立分析和独立工作能力的培养。当然,尽可能多的实践性环节,就学生而言,主要是指实验和习题练习,也是十分重要的。因为只有这样,才能获得理论思维和理论应用的灵活性锻炼,从而全面认识和透彻理解电路理论。

电路理论中最基本的物理概念主要是建立在物理学中电学和磁学基础上的,也与物理学中的其它部分相关。这是因为客观事物并不是孤立存在的,加上许多事物的运动变化规律是相通的。所以,各方面的基本物理知识均必须具备。数学是电路理论中的重要工具,不论是高等数学还是初等数学,尤其是基本运算概念和逻辑推理方法最为常用。加之电路理论结合着各式各样的实际应用,因此,本门课程是综合性很强,专业上亦十分重要的专业入门基础技术课,它尤其离不开辩证思维方法,单纯依靠形式逻辑思维是不行的。比如:任何定律和定理都有其成立条件和相应的应用条件。那么,随着具体条件的变化,这些定律和定理适用与否也可能会发生变化。又如:任何事物都不是孤立存在,客观条件的变化,有可能改变看似同一事物的基本属性。此外,看似不同性质或不同特点的事物,但其分析方法却又是相通的。因此,紧密联系实际去学会辩证分析,以及尽可能运用对比或类比的途径,去认识未知事物或尚不熟悉的事物,都是行之有效的方法。所以,分类、对比和归纳,均有助于把理论知识概括,使之比较容易学习和达到系统掌握的目的。编者将尽力为着读者做到这一点。与此同时,本书除每章开初有内容提要 and 末尾有习题外,还附有以提问形式的复习提问,目的在于提示读者怎样去深入思考和阅读该章内容。

全书以课内讲授 130 学时进行编写,由武汉水利电力大学电工原理教研室彭正未(负责第一章至第五章及十二章至十四章并担任主编)、李裕能(负责第六章至第九章并担任副主编)、夏长征(负责第十、十一章)共同合作编写。并承武汉水利电力大学电工原理教研室全体同仁们的支持,和高电压专家陈维贤教授的仔细审阅和提出宝贵意见,谨借此致以衷心感谢。鉴于编者的水平和能力有限,缺点和错误在所难免,恳请读者给予批评指正。

编著者

1997.8

目 录

前 言

第八章 一阶电路和二阶电路	1
第一节 一阶电路和高阶电路	1
第二节 电路动态过程的初始条件	2
第三节 一阶电路的零输入响应	4
第四节 一阶电路的零状态响应	9
第五节 一阶电路的全响应	13
第六节 阶跃函数和一阶电路的阶跃响应	18
第七节 冲激函数和一阶电路的冲激响应	20
第八节 二阶电路的零输入响应	28
第九节 二阶电路的零状态响应及阶跃响应	33
第十节 二阶电路的冲激响应	36
第十一节 卷积积分	37
复习提问八	39
习题八	40
第九章 拉普拉斯变换及网络函数	45
第一节 拉普拉斯变换与傅里叶变换的关系	45
第二节 拉普拉斯变换的基本性质	47
第三节 拉普拉斯反变换	51
第四节 拉普拉斯变换在线性电路分析计算中的应用	55
第五节 网络函数的定义及其性质	60
第六节 复频率平面及网络函数的极点与零点	62
第七节 零点、极点与冲激响应	63
第八节 零点、极点与频率响应	64
第九节 拉普拉斯变换法与正弦稳态相量法之间的对应关系	65
复习提问九	67
习题九	67
第十章 双端口网络	71
第一节 双端口网络与多端口网络	71
第二节 双端口网络的基本方程及其相应参数	72
第三节 双端口网络的等效电路	80
第四节 双端口网络的特性阻抗	82
第五节 双端口网络间的连接	84

第六节 双端口网络的网络函数	88
复习提问十	91
习题十	92
第十一章 具有运算放大器的电路	95
第一节 运算放大器的电路模型	95
第二节 由理想运算放大器构成的运算电路	97
第三节 节点法在含理想运算放大器的电路分析中的应用	100
第四节 负阻抗变换器	101
第五节 回转器	102
复习提问十一	103
习题十一	104
第十二章 均匀传输线	106
第一节 均匀传输线及其方程	106
第二节 均匀传输线方程的正弦稳态解	107
第三节 均匀传输线路上的电流、电压行波	110
第四节 特性阻抗、传播常数、波长、波速及无畸变线	113
第五节 终端连接波阻抗时的传输线	116
第六节 终端连接任意阻抗时的传输线	118
第七节 无损耗均匀传输线	122
第八节 无损耗均匀传输线方程的通解	127
第九节 无损耗线上波的入射、反射和多次反射	131
第十节 无损耗线路上波的折射与彼德生法则	134
复习提问十二	138
习题十二	139
第十三章 傅里叶变换	141
第一节 傅里叶级数及一些典型周期信号	141
第二节 傅里叶积分变换及一些典型的非周期信号频谱	149
第三节 冲激函数与阶跃函数的傅里叶变换	154
第四节 傅里叶变换的基本性质	156
第五节 卷积定理	168
第六节 周期信号的傅里叶变换	173
第七节 抽样信号的傅里叶变换	176
第八节 抽样定理	181
复习提问十三	185
习题十三	186
第十四章 信号传输网络	189
第一节 信号传输系统的响应	189
第二节 无失真传输	195

第三节 理想低通滤波器及其冲激响应	198
第四节 理想低通滤波器的阶跃响应	199
第五节 传输网络的可实现性及佩利——维纳准则	202
第六节 可实现的典型滤波网络函数——巴特沃兹逼近与切比雪夫逼近	204
第七节 调制与解调	207
复习提问十四	209
习题十四	210
附录一 常用周期信号的傅里叶级数表	211
附录二 常用信号的傅里叶变换表	212

第八章 一阶电路和二阶电路

本章的主要内容有动态电路及其方程, 动态电路的换路定则及初始条件的计算, 一阶电路的时间常数, 一阶电路的零输入响应, 一阶电路的零状态响应, 一阶电路的全响应, 一阶电路的阶跃响应, 一阶电路的冲激响应, 二阶电路的零输入响应, 二阶电路的零状态响应及阶跃响应, 二阶电路的冲激响应和卷积积分。

第一节 一阶电路和高阶电路

一、动态电路

电路有两种工作状态: 稳态和暂态。当电路在直流电源的作用下, 各条支路的响应也都是直流时, 或当电路在正弦交流电源的作用下, 各条支路的响应也都是正弦交流时, 这种电路称为稳态电路, 即电路处于稳定工作状态。描述直流稳态电路的方程是代数方程。用相量法分析交流电路时, 描述交流稳态电路的方程也是代数方程。前面第二章至第七章所述就是稳态电路。当电路中存在储能元件(电感和电容), 并且电路中的开关被断开或闭合, 使电路的接线方式或元件参数发生变化(称此过程为换路), 电路将从一种稳态过渡到另外一种稳态。这一过渡过程一般不会瞬间完成, 需要经历一段时间, 在这一段时间里电路处于一种暂态过程, 所以称它为动态电路。

描述动态电路的方程是微分方程。动态电路中独立储能元件的个数称为电路的阶数, 电路的阶数也就是微分方程的阶数。例如有一个独立储能元件的电路就称为一阶电路, 如图 8-1 (a) 所示电路, 描述这个一阶电路的方程是一阶微分方程; 有两个独立储能元件的电路就称为二阶电路, 描述这个二阶电路的方程是二阶微分方程。有两个或两个以上独立储能元件的电路称为高阶电路。

二、分析动态电路的步骤

当电路中的开关被断开或闭合, 使电路的接线方式或元件参数发生变化, 则称此过程为换路。如果换路这一时刻记为 $t = 0$, 换路前的一瞬间记为 $t = 0_-$, 换路后的一瞬间记为 $t = 0_+$ 。换路后电路达到新的稳态时间, 理论上讲是 $t = \infty$ 。

分析计算电路中发生过渡过程时各条支路的响应, 首先是根据换路后的电路结构列写电路微分方程; 然后是求解微分方程, 计算出方程的通解; 最后由电路的初始条件确定积分常数, 求出满足电路初始条件的解。分析动态电路的这种方法通常称为时域分析法, 亦称为经典法。

例如对于图 8-1 (a) 所示一阶电路, 开关 K 原先是断开的, 且电路已处于稳定状态。当 $t = 0$ 时开关 K 闭合, 求 $t \geq 0$ 时电容电压 $u_C(t)$ 。那么第一步是由换路后的电路结构列写电路的微分方程: $Ri + u_C = U_S$ 。由于 $i = C \frac{du_C}{dt}$, 故有 $RC \frac{du_C}{dt} + u_C = U_S$; 然后第二步

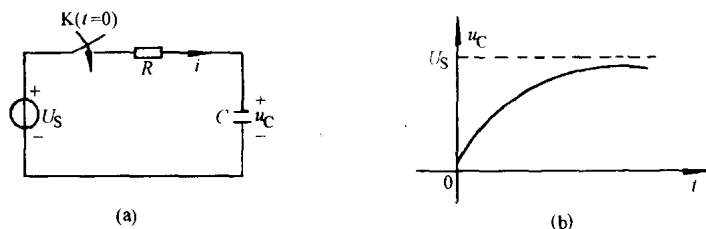


图 8-1 R 、 C 一阶电路及其响应

是求解上述微分方程，计算出方程的通解。由数学知识判断，上述方程是一阶线性常系数非齐次微分方程，该方程的通解为 $u_C = U_S + Ae^{-t/RC}$ ，其中 A 为积分常数。第三步由电路的初始条件确定积分常数，求出 $A = -U_S$ 。最后求出满足电路初始条件的解，电容电压为 $u_C = U_S - U_S e^{-t/RC}$ 。电容电压的变化规律如图 8-1 (b) 所示。分析电容电压的变化，在 $t < 0$ 时，电路是处于一种稳态， $u_C = 0$ 。在 $t = \infty$ 时，电路又达到一种新的稳态， $u_C = U_S$ 。而 $0 \leq t < \infty$ 时，电路处于两种稳态之间的过渡阶段，电容电压由零开始按指数规律增长，最后达到电源电压的值 U_S 。本章就是要研究这一过渡阶段电路中的响应。这里只是粗略地描述分析动态电路的基本步骤，至于详细内容将在后面几节里深入分析。

第二节 电路动态过程的初始条件

从数学中可知，比如要计算出二阶微分方程 $\frac{d^2 y}{dt^2} + a \frac{dy}{dt} + by = f(t)$ 的特定条件下的通解，应给出两个条件： $y|_{t=0} = m$ ， $\frac{dy}{dt}|_{t=0} = n$ 。这两个条件分别是 $t = 0$ 时刻（即初始时刻）函数 y 的值和函数 y 的一阶导数的值，以便确定积分常数。故称这两个条件为初始条件。对于求解一个描述二阶电路电流变化的微分方程 $\frac{d^2 i}{dt^2} + a \frac{di}{dt} + bi = f(t)$ ，也应该知道两个条件： $i|_{t=0_+} = m$ ， $\frac{di}{dt}|_{t=0_+} = n$ 。这两个条件分别是 $t = 0_+$ 时刻（即换路的初始时刻）电流 i 的值和电流 i 的一阶导数的值，以便确定积分常数。故称这两个条件为电流的初始条件。通常对于任何一个电路问题，其初始条件都不是随意给定的，因为它要根据电路在换路前后瞬间某些物理量应遵循的规律来确定。在这一节里，我们正是要研究电路在换路前后瞬间电容电压和电感电流应遵循的规律。

一、电路的换路定则

对于线性电容来说，在任意时刻其电荷与电流的关系为 $dq = i_C dt$ ，我们将这一表达式两边从 t_0 到 t 积分可得

$$\int_{q(t_0)}^{q(t)} dq = \int_{t_0}^t i_C(\xi) d\xi$$

$$q(t) - q(t_0) = \int_{t_0}^t i_C(\xi) d\xi$$

令 $t_0 = 0_-$ ， $t = 0_+$ 可以得到

$$q(0_+) = q(0_-) + \int_{0_-}^{0_+} i_C dt \quad (8-1)$$

与之相应
$$u_C(0_+) = u_C(0_-) + \frac{1}{C} \int_{0_-}^{0_+} i_C dt \quad (8-2)$$

在一般情况下，时间由 0_- 到 0_+ ，即在换路前后瞬间，电容电流 i_C 为有限值，故式(8-1)、式(8-2) 中的积分项等于零。因此可以得到

$$q(0_+) = q(0_-) \quad (8-3)$$

$$u_C(0_+) = u_C(0_-) \quad (8-4)$$

由式(8-3)、式(8-4) 可以看出，在换路前后瞬间，电容的电荷和电压都不能发生跃变。即电容器的电荷和电压在换路前后瞬间是相等的。式(8-4) 中的 $u_C(0_+)$ 称为电容的初始条件。该条件称为独立初始条件。

对于线性电感来说，在任意时刻其磁链与电压的关系为 $d\Psi = u_L dt$ ，我们将这一表达式两边从 t_0 到 t 积分可得

$$\begin{aligned} \int_{\Psi(t_0)}^{\Psi(t)} d\Psi &= \int_{t_0}^t u_L(\xi) d\xi \\ \Psi(t) - \Psi(t_0) &= \int_{t_0}^t u_L(\xi) d\xi \end{aligned}$$

令 $t_0 = 0_-$ ， $t = 0_+$ 可以得到

$$\Psi(0_+) = \Psi(0_-) + \int_{t_0}^t u_L(\xi) d\xi \quad (8-5)$$

与之相应
$$i_L(0_+) = i_L(0_-) + \frac{1}{L} \int_{t_0}^t u_L(\xi) d\xi \quad (8-6)$$

在一般情况下，时间由 0_- 到 0_+ ，即在换路前后瞬间，电感电压 u_L 为有限值，故式(8-5)、式(8-6) 中的积分项等于零。因此可以得到

$$\Psi(0_+) = \Psi(0_-) \quad (8-7)$$

$$i_L(0_+) = i_L(0_-) \quad (8-8)$$

由式(8-7)、式(8-8) 可以看出，在换路前后瞬间，电感的磁链和电流都不能发生跃变。即电感器的磁链和电流在换路前后瞬间是相等的。式(8-8) 中的 $i_L(0_+)$ 称为电感的初始条件。该条件也是独立初始条件。式(8-3)、式(8-4)、式(8-7)、式(8-8) 等统称为动态电路的换路定则。

从功率和能量的关系看，在换路前瞬间，电容的能量为 $\frac{1}{2} C u_C^2(0_-)$ ，在换路后瞬间，电容的能量为 $\frac{1}{2} C u_C^2(0_+)$ 。在换路前后瞬间电容的能量通常是守恒的，所以在换路前后电容的电压应该相等。由于功率 $p = \frac{dw}{dt}$ ，如果在换路前后瞬间电容的能量不相等，则电源的功率为无限大，这一般是不可能的。同样地在换路前瞬间，电感的能量为 $\frac{1}{2} L i_L^2(0_-)$ ，在换路后瞬间，电感的能量为 $\frac{1}{2} L i_L^2(0_+)$ 。在换路前后瞬间电感的能量一般也是守恒的，所以在换路前后电感的电流应该相等。由于功率 $p = \frac{dw}{dt}$ ，如果在换路前后瞬间电感的能量不相等，则电源的功率为无限大，这一般也是不可能的。

二、如何计算电路的初始条件

对于一个动态电路，其独立的初始条件是 $u_C(0_+)$ 或 $q(0_+)$ 和 $i_L(0_+)$ 或 $\psi(0_+)$ ，

其余的是非独立初始条件。如果要计算电路的初始条件, 首先应计算独立的初始条件 $u_C(0_+)$ 和 $i_L(0_+)$ 。这应根据换路前的电路计算出 $u_C(0_-)$ 和 $i_L(0_-)$, 然后令其相等即可求得 $u_C(0_+)$ 和 $i_L(0_+)$ 。其次将换路后电路中的电容用一个电压源替代, 这个电压源的电压值等于 $u_C(0_+)$; 将换路后电路中的电感用一个电流源替代, 这个电流源的电流值等于 $i_L(0_+)$; 电路中的独立电源按 $t = 0_+$ 取值(如果是直流电源则不变); 这样就可以画出一个换路后的等效电路。在这个等效电路中就可以求出所需要的非独立初始条件。

例 8-1 图8-2 示电路原已处于稳定状态, 且电容 C 上无电荷。已知 $U = 100\text{V}$, $R = 4\Omega$, $R_1 = 6\Omega$, $C = 10\mu\text{F}$, $L = 3\text{H}$ 。求开关 K 闭合后瞬间各条支路电流及电容、电感电压。

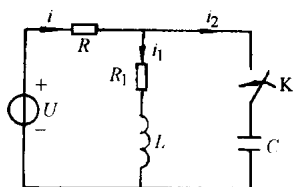


图 8-2 例 8-1 图

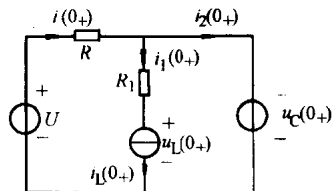


图 8-3 例 8-1 等效电路

解:

(1) 求独立初始条件。开关 K 闭合之前, 电路已处于稳定状态, 由于电容 C 上无电荷, 所以

$$u_C(0_-) = 0\text{V}$$

$$i_L(0_-) = \frac{U}{R + R_1} = \frac{100}{4 + 6} = 10\text{ (A)}$$

(2) 画等效电路。 $u_C(0_+) = u_C(0_-) = 0\text{ V}$; $i_L(0_+) = i_L(0_-) = 10\text{ A}$ 。将换路后电路中的电容用一个电压源替代, 这个电压源的电压值等于 $u_C(0_+) = 0\text{ V}$; 将换路后电路中的电感用一个电流源替代, 这个电流源的电流值等于 $i_L(0_+) = 10\text{ A}$; 电路中的独立直流电压源则不变; 这样就可以画出一个换路后的等效电路如图 8-3 所示。

(3) 求非独立初始条件。

$$i(0_+) = U/R = 100/4 = 25\text{ (A)}$$

$$i_1(0_+) = i_L(0_+) = 10\text{ A}$$

$$i_2(0_+) = i(0_+) - i_1(0_+) = 25 - 10 = 15\text{ (A)}$$

由于

$$R_1 i_1(0_+) + u_L(0_+) = 0$$

故

$$u_L(0_+) = -R_1 i_1(0_+) = -6 \times 10 = -60\text{ (V)}$$

第三节 一阶电路的零输入响应

如果动态电路在换路之后电路中无独立电源, 由换路之前储能元件储存的能量在电路中产生响应, 此时电路中没有外加激励, 则称这种响应为零输入响应。零输入响应实质上就是储能元件释放能量的过程。

一、 R 、 C 电路的零输入响应

如图 8-4 (a) 所示电路, U_0 是一个直流电压源, 换路之前开关 K 接通触点 1, 且电路

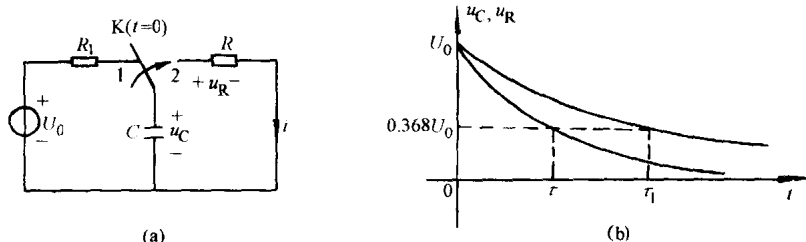


图 8-4 R 、 C 电路的零输入响应

已处于稳定状态。当 $t=0$ 时开关 K 由触点 1 切换到触点 2，当 $t \geq 0$ 时，试分析 R 、 C 电路中 u_C 、 u_R 、 i 的变化规律。

当 $t \geq 0$ 时，在 R 、 C 回路中，可列出 KVL 方程： $u_C - u_R = 0$ 。由于 $u_R = Ri$ ， $i = -C \frac{du_C}{dt}$ 代入 KVL 方程，得到一个一阶常系数线性齐次微分方程

$$RC \frac{du_C}{dt} + u_C = 0 \quad (8-9)$$

上述微分方程可以用分离变量法积分求解。在此用常系数线性齐次微分方程的一般解法求出它的通解，其具体步骤是首先令其通解形式为

$$u_C(t) = Ae^{pt}$$

将此代入式(8-9)，消去公因子 Ae^{pt} 便得到原微分方程的特征方程： $RCp + 1 = 0$ 。特征方程的特征根为 $p = -\frac{1}{RC}$ 。微分方程的通解为

$$u_C(t) = Ae^{pt} = Ae^{-\frac{t}{RC}} \quad (8-10)$$

其中， A 为积分常数，由电路的初始条件来确定。由于电路在换路之前已处于稳定状态，电容在直流稳态电路中相当于开路，故 U_0 、 R_1 、 C 回路中的电流为零，也就是说按回路的 KVL 方程可计算出换路前电容电压 $u_C(0_-) = U_0$ ，即电容被充电至电源电压。由换路定则 $u_C(0_+) = u_C(0_-)$ ，可以求出 $u_C(0_+) = U_0$ 。将 $t = 0_+$ 代入式(8-10) 可得到积分常数 $A = U_0$ 。从而得到给定初始条件下电容电压的零输入响应

$$u_C = U_0 e^{-\frac{t}{RC}} \quad (t \geq 0) \quad (8-11)$$

这就是在换路之后 R 、 C 电路中电容电压的变化规律。回路中的电流和电阻电压也可以计算出来

$$\begin{aligned} i &= -C \frac{du_C}{dt} = -C \frac{d}{dt} (U_0 e^{-\frac{t}{RC}}) = -C \left(-\frac{1}{RC} \right) U_0 e^{-\frac{t}{RC}} \\ &= \frac{U_0}{R} e^{-\frac{t}{RC}} \quad (t \geq 0) \end{aligned} \quad (8-12)$$

$$u_R = u_C = U_0 e^{-\frac{t}{RC}} \quad (t \geq 0) \quad (8-13)$$

现根据电容电压和电阻电压的表达式，绘出换路之后它们的变化规律如图 8-4 (b) 所示。从图中可以看出，电容电压和电阻电压都是按同样的指数衰减规律变化的。电容电压在换路前后瞬间没有发生跃变，从初始值 U_0 开始按规律指数衰减，从理论上讲，当 $t = \infty$ 时，

电容电压衰减到零,达到新的稳态。这实际上就是换路前已充电的电容在换路后放电的物理过程。电路中的电阻电压在换路前后瞬间发生了跃变,换路前瞬间其值为零,换路后瞬间其值为 U_0 ; 电路中的电流在换路前后瞬间也发生了跃变,换路前瞬间其值为零,换路后瞬间其值为 U_0/R 。

从能量的角度来分析 R 、 C 电路的零输入响应,即电容在换路之前储存有电场能量,在换路之后,电容在放电过程中不断释放电场能量,电阻则不断消耗能量,将电场能量转变为热能。电容储存的电场能量为

$$W_C = \frac{1}{2} CU_0^2$$

电阻消耗的能量为

$$\begin{aligned} W_R &= \int_0^\infty i^2 R dt = \int_0^\infty \left(\frac{U_0}{R} e^{-\frac{t}{RC}} \right)^2 R dt = \left[-\frac{RC}{2} \frac{U_0^2}{R} e^{-\frac{2t}{RC}} \right]_0^\infty \\ &= \frac{1}{2} CU_0^2 \end{aligned}$$

电阻消耗的能量,刚好与电容器储存的电场能量相等。

二、时间常数

动态电路的过渡过程所经历的时间长短,取决于电容电压衰减的快慢。而电容电压衰减的快慢,又取决于衰减指数 $\frac{1}{RC}$ 。令 $RC = \tau$, τ 称为时间常数,它的单位为秒,这是因为

$$[\tau] = [RC] = [\text{欧姆}] [\text{法拉}] = \frac{[\text{伏特}] [\text{库仑}]}{[\text{安培}] [\text{伏特}]} = \frac{[\text{伏特}] [\text{安培}] [\text{秒}]}{[\text{安培}] [\text{伏特}]} = [\text{秒}]$$

将它代入式(8-11)、式(8-12)可得到

$$u_C = U_0 e^{-\frac{t}{\tau}} \quad (t \geq 0) \quad (8-14)$$

$$i = \frac{U_0}{R} e^{-\frac{t}{\tau}} \quad (t \geq 0) \quad (8-15)$$

在式(8-14)中,令 $t = \tau$, 则电容电压在这一时刻的值为

$$u_C = U_0 e^{-\frac{\tau}{\tau}} = U_0 e^{-1} = 0.368 U_0$$

也就是说,在时间为 τ 这一时刻,电容电压衰减到初始电压 U_0 的 36.8%。如图 8-4 (b) 所示。换句话说, τ 就是电容电压衰减到初始电压的 0.368 倍所需要的时间。 τ 值越大,电压衰减越慢,像图中 $\tau_1 > \tau$, 相对说来 τ_1 所对应的曲线比 τ 所对应的曲线衰减要慢一些。电路的时间常数 τ 与 R 、 C 之乘积成正比,与电路的初始状态无关。在一些时间控制电路中,正是通过改变 R 、 C 的参数来调整时间常数,以达到改变电容的放电曲线。

从理论上讲, R 、 C 电路的动态过程需要经历无限长时间才能结束,即是说当 $t = \infty$ 时,式(8-14)中的电压和式(8-15)中的电流才衰减到零,达到新的稳态。然而,当时间 $t = 5\tau$ 时, $u_C = U_0 e^{-5} = 0.007 U_0$ 。此时电容电压已接近于零,电容的放电过程已基本结束。所以工程上一般认为动态电路的暂态过程持续时间为 $4\tau \sim 5\tau$ 。

例 8-2 一组电容量为 $40\mu\text{F}$ 的电容器从高压电网上退出运行,在退出前瞬间电容器的电压为 3.5kV ,退出后电容器经本身的泄漏电阻放电,等效电路如图 8-5 所示。已知其泄漏电阻 $R = 100\text{M}\Omega$ 。求:

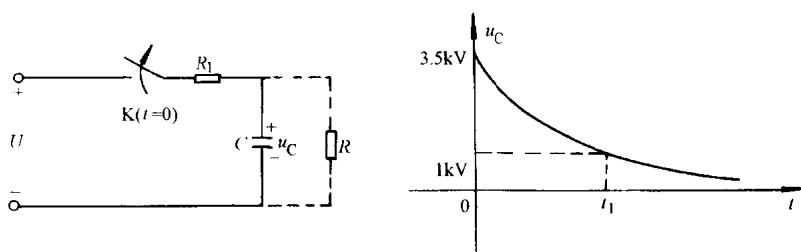


图 8-5 例 8-2 图

- (1) 电路的时间常数；
- (2) 经过多长时间电容电压下降到 1000V；
- (3) 经过多长时间电容放电基本结束。

解：

(1) 当电容器从高压电网上退出运行，即开关 K 断开之后，就是一个 R 、 C 放电电路。由于 $u_C(0_-) = 3500\text{V}$ ，所以 $u_C(0_+) = u_C(0_-) = 3500\text{V}$ 。电容放电时电压的变化规律为

$$u_C(t) = 3500e^{-\frac{t}{RC}} (\text{V}) \quad (t \geq 0)$$

电路的时间常数 $\tau = RC = 100 \times 10^6 \times 40 \times 10^{-6} = 4000 (\text{s})$

(2) 设电容电压下降到 1000V 的时间为 t_1 。则

$$1000 = 3500e^{-\frac{t_1}{4000}}$$

解得 $t_1 = 5000\text{s} = 1\text{h}23\text{min}20\text{s}$ 。即电容退出运行后经过 1h23min20s，其电压降到 1000V。

(3) 整个放电过程经历的时间为

$$t = 5\tau = 5 \times 4000 = 20000 (\text{s}) = 5\text{h}33\text{min}20\text{s}$$

即电容退出运行后经过 5h33min20s，其放电过程基本结束。

通过以上例题分析可知，当储能元件电容从电路中退出运行后，电容器的两个极板仍然带有电荷，其端电压不为零，这一电压可能会危害设备安全或人身安全。电感电流也具有相似的特性，在工作中应特别注意。

三、 R 、 L 电路的零输入响应

如图 8-6 (a) 所示电路， U_0 是一个直流电压源，换路之前开关 K 接通触点 1，且电路已处于稳定状态。当 $t = 0$ 时开关 K 由触点 1 切换到触点 2。当 $t \geq 0$ 时，试分析 R 、 L 电路中 i 、 u_L 、 u_R 的变化规律。

当 $t \geq 0$ 时，在 R 、 L 回路中，可列出 KVL 方程： $u_L + u_R = 0$ 。由于 $u_R = Ri$ ， $u_L = L \frac{di}{dt}$ ，代入 KVL 方程，得到一个一阶常系数线性齐次微分方程

$$L \frac{di}{dt} + Ri = 0$$

其特征方程为 $Lp + R = 0$ ，特征根为 $p = -\frac{R}{L}$ 。故微分方程的通解为

$$i = Ae^{pt} = Ae^{-\frac{R}{L}t} \quad (8-16)$$

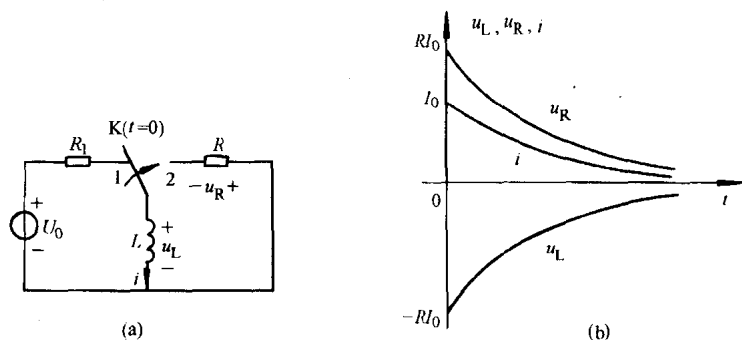


图 8-6 R 、 L 一阶电路的零输入响应

令 $\frac{L}{R} = \tau$, τ 称为 R 、 L 电路的时间常数, 它的单位仍然为秒。式(8-16) 为

$$i = Ae^{-\frac{t}{\tau}}$$

其中, A 为积分常数。依照电路的初始条件, 电路在换路之前已处于稳定状态, 电感在直流稳态电路中相当于短路, 故 U_0 、 R_1 、 L 回路中的电流为 $i_L(0_-) = U_0/R_1$, 令 $U_0/R_1 = I_0$ 。由换路定则 $i_L(0_+) = i_L(0_-)$, 所以得到 $i_L(0_+) = I_0$ 。将 $t = 0_+$ 代入式(8-16) 可求得积分常数 $A = I_0$ 。从而得到给定初始条件下电感电流的零输入响应

$$i = I_0 e^{-\frac{t}{\tau}} \quad (t \geq 0) \quad (8-17)$$

电感电压

$$u_L = L \frac{di}{dt} = -RI_0 e^{-\frac{t}{\tau}} \quad (t \geq 0) \quad (8-18)$$

电阻电压

$$u_R = Ri = RI_0 e^{-\frac{t}{\tau}} \quad (t \geq 0) \quad (8-19)$$

将 i 、 u_L 、 u_R 的波形绘出来, 如图 8-6 (b) 所示。从图中可以看出, 电感电压、电阻电压和电感电流都是按同样的指数衰减规律变化的。电感电流在换路前后瞬间没有发生跃变, 从初始值 I_0 开始按规律指数衰减, 从理论上讲, 当 $t = \infty$ 时, 电感电流衰减到零, 达到新的稳态。这实际上就是换路前储存磁场能量的电感, 在换路后释放能量的物理过程。电路中电阻 R 的电压在换路前后瞬间发生跃变, 换路前瞬间其值为零, 换路后瞬间其值为 RI_0 ; 电路中的电感电压在换路前后瞬间也发生了跃变, 换路前瞬间其值为零, 换路后瞬间其值为 $-RI_0$ 。

从能量的角度来分析 R 、 L 电路的零输入响应: 电感在换路之前储存有磁场能量, 在换路后不断释放磁场能量, 电阻 R 则不断消耗能量, 将磁场能量转变为热能。

应该注意的是, 在 R 、 C 电路中时间常数 τ 与电阻 R 成正比, 电阻 R 越大, 时间常数 τ 越大; 而在 R 、 L 电路中时间常数 τ 与电阻 R 成反比, 电阻 R 越大, 时间常数 τ 越小。

例 8-3 图 8-7 (a) 所示电路是用直流电压表测量电感线圈电压的接线。已知线圈电阻 $R = 1\Omega$, 电感 $L = 2H$, 电压表内阻 $R_V = 5000\Omega$, 电源电压 $U = 10V$, 电路已处于稳定状态。

求开关 K 断开后流过电压表的电流和电压表承受的最高电压。

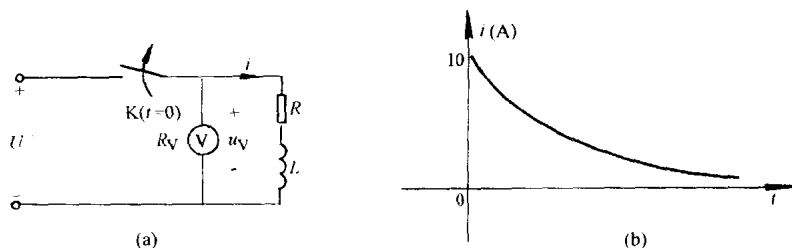


图 8-7 例 8-3 电路图及电流波形

解： 当开关 K 断开后，电路中的响应为零输入响应。电路的时间常数

$$\tau = \frac{L}{R + R_V} = \frac{2}{1 + 5000} \approx 0.4 \times 10^{-3} (\text{s})$$

开关 K 断开后流过电压表的电流为

$$i = Ae^{-\frac{t}{\tau}} = Ae^{-2500t}$$

电感电流的初始值为

$$i_L(0_+) = i_L(0_-) = U/R = 10/1 = 10 (\text{A})$$

将 $t = 0_+$ 代入电流表达式，求得 $A = 10$ 。所以

$$i = 10e^{-2500t} (\text{A}) \quad (t \geq 0)$$

电压表承受的电压为

$$u_V = -Ri = -5000 \times 10e^{-2500t} = -50000e^{-2500t} (\text{V}) \quad (t \geq 0)$$

当 $t = 0$ 时，电压表承受的电压最高，其值为

$$u_{\max} = -50000 \text{V}$$

由以上分析可以看出，电压表承受的电压很高，有可能损坏电压表。因此在断开开关之前应切除电压表，或将它经过并联上的电阻短路。

第四节 一阶电路的零状态响应

如果动态电路在换路之前，电路中的储能元件没有储存能量，即在换路之前电容电压或电感电流为零，像这种电路的独立初始条件为零的情形便称为零状态。这时，由换路之后电路中的电源在电路中产生的响应，称为零状态响应。零状态响应实质上就是储能元件储存能量的过程。

一、R、C 电路的零状态响应

如图 8-8 (a) 所示电路， U_S 是一个直流电压源，开关 K 在 $t = 0$ 时闭合。当 $t \geq 0$ 时，试分析 R、C 电路中 u_C 、 u_R 、 i 的变化规律。

当 $t \geq 0$ 时，在 U_S 、R、C 回路中，可列出 KVL 方程： $u_C + u_R = U_S$ 。由于 $u_R = Ri$ ， $i = C \frac{du_C}{dt}$ 代入 KVL 方程，得到一个一阶线性常系数非齐次微分方程

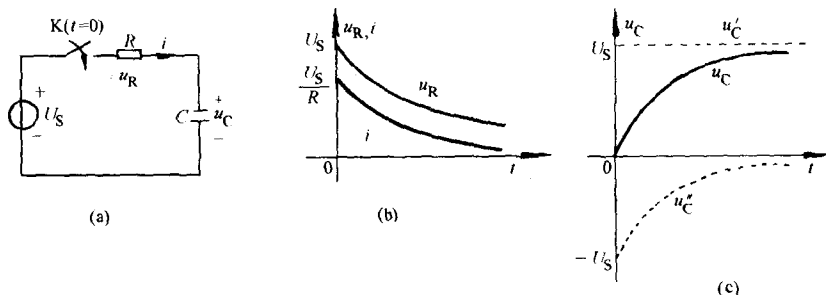


图 8-8 R 、 C 电路的零状态响应

$$RC \frac{du_C}{dt} + u_C = U_S \quad (8-20)$$

由数学知识可知, 该方程的通解由两部分组成。即

$$u_C = u'_C + u''_C \quad (8-21)$$

式(8-21)中 u'_C 是方程的特解, u''_C 是补充函数。方程的特解 u'_C 应满足

$$RC \frac{du'_C}{dt} + u'_C = U_S \quad (8-22)$$

补充函数 u''_C 应满足

$$RC \frac{du''_C}{dt} + u''_C = 0 \quad (8-23)$$

由于适合于式(8-22)的解就是方程的特解。那么, 当电路达到新的稳态, 必定也满足方程。而电路达到新的稳态时, 电容电压 u_C 应等于电源电压 U_S 。故特解为

$$u'_C = U_S \quad (8-24)$$

式(8-23)的解为原方程所对应的齐次式通解, 故

$$u''_C = A e^{pt} = A e^{-\frac{t}{RC}} \quad (8-25)$$

故原方程的通解为

$$u_C = u'_C + u''_C = U_S + A e^{-\frac{t}{RC}} \quad (8-26)$$

依照电路的初始条件去确定积分常数。由于电路在换路之前已处于稳定状态, $U_C(0_-) = 0$ 。由换路定则 $u_C(0_+) = u_C(0_-) = 0$, 将 $t = 0_+$ 代入式(8-26)可得到积分常数 $A = -U_S$ 。故在此初始条件下的电容电压响应为

$$u_C = U_S - U_S e^{-\frac{t}{RC}} = U_S (1 - e^{-\frac{t}{RC}}) \quad (t \geq 0) \quad (8-27)$$

这就是在换路之后 R 、 C 电路中电容电压的变化规律。回路中的电流和电阻电压也可以计算出来

$$\begin{aligned} i &= C \frac{du_C}{dt} = C \frac{d}{dt} (U_S - U_S e^{-\frac{t}{RC}}) \\ &= \frac{U_S}{R} e^{-\frac{t}{RC}} \quad (t \geq 0) \end{aligned} \quad (8-28)$$