

高等学校教学用书

高等数学教程

第三卷

陈盖民著



机械工业出版社

1.6/2
2547

高等学校教学用书

高等数学教程

第三卷

陈盖民著



机械工业出版社

本書第三卷分为三編、七章：第一編为多元函数微分学，內容計有：基础知識（多元函数与極限）、导数与微分、微分法应用（包括矢量微分法及其应用）三章；第二編为多元函数积分学，內容計有：重积分、曲綫积分与曲面积分（包括場論的基础知識）两章；第三編为由級数确定的函数，內容計有：数項級数与函数項級数、幂級数与三角級数两章。書中重要的基本概念都先从具体問題引出，然后抽象地加以定义，并另行举例說明所定义的概念。

書中某些章节作如下的安排：矢量的导数，特別注重它的物理与几何意义。复合函数与隱函数微分法是讀者的难点，本書把全导数公式作为这两类函数的微分法則而不作为导数的基本概念之一，来解决这一难点。曲綫积分与曲面积分以及梯度、散度、旋度也是讀者的难点，除从物理或流体力学引出其概念外，还特別詳細地叙述。由于在第四卷講福里哀变换与拉氏变换时，需要先知道无穷积分所确定的函数，而无穷积分又与級数相类似，所以，本書把无穷积分所确定的函数部分写在数項級数与函数項級数一章之后，作为这一章的附录。

2137/27

NO. 2824

1959年9月第一版 1959年9月第一版第一次印刷

850×1168¹/₃₂ 字数302千字 印張11⁷/₈ 0,001—11,200册

机械工业出版社(北京阜成門外百万庄)出版

机械工业出版社印刷厂印刷 新华書店發行

北京市書刊出版业营业許可証出字第008号 定价(10)1.85元

第三卷

数学分析的进一步發展

目次

第一編 多元函数微分学

第二十一章 基础知識

第一节 多元函数概念	1
§21.1 二元函数概念	1
§21.2 二元函数的几何表示法	5
§21.3 n 元函数与点函数	8
第二节 多元函数的極限与連續	9
§21.4 極限概念	9
§21.5 函数的連續与間断	12
§21.6 連續函数的特性	13

第二十二章 多元函数的导数与微分

第一节 导数与微分的概念	15
§22.1 偏导数	15
§22.2 偏微分与全微分 可微性的充分条件	18
§22.3 全微分的几何解釋	24
§22.4 全微分在近似計算上的应用	26
§22.5 方向导数	27
§22.6 梯度	32
第二节 复合函数及隱函数的微分法	39
§22.7 全导数公式	39
§22.8 复合函数微分法与全微分形式不变性	41
§22.9 由一个方程确定的隱函数	42

§22.10	由方程組確定的隱函數	45
§22.11	由定積分確定的函數	49
第三節	高階導數與微分	55
§22.12	高階偏導數與微分次序問題	55
§22.13	高階微分	58
§22.14	二元函數的台勞公式	60

第二十三章 微分法應用

第一節	矢量微分法及其在幾何上的應用	62
§23.1	引言	62
§23.2	矢性函數 光滑曲綫	63
§23.3	矢量的導數及微分 切向矢量	64
§23.4	單位矢量的導數	66
§23.5	空間曲綫的切綫及法平面方程 弧長	68
§23.6	曲面的切面及法綫方程	70
第二節	平面曲綫	73
§23.7	隱示方程的曲綫 尋常點與奇異點	73
§23.8	曲綫族的包絡	77
§23.9	一階微分方程的圖解法 方向場	81
第三節	多元函數的極值	84
§23.10	極值的必要條件	84
§23.11	極值的充分條件	87
§23.12	條件極值的必要條件	88

第二編 多元函數積分學

第二十四章 重積分

第一節	重積分的概念及性質	96
§24.1	引起二重積分概念的幾何及物理問題	96
§24.2	二重積分的定義	99
§24.3	三重積分的定義	101
§24.4	重積分的簡單性質	102
第二節	二重積分的計算法及應用	105
§24.5	在直角坐標系中計算法	105

§24.6	在極坐标系中計算法	113
§24.7	光滑曲面的面积	120
§24.8	在力学上的应用	124
第三节 三重积分的計算法及应用		131
§24.9	引言	131
§24.10	在直角坐标系中計算法	133
§24.11	在柱坐标系中計算法	139
§24.12	在球坐标系中計算法	146
第四节 广义二重积分		151
§24.13	引言	151
§24.14	无界域的二重积分 布阿松积分	151
§24.15	无界函数的二重积分	155

第二十五章 曲綫积分及曲面积分

第一节 曲綫积分		158
§25.1	引言	158
§25.2	对弧長的曲綫积分的定义及計算法	159
§25.3	对坐標的曲綫积分的定义及計算法	167
§25.4	平面上曲綫积分与二重积分的关系 (格林公式)	173
§25.5	曲綫积分与路綫无关的条件	179
§25.6	全微分的准則及原函数求法	183
§25.7	在微分方程中的应用 积分因子	187
§25.8	在物理上的应用	191
第二节 曲面积分		196
§25.9	引言	196
§25.10	曲面积分的物理意义及定义	196
§25.11	曲面积分的基本性質及計算法	203
§25.12	曲面积分与三重积分的关系 (奥氏公式)	206
§25.13	曲面积分与曲面无关的条件	208
§25.14	曲面积分与空間曲綫积分的关系 (斯氏公式)	210
第三节 場論的基础知識		213
§25.15	标量場与矢量場	213
§25.16	矢量場的通量与散度 管狀場	213
§25.17	流体的連續性方程	223

§25.18 向量场的环流与旋度	224
§25.19 两个重要的定理 向量场的分类	232
§25.20 在曲线坐标系中的表达式	234

第三編 由級数确定的函数

第二十六章 数項級数与函数項級数

第一节 数項級数	239
§26.1 級数的收敛与发散	239
§26.2 数列的極限	242
§26.3 級数的基本性質	245
§26.4 收敛的必要条件 調和級数	246
§26.5 数項級数的分类	247
§26.6 同号級数判斂法	248
§26.7 交錯級数判斂法	254
§26.8 异号級数的绝对收敛与条件收敛 乘法	255
第二节 函数項級数	258
§26.9 引言	258
§26.10 收敛点与收敛域	259
§26.11 均匀收敛的概念	262
§26.12 均匀收敛的 M 判定法	266
§26.13 勻斂級数的可积性与可微性	268
附录 由无穷积分确定的函数	271
A 26.1 引言 歌西判斂法	271
第一节 广义积分判斂法	275
A 26.2 无穷积分判斂法	275
A 26.3 瑕积分与无穷积分的关系	281
A 26.4 瑕积分判斂法	282
第二节 无穷积分的均匀收敛	285
A 26.5 均匀收敛及其判定法	285
A 26.6 均匀收敛的应用	287
第三节 Γ函数与B函数	293
A 26.7 Γ 函数	293
A 26.8 B 函数	296

A 26.9 两种函数的关系	297
----------------------	-----

第二十七章 幂级数与福里哀级数

第一节 幂级数	298
§27.1 幂级数的收敛域及其求法 收敛半径	298
§27.2 幂级数的特性与运算	301
§27.3 函数展为幂级数的台劳方法	304
§27.4 函数展开的应用	306
§27.5 函数展开的其它方法 二项式级数	313
§27.6 微分方程的级数解及其存在问题	318
§27.7 贝塞尔函数 (圆柱函数)	324
第二节 福里哀级数	328
§27.8 三角级数	328
§27.9 三角函数组的正交性	330
§27.10 欧拉-福里哀公式与福里哀级数	333
§27.11 狄里赫莱定理	336
§27.12 偶函数及奇函数的福里哀级数	339
§27.13 以 $2l$ 为周期的函数	342
§27.14 函数在半区间 $(0, l)$ 上展为福里哀级数	344
§27.15 福里哀级数的指数形式	348
§27.16 经验函数的谐波分析法 选数板	351
附录 积分表	358
(一) 有理代数函数	358
(二) 根式代数函数	361
(三) 超越函数	367

第一編 多元函数微分学

多元函数微分学是一元函数微分学的进一步发展。它与一元函数微分学有共同之点，也有差异之点，而这种差异又在多元函数中统一起来。学习时应当注意它们的异同，加以比较与联系。这样，不仅有助于一元函数微分学的巩固，也有助于多元函数微分学的理解与记忆。本编分为三章：(一)基础知识；(二)多元函数的导数与微分；(三)微分法应用。

第二十一章 基础知识

多元函数的概念、极限与连续都是学习多元函数微分学与积分学的预备知识或基础知识，这好像上一卷的函数与极限两章是一元函数微积分学的基础知识一样。因此，我们要在多元函数微分学之前，讲这三个基本概念。本章分为两节：(一)多元函数概念；(二)多元函数的极限与连续。

第一节 多元函数概念

§ 21.1 二元函数概念

一元函数在实用上虽然很重要，但是多元函数尤其重要。在客观事物中，量与量的变化关系，常常是多元函数，譬如：(1) 动能 E 与质量 m 、速度 v 的依从关系： $E = \frac{1}{2}mv^2$ ，这是二元函数；(2) 三角形的面积 A 与两边的长 a, b ，及夹角 α 的依从关系： $A = \frac{1}{2}ab\sin\alpha$ ，这是三元函数。其它如矩形的面积 A 是长 x 与宽 y 的函数： $A = xy$ ；长方体的体积 V 是长 x 、宽 y 与高 z 的

函数： $V = xyz$ ，这也是最常见的二元及三元函数。二元，三元以至 n 元的函数都是我们的研究对象。但是二元函数的理论可以不經特别地变更，就能推广到三元以上的函数。因此，我们对于二元函数要詳細地、深入地講，而对于三元以上的函数理论都从二元函数类推而出；不加以特别研究。

定义 如果两个变量 x, y ，各取一值，第三个变量 z 依一定法則也有一值，或多值和 x, y 的值对应，我们就說 z 是 x, y 的函数，記为

$$z = f(x, y), \text{ 或 } F(x, y, z) = 0. \quad (1)$$

x, y 叫做自变量。函数 z 也叫做因变量。当 x, y 每取一对的值时，如果 z 仅有一值和它們对应，我们就說 z 是單值函数；如果有两个以上的值和它們对应，就說 z 是多值函数。例如上面所說的动能 E 与三角形面积 A ，都是單值函数，而 $z = \pm \sqrt{x^2 + y^2 - 4}$ 是多值函数。

函数概念的要素 多元函数的概念也像一元函数的概念一样，有两个要素：对应律与定义域。上面定义中所說的一定法則，就是对应律。以一点 (a, b) 代入 (1) 式的 (x, y) ，如果 (1) 式的 z 也有值与这一点 (a, b) 对应，我们就說函数 z 在 (a, b) 点有定义。使函数 z 有定义的一切点的集合，叫做函数 z 的定义域。

二元函数的定义域 R 可以是全平面的点，或平面上某一区域的点，这是随問題的性質而定的。譬如：

例1 $z = \sqrt{x^2 + y^2 - 1} + \sqrt{4 - x^2 - y^2}$ 的定义域是 xy 平面内的两个圓周之間以及两个圓周上的一切点 (圖21.1-1)。如果用不等式来表示，就是

$$x^2 + y^2 - 1 \geq 0, \quad 4 - x^2 - y^2 \geq 0 \quad (2)$$

这两个圓周，叫做域的界綫。包括界綫在內的域，叫做閉域；不包括界綫在內的域，叫做开域。(2) 式所示的域是閉域。

例2 $z = \ln\left(\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} - 1\right)$ 的定义域为 $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} - 1 > 0$ ，

它是开域，即椭圆外的全平面的点 (圖21.1-2)。

最常見的域，有方形域 (圖21.1-3)；矩形域 (圖21.1-4)；及圓形域 (圖21.1-5)。

設 δ 为正数， (a, b) 是平面内的一点，于是，滿足不等式

$$|x-a| \leq \delta$$

及 $|y-b| \leq \delta$

(閉域)，

或 $|x-a| < \delta$

及 $|y-b| < \delta$

(开域)

的点 (x, y) 的点集都是方形域。

这种方形的开域也叫做 (a, b) -点的

δ 方邻域。它是以

(a, b) 为中心， 2δ 为边長的正方形 (圖21.1-3)，但不包含界綫上的点。

滿足不等式：

$$x_1 \leq x \leq x_2 \text{ 及 } y_1 \leq y \leq y_2 \text{ (閉域)，}$$

$$\text{或 } x_1 < x < x_2 \text{ 及 } y_1 < y < y_2 \text{ (开域)}$$

的点 (x, y) 的点集，都是矩形域 (圖21.1-4)。

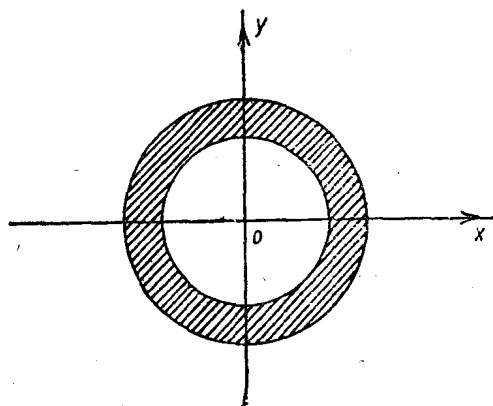


圖 21.1-1

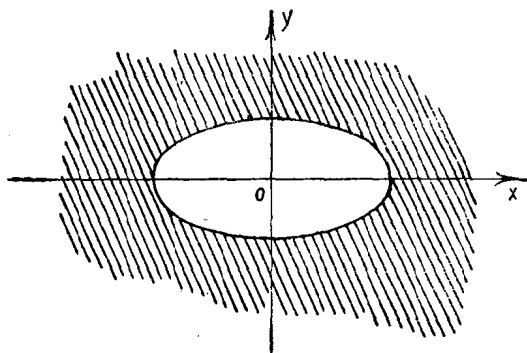


圖 21.1-2

滿足不等式:

$$\sqrt{(x-a)^2 + (y-b)^2} \leq \delta \text{ (閉域)}$$

或 $\sqrt{(x-a)^2 + (y-b)^2} < \delta \text{ (開域)}$

的点 (x, y) 的点集都是圓形域。圓形的开域也叫做 (a, b) 点的 δ 圓邻域。它是以 (a, b) 为中心, δ

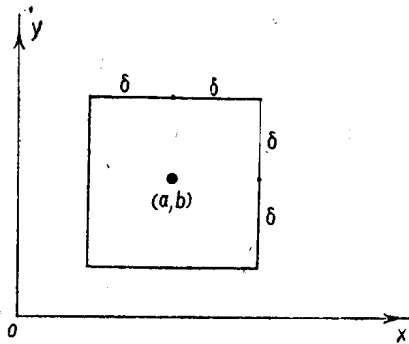


圖 21.1-3

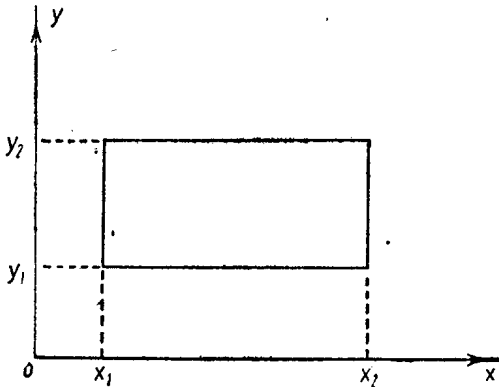


圖 21.1-4

为半径的圓 (圖 21.1-5), 但是圓周上的点不包括在內。

点 (a, b) 的 δ 圓邻域是在該点的 δ 方邻域內的, 因此, 以后如果不指明点 (a, b) 的 δ 邻域是圓的或是方的, 我們就了解它是圓的。

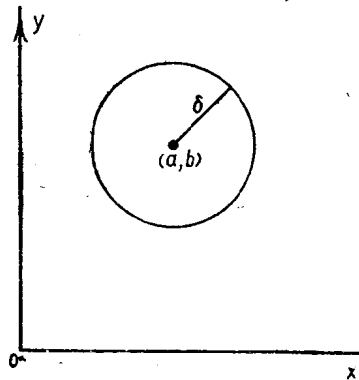


圖 21.1-5

§ 21.2 二元函数的几何表示法

設有二元單值函数

$$z = f(x, y) \quad (1)$$

它以 xy 平面的 R 部分为定义域 (圖 21.2-1)。于是 z 在定义域的每一点都有一个函数值确定了空間的一点, 而这些点的集合形成了函数的圖形。在一般情形下, 这种圖形都是曲面, 所以二元函数的圖形是曲面。反过来講: 在坐标系中的曲面都可以表达一个二元函数 $f(x, y)$, 曲面在 xy 坐标面上的投影就是这个函数的定义域。

現在以 $x = a$ 代入 (1) 式, 得

$$z = f(a, y)$$

这是一元函数, 它的圖形是曲面上的一条曲綫 PQ , 这条曲綫的方程是

$$\begin{cases} z = f(x, y) \\ x = a, \end{cases}$$

依同理,

$$z = f(x, b)$$

也是一元函数, 它的圖形是曲綫 ST 而方程为

$$\begin{cases} z = f(x, y) \\ y = b. \end{cases}$$

平行于 z 軸的直綫与單值函数的圖形相交仅有一点, 而与多值函数的圖形相交就有許多点。譬如由方程

$$x^2 + y^2 + z^2 - R^2 = 0 \quad (2)$$

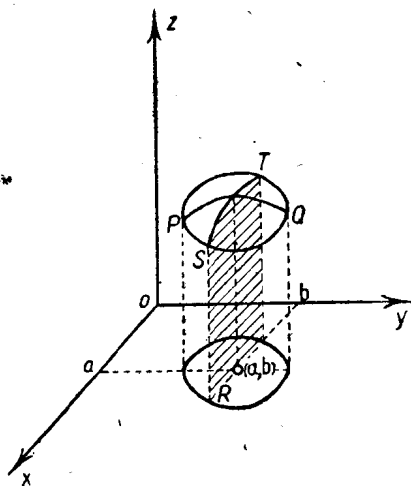


圖 21.2-1

所确定的函数，它的圖形是球面。平行于 z 軸的直綫与球面相交就有两点，所以 z 是多值函数。但是，把 (2) 式作 z 解出，得

$$z = \sqrt{R^2 - x^2 - y^2}, \quad (3)$$

$$\text{或 } z = -\sqrt{R^2 - x^2 - y^2} \quad (4)$$

就成为單值函数。前一函数的圖形是 xy 平面上側的半个球面；后一函数的圖形是 xy 平面下側的半个球面。平行于 z 軸的直綫和半个球面相交只有一点。(3) 或 (4) 叫做多值函数 z 的單值支。(2) 式是隱函数。(3)，(4) 两式是显函数。

二元函数的等值綫 在立体解析几何学中已經講过 (§9.16)，曲面的形状可以从平行截口的形状，或等值綫中曲綫分布的情况来研究。所以二元函数

$$z = f(x, y) \quad (5)$$

的变化情况，除用曲面表达外，也可以用它的等值綫

$$h = f(x, y) \quad (h \text{ 为任意常量})$$

来表达，譬如：

例 1 函数 $z = x^2 + y^2$ 的圖形为迴轉抛物面 (圖 21.2-2)。現在以平面 $z = h$ ，($h = 1, 2, 3, 4, \dots$ 如圖所示) 与它相截，截得的等高綫方程为

$$z = x^2 + y^2, \quad z = h, \quad (h = 1, 2, \dots)$$

等高綫在 xy 坐标面上的投影的方程为

$$h = x^2 + y^2$$

这些投影就是等值綫 (一族同心圓，其半徑为 \sqrt{h})，如圖 21.2-3 所示。

例 2 研究某一座山的地势时 (圖 21.2-4)，我們常用等值綫 (等高綫) 表达地形，从而了解地势的高低及形状。

如果 $h = 0, k, 2k, \dots$ ，那末，在等值綫 $h = f(x, y)$ 中，任意两个相邻的截面的距离都是 k ，而曲面 $z = f(x, y)$ 升降的坡度就反映在等值綫中，沿等值綫的坡度为 0 (即函数 z 的值恒为 h ，而沒有增加或减少)。等值綫显得密的地方反映函数上升得快

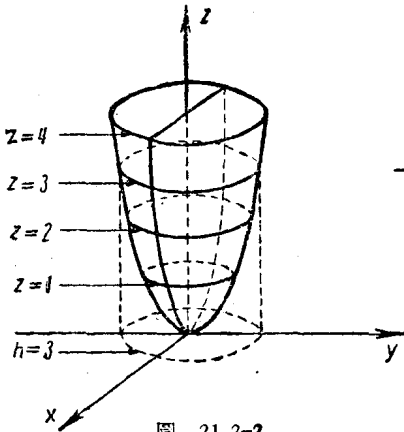


圖 21.2-2

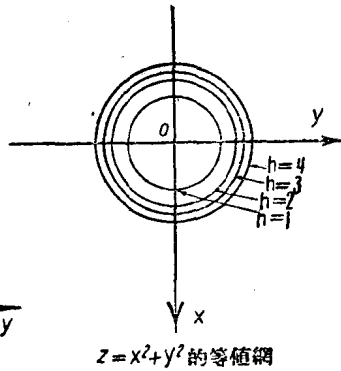


圖 21.2-3

(坡度大)，而疏的地方反映函数上升得慢(坡度小)。k 愈小，这种反映的准确度就愈大。在科学研究上，这种等值网是常常遇到的。例如等温线，等压线，平面上电场的等位线都是这种等值线。

依此类推，三元函数也可以有等值面 $h = f(x, y, z)$ ，譬如电场的等位面，物体的等温面都是这种等值面。

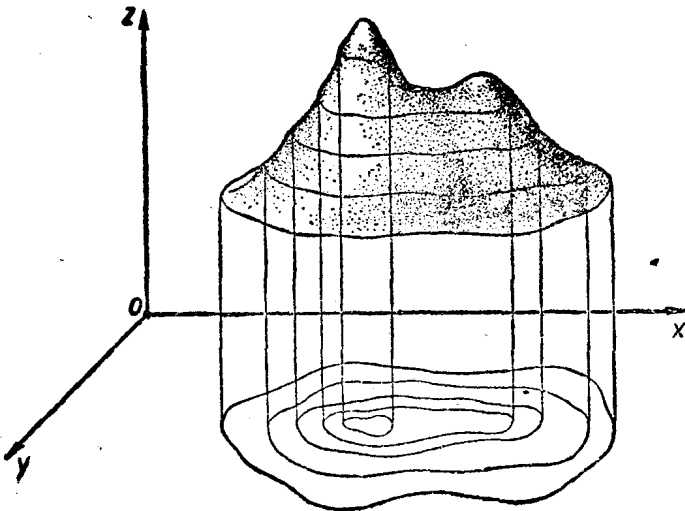


圖21.2-4 等高线与等值网。

§ 21.3 n 元函数与点函数

n 元函数的定义 n 个变量 v_1, v_2, \dots, v_n 各取一值时, 如果另一个变量 w 依一定法则有一值或多值和这 n 个变量的值对应, 我们就说, w 是 v_1, v_2, \dots, v_n 的函数, 记为

$$w = f(v_1, v_2, \dots, v_n), \quad (1)$$

$$\text{或 } F(v_1, v_2, \dots, v_n, w) = 0. \quad (2)$$

$n = 1$ 时, 它是一元函数; $n = 2$ 或 3 时, 它是二元或三元函数; $n = n$, 它是 n 元函数。

一元函数的定义域是数轴上的点集。二元或三元函数的定义域是平面或空间的点集。四元或 n 元函数的定义域虽然已失去几何的直觉性与明显性, 但是, 我们仍旧保留几何名称, 把 n 个数的集合 (v_1, v_2, \dots, v_n) , 叫做点。由这种点构成的集合, 叫做 n 维空间。又如方程

$$(v_1 - a_1)^2 + (v_2 - a_2)^2 + \dots + (v_n - a_n)^2 = R^2$$

也保留三维空间的几何名称, 把它叫做 n 维空间的球面方程, 其中心为 (a_1, a_2, \dots, a_n) , 半径为 R 。

依此类推, 下面的不等式分别确定一个 n 维球体及 n 维长方体:

$$(v_1 - a_1)^2 + (v_2 - a_2)^2 + \dots + (v_n - a_n)^2 - R^2 \leq 0, \text{ (球体)}$$

$$\alpha_1 \leq v_1 \leq \beta_1, \alpha_2 \leq v_2 \leq \beta_2, \dots, \alpha_n \leq v_n \leq \beta_n, \text{ (长方体)}.$$

由此可知: n 元函数就是 n 维空间内一点 $P(v_1, v_2, \dots, v_n)$ 的函数, 因此 (1) 式可记为

$$w = f(P). \quad (3)$$

如果 P 点只在直线上变动, w 是一元函数; 只在平面上变动, w 是二元函数; 只在 n 维空间变动, w 是 n 元函数。这样, 就把一元, 二元, 以至 n 元函数都在点的函数概念下统一起来, 只须用一个记号 $f(P)$ 来代表任意个元的函数。法国数学家拉

梅^①对于点的函数曾提出下面定义。

点函数的定义 如果变量 w 对于空間某区域的每点 P 都有一值或多值与該点对应，我們就說 w 是点的函数，或 w 是点函数，記为 $w = f(P)$ 。

例如：物体內各点的溫度或密度的分布都是点函数。又如带电体的电位以及光源的光射在物体上的照度等也是点函数。

点函数的概念，無論在理論上或应用上都很重要，讀者应当掌握这个概念。

复合函数 n 元函数也像一元函数一样，它的自变量可能是其它自变量的函数，例如

$$\begin{aligned} v_1 &= \varphi_1(x, y, z), \\ v_2 &= \varphi_2(x, y, z), \\ &\dots\dots\dots, \\ v_n &= \varphi_n(x, y, z) \end{aligned}$$

时，便得

$$w = f[\varphi_1(x, y, z), \varphi_2(x, y, z), \dots, \varphi_n(x, y, z)] = \Phi(x, y, z)。$$

这样， w 就成为 x, y, z 的函数，或 x, y, z 的复合函数。 v_1, v_2, \dots, v_n 叫做中間变量。

第二节 多元函数的極限与連續

§ 21.4 極限概念

点函数

$$w = f(P) \tag{1}$$

的定义域如果只在 x 軸上，那末，它是一元函数。一元函数在一点 P_0 的極限定义已在第十一章講过，就是：任意指定一个甚小

① 拉梅 (G. Lamé 1795~1870) 是巴黎多艺学校的物理教授。他对于彈性理論有特別貢獻。