高 等 学 校 教 学 用 書

高等数学教程

第 三 卷

陈 藎 民 著

机 械 工 业 出 版 社

高等学校教学用書

高等数学教程

第三卷

陈藎民著

机械工业出版社

本書第三卷分为三編、七章：第一編为多元函数微分学，內容計有：基础知識（多元函数与極限）、导数与微分、微分法应用（包括矢量微分法及其应用）三章；第二編为多元函数积分学，內容計有：重积分、曲綫积分与曲面积分（包括場論的基础知識）两章；第三編为由級数确定的函数，內容計有：数項級数与函数項級数、冪級数与三角級数两章。書中重要的基本概念都先从具体問題引出，然后抽象地加以定义，并另行举例說明所定义的概念。

書中某些章节作如下的安排：矢量的导数，特別注重它的物理与几何意义。复合函数与隐函数微分法是讀者的难点，本書把全导数公式作为这两类函数的微分法則而不作为导数的基本概念之一，来解决这一难点。曲綫积分与曲面积分以及梯度、散度、旋度也是讀者的难点，除从物理或流体力学引出其概念外，还特別詳細地叙述。由于在第四卷講福里哀变换与拉氏变换时，需要先知道无穷积分所确定的函数，而无穷积分又与級数相类似，所以，本書把无穷积分所确定的函数部分写在数項級数与函数項級数一章之后，作为这一章的附录。

NO. 2824

1959年9月第一版　　1959年9月第一版第一次印刷

850×1168 $^{1}/_{32}$　字数 302 千字　印張 11 $^{7}/_{8}$　0,001—11,200 册

机械工业出版社(北京阜成門外百万庄)出版

机械工业出版社印刷厂印刷　　新华書店發行

北京市書刊出版业营业許可証出字第 008 号　定价（10）1.85 元

第 三 卷

数学分析的进一步發展

目 次

第一编 多元函数微分学

第二十一章 基础知識

第二十二章 多元函数的导数与微分

第二十三章 微分法应用

第二編 多元函数积分学

第二十四章 重积分

第二十五章 曲綫积分及曲面积分

第三編 由級数确定的函数

第二十六章 数項級数与函数項級数

第二十七章 冪級数与福里哀級数

第一編　多元函数微分学

多元函数微分学是一元函数微分学的进一步發展。它与一元函数微分学有共同之点，也有差异之点，而这种差异又在多元函数中統一起来。学習时应当注意它們的异同，加以比較与联系。这样，不仅有助于一元函数微分学的巩固，也有助于多元函数微分学的理解与記忆。本編分为三章：(一)基础知識；(二)多元函数的导数与微分；(三)微分法应用。

第二十一章　基础知識

多元函数的概念、極限与連續都是学習多元函数微分学与积分学的預备知識或基础知識，这好像上一卷的函数与極限两章是一元函数微积分学的基础知識一样。因此，我們要在多元函数微分学之前，講这三个基础概念。本章分为两节：(一)多元函数概念；(二)多元函数的極限与連續。

第一节　多元函数概念

§21.1　二元函数概念

一元函数在实用上虽然很重要，但是多元函数尤其重要。在客观事物中，量与量的变化关系，常常是多元函数，譬如：(1)动能 E 与質量 m、速度 v 的依从关系：$E=\frac{1}{2}mv^2$，这是二元函数；(2)三角形的面积 A 与两边的長 a，b，及夹角 α 的依从关系：$A=\frac{1}{2}ab\sin\alpha$，这是三元函数。其它如矩形的面积 A 是長 x 与寬 y 的函数：$A=xy$；長方体的体积 V 是長 x、寬 y 与高 z 的

函数：$V=xyz$，这也是最常見的二元及三元函数。二元，三元以至 n 元的函数都是我們的研究对象。但是二元函数的理論可以不經特别地变更，就能推广到三元以上的函数。因此，我們对于二元函数要詳細地、深入地講，而对于三元以上的函数理論都从二元函数类推而出；不加以特别研究。

定义 如果两个变量 x，y，各取一值，第三个变量 z 依一定法則也有一値，或多值和 x，y 的值对应，我們就說 z 是 x，y 的函数，記为

$$z=f(x,y),\ 或\ F(x,y,z)=0 \tag{1}$$

x，y 叫做**自变量**。函数 z 也叫做**因变量**。当 x，y 每取一对的值时，如果 z 仅有一值和它們对应，我們就說 z 是**單值函数**；如果有两个以上的值和它們对应，就說 z 是**多值函数**。例如上面所說的动能 E 与三角形面积 A，都是單值函数，而 $z=\pm\sqrt{x^2+y^2-4}$ 是多值函数。

函数概念的要素 多元函数的概念也像一元函数的概念一样，有两个要素：对应律与定义域。上面定义中所說的一定法則，**就是对应律**。以一点（a，b）代入（1）式的（x，y），如果（1）式的 z 也有值与这一点（a，b）对应，我們就說函数 z 在（a，b）点有定义。使函数 z 有定义的一切点的集合，叫做函数 z 的**定义域**。

二元函数的定义域 R 可以是全平面的点，或平面上某一区域的点，这是随問題的性質而定的。譬如：

例1 $z=\sqrt{x^2+y^2-1}+\sqrt{4-x^2-y^2}$ 的定义域是 xy 平面內的两个圓周之間以及两个圓周上的一切点（圖21.1-1)。如果用不等式来表示，就是

$$x^2+y^2-1\geqslant 0,\ \ 4-x^2-y^2\geqslant 0 \tag{2}$$

这两个圓周，叫做**域的界綫**。包括界綫在內的域，叫做**閉域**；不包括界綫在內的域，叫做**开域**。（2）式所示的域是閉域。

例2 $z=\ln\left(\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}-1\right)$ 的定义域为 $\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}-1>0$，

它是开域，即椭圓外的全平面的点（圖21.1-2）。

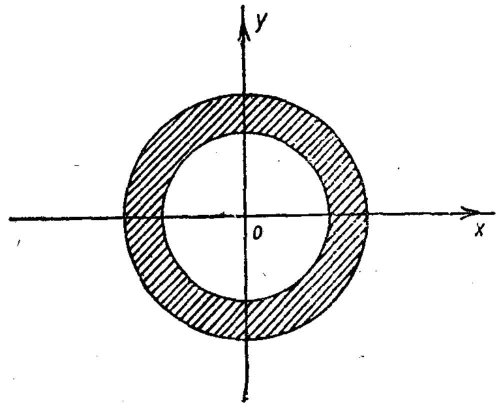


圖 21.1-1

最常見的域，有**方形域**（圖21.1-3）；**矩形域**（圖21.1-4）；及**圓形域**（圖21.1-5）。

設 δ 为正数，（a，b）是平面内的一点，于是，滿足不等式

$|x-a| \leqslant \delta$

及 $|y-b| \leqslant \delta$

（閉域），

或 $|x-a| < \delta$

及 $|y-b| < \delta$

（开域）

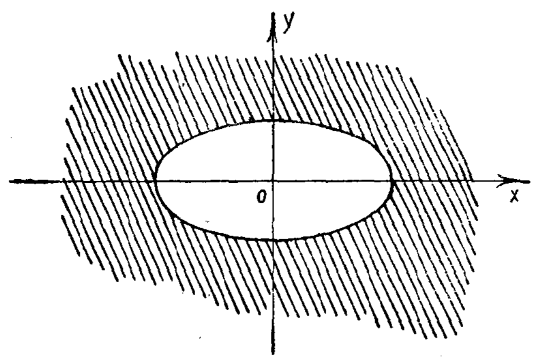


圖 21.1-2

的点（x，y）的点集都是方形域。这种方形的开域也叫做（a，b）**点的 δ 方邻域**。它是以（a，b）为中心，2δ 为边長的正方形（圖21.1-3），但不包含界綫上的点。

滿足不等式：

$$x_1 \leqslant x \leqslant x_2 \text{ 及 } y_1 \leqslant y \leqslant y_2 \text{（閉域），}$$

$$\text{或 } x_1 < x < x_2 \text{ 及 } y_1 < y < y_2 \text{（开域）}$$

的点（x，y）的点集，都是矩形域（圖21.1-4）。

滿足不等式:

$$\sqrt{(x-a)^2+(y-b)^2}\leqslant\delta\ (\text{閉域})$$

或

$$\sqrt{(x-a)^2+(y-b)^2}<\delta\ (\text{开域})$$

的点（x, y）的点集都是圓形域。圓形的开域也叫做（a，b）点的 δ **圓邻域**。它是以（a, b）为中心，δ

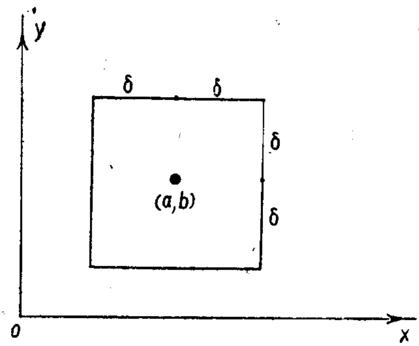


圖 21.1-3

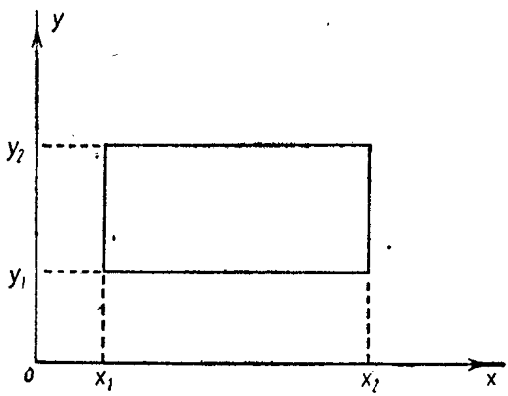


圖 21.1-4

为半徑的圓（圖 21.1-5），但是圓周上的点不包括在內。

点（a, b）的 δ 圓邻域是在該点的 δ 方邻域內的，因此，以后如果不指明点（a, b）的 δ 邻域是圓的或是方的，我們就了解它是圓的。

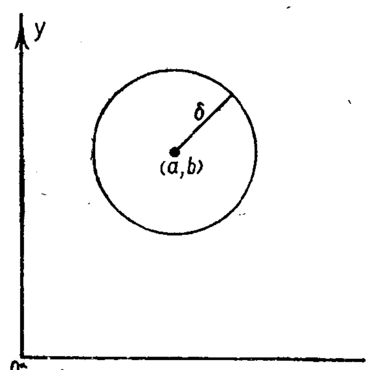


圖 21.1-5

§21.2　二元函数的几何表示法

設有二元單值函数

$$z=f(x,y) \tag{1}$$

它以 xy 平面的 R 部分为定义域（圖21.2-1）。于是 z 在定义域的每一点都有一个函数值确定了空間的一点，而这些点的集合形成了函数的圖形。在一般情形下，这种圖形都是曲面，所以二元函数的圖形是曲面。反过来講：在坐标系中的曲面都可以表达一个二元函数 $f(x,y)$，曲面在 xy 坐标面上的投影就是这个函数的定义域。

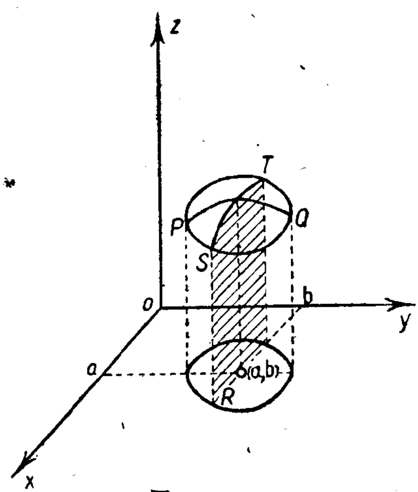


圖　21.2-1

現在以 $x=a$ 代入（1）式，得

$$z=f(a,y)$$

这是一元函数，它的圖形是曲面上的一条曲綫 PQ，这条曲綫的方程是

$$\begin{cases} z=f(x,y)\\ x=a, \end{cases}$$

依同理，　$z=f(x,b)$

也是一元函数，它的圖形是曲綫 ST 而方程为

$$\begin{cases} z=f(x,y)\\ y=b。 \end{cases}$$

平行于 z 軸的直綫与單值函数的圖形相交仅有一点，而与多值函数的圖形相交就有許多点。譬如由方程

$$x^2+y^2+z^2-R^2=0 \tag{2}$$

所确定的函数，它的圖形是球面。平行于 z 軸的直綫与球面相交就有两点，所以 z 是多值函数。但是，把（2）式作 z 解出，得

$$z=\sqrt{R^2-x^2-y^2}, \tag{3}$$

或

$$z=-\sqrt{R^2-x^2-y^2} \tag{4}$$

就成为單值函数。前一函数的圖形是 xy 平面上側的半个球面；后一函数的圖形是 xy 平面下側的半个球面。平行于 z 軸的直綫和半个球面相交只有一点。（3）或（4）叫做多值函数 z 的**單值支**。（2）式是隐函数。（3），（4）两式是显函数。

二元函数的等值網 在立体解析几何学中已經講过（§9.16），曲面的形状可以从平行截口的形状，或等值網中曲綫分布的情况来研究。所以二元函数

$$z=f(x,y) \tag{5}$$

的变化情况，除用曲面表达外，也可以用它的等值網

$$h=f(x,y) \qquad (h\text{ 为任意常量})$$

来表达，譬如：

例 1 函数 $z=x^2+y^2$ 的圖形为迴轉拋物面（圖21.2-2）。現在以平面 $z=h$，（$h=1,2,3,4,\cdots\cdots$如圖所示）与它相截，截得的等高綫方程为

$$z=x^2+y^2,\ z=h,\ (h=1,2,\cdots\cdots)$$

等高綫在 xy 坐标面上的投影的方程为

$$h=x^2+y^2$$

这些投影就是等值網（一族的同心圓，其半徑为 $\sqrt{h}$），如圖21.2-3所示。

例 2 研究某一座山的地势时（圖21.2-4），我們常用等值網（等高綫網）表达地形，从而了解地势的高低及形状。

如果 $h=0,\ k,2k,\ \cdots\cdots$，那末，在等值網 $h=f(x,y)$ 中，任意两个相邻的截面的距离都是 k，而曲面 $z=f(x,y)$ 升降的坡度就反映在等值網中，沿等值綫的坡度为0（即函数 z 的值恒为 h，而沒有增加或減少）。等值綫显得密的地方反映函数上升得快

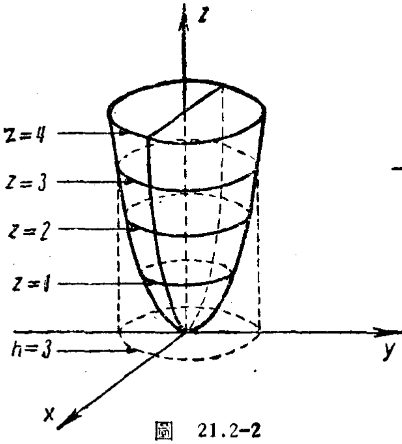
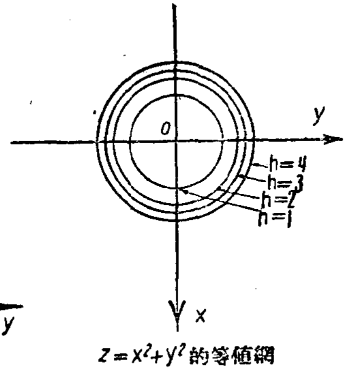


圖　21.2-2



$z=x^2+y^2$ 的等値網

圖　21.2-3

(坡度大)，而疏的地方反映函数上升得慢(坡度小)。k 愈小，这种反映的准确度就愈大。在科学研究上，这种等值網是常常遇到的。例如等溫綫，等压綫，平面上电場的等位綫都是这种等值綫。

依此类推，三元函数也可以有等值面 $h=f(x, y, z)$，譬如电場的等位面，物体的等溫面都是这种等值面。

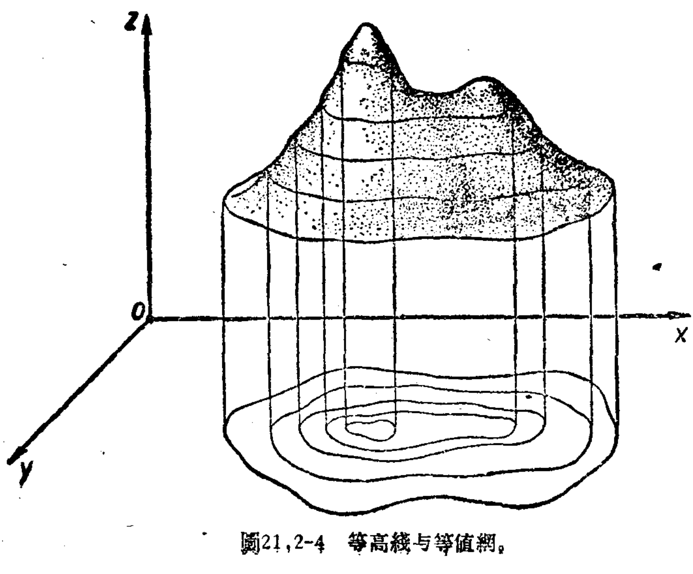


圖21,2-4　等高綫与等值網。

§21.3 n元函数与点函数

n元函数的定义 n个变量$v_1, v_2, \cdots, v_n$各取一值时，如果另一个变量w依一定法則有一值或多值和这n个变量的值对应，我們就說，w是$v_1, v_2, \cdots, v_n$的函数，記为

$$w=f(v_1, v_2, \cdots, v_n), \tag{1}$$

$$\text{或}\quad F(v_1, v_2, \cdots, v_n, w)=0。 \tag{2}$$

$n=1$时，它是一元函数；$n=2$或3时，它是二元或三元函数；$n=n$，它是n元函数。

一元函数的定义域是数軸上的点集。二元或三元函数的定义域是平面或空間的点集。四元或n元函数的定义域虽然已失去几何的直觉性与明显性，但是，我們仍旧保留几何名称，把n个数的集合$(v_1, v_2, \cdots, v_n)$，叫做点。由这种点构成的集合，叫做n維空間。又如方程

$$(v_1-a_1)^2+(v_2-a_2)^2+\cdots+(v_n-a_n)^2=R^2$$

也保留三維空間的几何名称，把它叫做n**維空間的球面方程**，其中心为$(a_1, a_2, \cdots a_n)$，半徑为R。

依此类推，下面的不等式分别确定一个n**維球体**及n**維長方体**：

$$(v_1-a_1)^2+(v_2-a_2)^2+\cdots\cdots+(v_n-a_n)^2-R^2\leqslant 0, (\text{球体})$$

$$\alpha_1\leqslant v_1\leqslant\beta_1,\quad \alpha_2\leqslant v_2\leqslant\beta_2,\quad \cdots\cdots, \alpha_n\leqslant v_n\leqslant\beta_n,\ (\text{長方体})。$$

由此可知：n元函数就是n維空間內一点$P(v_1, v_2, \cdots v_n)$的函数，因此（1）式可記为

$$w=f(P)。 \tag{3}$$

如果P点只在直綫上变动，w是一元函数；只在平面上变动，w是二元函数；只在n維空間变动，w是n元函数。这样，就把一元，二元，以至n元函数都在点的函数概念下統一起来，只須用一个記号$f(P)$来代表任意个元的函数。法国数理学家拉

梅❶对于点的函数曾提出下面定义。

点函数的定义 如果变量 w 对于空間某区域的每点 P 都有一值或多值与該点对应，我們就説 w 是**点的函数**，或 w 是**点函数**，記为 $w=f(P)$。

例如：物体內各点的溫度或密度的分布都是点函数。又如带电体的电位以及光源的光射在物体上的照度等也是点函数。

点函数的概念，无論在理論上或应用上都很重要，讀者应当掌握这个概念。

复合函数 n 元函数也像一元函数一样，它的自变量可能是其它自变量的函数，例如

$$\begin{aligned} v_1 &= \varphi_1(x, y, z), \\ v_2 &= \varphi_2(x, y, z), \\ &\cdots\cdots\cdots\cdots, \\ v_n &= \varphi_n(x, y, z) \end{aligned}$$

时，便得

$$w=f[\varphi_1(x,y,z),\ \varphi_2(x,y,z),\cdots\varphi_n(x,y,z)]=\Phi(x,y,z)。$$

这样，w 就成为 x，y，z 的函数，或 x，y，z 的复合函数。$v_1, v_2, \cdots v_n$ 叫做**中間变量**。

第二节 多元函数的極限与連續

§ 21.4 極限概念

点函数

$$w=f(P) \tag{1}$$

的定义域如果只在 x 軸上，那末，它是一元函数。一元函数在一点 P_0 的極限定义已在第十一章講过，就是：任意指定一个甚小

❶ 拉梅（G. Lamé1795～1870）是巴黎多艺学校的物理教授。他对于彈性理論有特別貢献。