

高等数学典型计算题汇编

[苏联] Л. А. 库兹涅佐夫 编

上海科学技术出版社

Л. А. Кузнецов
СБОРНИК ЗАДАНИЙ ПО ВЫСШЕЙ
МАТЕМАТИКЕ
(ТИПОВЫЕ РАСЧЕТЫ)
Изд. «ВЫСШАЯ ШКОЛА», МОСКВА, 1983

高等数学典型计算题汇编
【苏联】Л. А. 库兹涅佐夫 编
徐克绍 译
上海科学技术出版社出版
(上海瑞金二路 450 号)
新华书店上海发行所发行 上海商务印刷厂印刷
开本 787×1092 1/32 印张 17 字数 374,000
1987 年 2 月第 1 版 1987 年 2 月第 1 次印刷
印数: 1—15,000
统一书号: 13119·1370 定价: 2.75 元

内 容 提 要

本书与我国理、工科院校工程技术专业的现行高等数学教学大纲相适应, 包括极限、微分、积分、级数及其他高等数学主要分支方面的典型计算. 全书包含 162 类典型问题, 每一类典型问题中都含有 31 个变形习题, 其中第一道题附有详解, 其他习题附有答案. 除了典型问题以外, 也列举了理论问题和理论练习题, 每道理论习题都附有详解.

译 序

我们以极大的兴趣阅读了苏联莫斯科动力学院的《高等数学典型计算题汇编》一书,深感这是一本高等数学方面别具特色的教学参考书。该书内容丰富,共有 5022 道计算习题、近百道理论练习题,绝大部分计算习题并不见诸于现有的各种高等数学习题集,例如广为流传的《高等数学习题集》(同济大学)、《数学分析习题集》(吉米多维奇)等。同时,这些习题的编排紧扣了巩固基本概念、熟练基本技能的宗旨。每一类习题包含 31 个变形,往往又可分成若干个小类,读者通过独立的演算可以领悟到有关概念的实质、提炼出有关演算的捷径。因此,对于我国高等理工院校、电视大学、职工大学等各类学校,该书是高等数学典型计算教学中一本难得的教学参考书。使用该书将有利于教师丰富课堂教学内容、有助于学生活跃课外复习,达到提高高等数学教学质量的目的。鉴于此,我们不揣浅陋翻译了该书。

原书并未给出习题答案,为给读者提供方便,我们在书末添加了全部理论练习的解答、每类计算题中第 1 题的解答和全部计算习题的答案。例解和答案的演算工作是由徐克绍、周福顺、凌国平三人共同完成的。为保证答案的可靠性、准确性,全部题目先由三人各自独立完成,然后相互校对,最后由徐克绍复核定稿。译解时,我们对原文中明显的刊误或遗漏已予补正,恕不一一指明。限于水平,译文及答案中可能有不

少谬讹之处,竭诚欢迎读者批评指正。

译 者

1985年7月

原 序

学生独立作业是学好数学和掌握数学方法的重要因素。正象我国高等学校的全部经验所表明的那样，典型计算体系活跃了学生的独立作业，有助于学生更深刻地学习高等数学教程。1979年苏联高等教育部教材教法管理局批准的高等学校高等数学教学大纲，推荐使用典型计算体系。

每一类典型计算都包含理论问题、理论练习和计算习题。理论问题和理论练习对所有的学生都是通用的，而计算习题对班级中的学生则是各别适用的（每一类习题都由31个变形习题组成）。

学生完成的典型计算由教员加以检查。先检查所解理论练习和计算习题的正确性，最后是对典型计算进行答辩。答辩时学生应该学会正确回答理论问题、阐明理论练习和计算习题的解，解出相似类型的习题。

这本习题汇编反映了莫斯科动力学院的教学经验，书中所给出的高等数学计算体系从1971~1972学年起已开始成功地使用。在完成日常数学功课的同时，莫斯科动力学院的学生每学期都完成两类数学分析方面的典型计算，除此之外，在第一学期还要完成解析几何和线性代数方面的两类典型计算。根据课程的进度，检查学生需要完成的习题。答辩在课时内以笔试的形式进行（通常，答辩占一个课时）。第二次答辩在课时外以笔试或讨论的方式进行（由教员酌定）。

本习题汇编的作者、副教授 Л. А. 库兹涅佐夫主持了典型计算的创立工作。在这一工作中, 老教员 А. Ф. 列费罗娃、В. П. 皮库林、А. С. 加里宁给予很大的帮助。莫斯科动力学院高等数学教研室的许多教员都参加了编制习题的工作。В. В. 扎里诺夫、В. А. 伊柳什金、Н. К. 科兹洛娃、Р. Ф. 萨利赫德扎诺夫、Г. А. 索科洛夫以极大的热情、富有成效地进行了工作。莫斯科动力学院高等数学教研室主任、С. И. 波霍扎耶夫教授注意在许多方面把典型计算体系加以深化。

在本书出版的准备工作中, 老教员 В. П. 皮库林给予作者很大的帮助, 热情地提供了解析几何和线性代数方面的资料。作者非常感谢 И. А. 什梅廖夫副教授在一系列理论练习方面所提出的修改意见和建议。

作者感谢 А. И. 普利列普科教授、С. М. 波诺马廖夫副教授和 В. Ю. 斯捷尔宁副教授对手稿提出的评论和意见。

目 录

译序

原序

第一章	极限	1
第二章	微分法	27
第三章	图形	57
第四章	积分	69
第五章	微分方程	102
第六章	级数	122
第七章	重积分	148
第八章	向量分析	181
第九章	解析几何	210
第十章	线性代数	232
例解与答案		255

第一章 极 限

理 论 问 题

1. 数列及其极限的概念. 关于收敛序列有界性的定理.
2. 函数在某一点的极限概念. 函数在某一点的邻域内有界的概念. 关于有极限的函数的有界性定理.
3. 关于对不等式取极限的定理.
4. 关于中间函数极限的定理.
5. 函数连续性的概念. 证明函数 $\cos x$ 的连续性.
6. 第一个著名的极限 $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin x}{x} = 1$.
7. 无穷小函数的概念. 关于函数及其极限和无穷小量之间关系的定理.
8. 关于无穷小函数和的定理.
9. 关于无穷小函数与有界函数乘积的定理.
10. 关于无穷小函数与极限不等于零的函数之比的定理.
11. 关于和的极限定理.
12. 关于积的极限定理.
13. 关于商的极限定理.
14. 关于连续函数取极限的定理.
15. 和、积与商的连续性.

16. 复合函数的连续性.
17. 无穷大函数的概念. 关于无穷大函数与无穷小之间联系的定理.
18. 无穷小函数的比较.
19. 等价无穷小函数. 关于用等价无穷小函数代换的定理.
20. 无穷小函数等价性的条件.

理 论 练 习

1. 证明: 如果 $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = a$, 那末 $\lim_{n \rightarrow \infty} |a_n| = |a|$. 是否能从 $\lim_{n \rightarrow \infty} |a_n|$ 的存在推出 $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n$ 的存在?

提示: 证明并利用不等式

$$||b| - |a|| \leq |b - a|.$$

2. 证明: 序列 $\{n^n\}$ 是发散的.

3. 用“ ε - δ ”语言叙述论断: “数 A 不是定义在点 x_0 邻域内的函数 $f(x)$ 在点 x_0 处的极限”.

4. 证明: 如果 $f(x)$ 是连续函数, 那末 $F(x) = |f(x)|$ 也是连续函数. 逆命题是否成立?

5. 用“ ε - δ ”语言叙述论断: “定义在点 x_0 邻域内的函数 $f(x)$ 在该点不连续”.

6. 设 $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) \neq 0$, 而 $\lim_{x \rightarrow x_0} \varphi(x)$ 不存在. 证明: $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) \cdot \varphi(x)$ 不存在.

提示: 用反证法, 并利用商的极限定理.

7. 设函数 $f(x)$ 在点 x_0 处有极限, 而函数 $\varphi(x)$ 无极限. 下述极限存在吗?

$$1) \lim_{x \rightarrow x_0} [f(x) + \varphi(x)]; \quad 2) \lim_{x \rightarrow x_0} f(x) \varphi(x).$$

研究例子: $\lim_{x \rightarrow 0} x \sin \frac{1}{x}$.

8. 设 $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) \neq 0$, 而函数 $\varphi(x)$ 当 $x \rightarrow x_0$ 时是无穷大.

证明: 当 $x \rightarrow x_0$ 时乘积 $f(x)\varphi(x)$ 是无穷大.

9. 当 $x \rightarrow 0$ 时, 函数 $\frac{1}{x} \cos \frac{1}{x}$ 是无穷大吗?

10. 设 $\alpha'(x) \sim \alpha(x)$ 且 $\beta'(x) \sim \beta(x)$, 当 $x \rightarrow x_0$ 时, 证明: 如果 $\lim_{x \rightarrow x_0} \frac{\alpha'(x)}{\beta'(x)}$ 不存在, 那末 $\lim_{x \rightarrow x_0} \frac{\alpha(x)}{\beta(x)}$ 也不存在.

计 算 习 题

习题1. 证明: $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = a$ (指出 $N(\varepsilon)$).

$$1.1. \quad a_n = \frac{3n-2}{2n-1}, a = \frac{3}{2}.$$

$$1.2. \quad a_n = \frac{4n-1}{2n+1}, a = 2.$$

$$1.3. \quad a_n = \frac{7n+4}{2n+1}, a = \frac{7}{2}.$$

$$1.4. \quad a_n = \frac{2n-5}{3n+1}, a = \frac{2}{3}.$$

$$1.5. \quad a_n = \frac{7n-1}{n+1}, a = 7.$$

$$1.6. \quad a_n = \frac{4n^2+1}{3n^2+2}, a = \frac{4}{3}.$$

$$1.7. \quad a_n = \frac{9-n^3}{1+2n^3}, a = -\frac{1}{2}.$$

$$1.8. \quad a_n = \frac{4n-3}{2n+1}, a = 2.$$

$$1.9. \quad a_n = \frac{1-2n^2}{2+4n^2}, a = -\frac{1}{2}.$$

$$1.10. \quad a_n = -\frac{5n}{n+1}, a = -5.$$

$$1.11. \quad a_n = \frac{n+1}{1-2n}, a = -\frac{1}{2}.$$

$$1.12. \quad a_n = \frac{2n+1}{3n-5}, a = \frac{2}{3}.$$

$$1.13. \quad a_n = \frac{1-2n^2}{n^2+3}, a = -2.$$

$$1.14. \quad a_n = \frac{3n^2}{2-n^2}, a = -3.$$

$$1.15. \quad a_n = \frac{n}{3n-1}, a = \frac{1}{3}.$$

$$1.16. \quad a_n = \frac{3n^3}{n^3-1}, a = 3.$$

$$1.17. \quad a_n = \frac{4+2n}{1-3n}, a = -\frac{2}{3}.$$

$$1.18. \quad a_n = \frac{5n+15}{6-n}, a = -5.$$

$$1.19. a_n = \frac{3-n^2}{1+2n^2}, a = -\frac{1}{2}.$$

$$1.20. a_n = \frac{2n-1}{2-3n}, a = -\frac{2}{3}.$$

$$1.21. a_n = \frac{3n-1}{5n+1}, a = \frac{3}{5}.$$

$$1.22. a_n = \frac{4n-3}{2n+1}, a = 2.$$

$$1.23. a_n = \frac{1-2n^2}{2+4n^2}, a = -\frac{1}{2}.$$

$$1.24. a_n = \frac{5n+1}{10n-3}, a = \frac{1}{2}.$$

$$1.25. a_n = \frac{2-2n}{3+4n}, a = -\frac{1}{2}.$$

$$1.26. a_n = \frac{23-4n}{2-n}, a = 4.$$

$$1.27. a_n = \frac{1+3n}{6-n}, a = -3.$$

$$1.28. a_n = \frac{2n+3}{n+5}, a = 2.$$

$$1.29. a_n = \frac{3n^2+2}{4n^2-1}, a = \frac{3}{4}.$$

$$1.30. a_n = \frac{2-3n^2}{4+5n^2}, a = -\frac{3}{5}.$$

$$1.31. a_n = \frac{2n^3}{n^3-2}, a = 2.$$

习题 2. 计算数列的极限.

$$2.1. \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{(3-n)^2 + (3+n)^2}{(3-n)^2 - (3+n)^2}.$$

$$2.2. \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{(3-n)^4 - (2-n)^4}{(1-n)^4 - (1+n)^4}.$$

$$2.3. \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{(3-n)^4 - (2-n)^4}{(1-n)^3 - (1+n)^3}.$$

$$2.4. \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{(1-n)^4 - (1+n)^4}{(1+n)^3 - (1-n)^3}.$$

$$2.5. \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{(6-n)^2 - (6+n)^2}{(6+n)^2 - (1-n)^2}.$$

$$2.6. \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{(n+1)^3 - (n+1)^2}{(n-1)^3 - (n+1)^3}.$$

$$2.7. \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{(1+2n)^3 - 8n^3}{(1+2n)^2 + 4n^2}.$$

$$2.8. \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{(3-4n)^2}{(n-3)^3 - (n+3)^3}.$$

$$2.9. \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{(3-n)^3}{(n+1)^2 - (n+1)^3}.$$

$$2.10. \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{(n+1)^2 + (n-1)^2 - (n+2)^3}{(4-n)^3}.$$

$$2.11. \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{2(n+1)^3 - (n-2)^3}{n^2 + 2n - 3}.$$

$$2.12. \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{(n+1)^3 + (n+2)^3}{(n+4)^3 + (n+5)^3}.$$

$$2.13. \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{(n+3)^3 + (n+4)^3}{(n+3)^4 - (n+4)^4}.$$

$$2.14. \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{(n+1)^4 - (n-1)^4}{(n+1)^3 + (n-1)^3}.$$

$$2.15. \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{8n^3 - 2n}{(n+1)^4 - (n-1)^4}.$$

$$2.16. \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{(n-6)^3 - (n+1)^3}{(2n+3)^2 + (n+4)^2}.$$

$$2.17. \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{(2n-3)^3 - (n+5)^3}{(3n-1)^3 + (2n+3)^3}.$$

$$\begin{aligned}
2.18. \quad & \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{(n+10)^2 + (3n+1)^2}{(n+6)^3 - (n+1)^3} \\
2.19. \quad & \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{(2n+1)^3 + (3n+2)^3}{(2n+3)^3 - (n-7)^3} \\
2.20. \quad & \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{(n+7)^3 - (n+2)^3}{(3n+2)^2 + (4n+1)^2} \\
2.21. \quad & \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{(2n+1)^3 - (2n+3)^3}{(2n+1)^2 + (2n+3)^2} \\
2.22. \quad & \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n^3 - (n-1)^3}{(n+1)^4 - n^4} \\
2.23. \quad & \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{(n+2)^4 - (n-2)^4}{(n+5)^2 + (n-5)^2} \\
2.24. \quad & \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{(n+1)^4 - (n-1)^4}{(n+1)^3 + (n-1)^3} \\
2.25. \quad & \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{(n+1)^3 - (n-1)^3}{(n+1)^2 - (n-1)^2} \\
2.26. \quad & \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{(n+1)^3 - (n-1)^3}{(n+1)^2 + (n-1)^2} \\
2.27. \quad & \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{(n+2)^3 + (n-2)^3}{n^4 + 2n^2 - 1} \\
2.28. \quad & \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{(n+1)^3 + (n-1)^3}{n^3 - 3n} \\
2.29. \quad & \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{(n+1)^3 + (n-1)^3}{n^3 + 1} \\
2.30. \quad & \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{(n+2)^2 - (n-2)^2}{(n+3)^2} \\
2.31. \quad & \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{(2n+1)^2 - (n+1)^2}{n^2 + n + 1}
\end{aligned}$$

习题3. 计算数列的极限.

$$\begin{aligned}
3.1. \quad & \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n^3 \sqrt{5n^2} + \sqrt[4]{9n^8 + 1}}{(n + \sqrt{n}) \sqrt{7 - n + n^2}} \\
3.2. \quad & \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\sqrt{n-1} - \sqrt{n^2+1}}{\sqrt[3]{3n^3+3} + \sqrt[4]{n^5+1}} \\
3.3. \quad & \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\sqrt{n^3+1} - \sqrt{n-1}}{\sqrt[3]{n^3+1} - \sqrt{n-1}} \\
3.4. \quad & \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\sqrt[3]{n^2-1} + 7n^3}{\sqrt[4]{n^{12}+n+1} - n} \\
3.5. \quad & \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\sqrt{3n-1} - \sqrt[3]{125n^3+n}}{\sqrt[5]{n} - n} \\
3.6. \quad & \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n^5 \sqrt{n} - \sqrt[3]{27n^6+n^2}}{(n + \sqrt[4]{n}) \sqrt{9+n^2}} \\
3.7. \quad & \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\sqrt{n+2} - \sqrt{n^2+2}}{\sqrt[4]{4n^4+1} - \sqrt[3]{n^3-1}} \\
3.8. \quad & \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\sqrt{n^4+2} + \sqrt{n-2}}{\sqrt[4]{n^4+2} + \sqrt{n-2}} \\
3.9. \quad & \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{6n^3 - \sqrt{n^5+1}}{\sqrt{4n^6+3} - n} \\
3.10. \quad & \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\sqrt{5n+2} - \sqrt[3]{8n^3+5}}{\sqrt[4]{n+7} - n}
\end{aligned}$$

$$3.11. \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n^4 \sqrt{3n+1} + \sqrt{81n^4 - n^2 + 1}}{(n + \sqrt[3]{n}) \sqrt{5-n+n^2}}.$$

$$3.12. \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\sqrt{n+3} - \sqrt{n^2-3}}{\sqrt[3]{n^5-4} - \sqrt[4]{n^4+1}}.$$

$$3.13. \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\sqrt{n^5+3} - \sqrt{n-3}}{\sqrt[5]{n^5+3} + \sqrt{n-3}}.$$

$$3.14. \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\sqrt[3]{n} - 9n^2}{3n - \sqrt[4]{9n^8+1}}.$$

$$3.15. \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\sqrt{4n+1} - \sqrt[3]{27n^3+4}}{\sqrt[4]{n} - \sqrt[3]{n^3+n}}.$$

$$3.16. \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n^3 \sqrt{7n} - \sqrt[4]{81n^3-1}}{(n+4\sqrt{n}) \sqrt{n^2-5}}.$$

$$3.17. \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\sqrt[3]{n^3-7} + \sqrt[3]{n^2+4}}{\sqrt[4]{n^5+5} + \sqrt{n}}.$$

$$3.18. \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\sqrt{n^5+4} + \sqrt{n-4}}{\sqrt[5]{n^6+6} - \sqrt{n-6}}.$$

$$3.19. \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{4n^2 - \sqrt[4]{n^3}}{\sqrt[8]{n^6+n^3+1} - 5n}.$$

$$3.20. \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\sqrt{n+3} - \sqrt[3]{8n^3+3}}{\sqrt[4]{n+4} - \sqrt[6]{n^5+5}}.$$

$$3.21. \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n^4 \sqrt{11n} + \sqrt{25n^4-81}}{(n-7\sqrt{n}) \sqrt{n^2-n+1}}.$$

$$3.22. \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\sqrt[3]{n^2} - \sqrt{n^2+5}}{\sqrt[5]{n^7} - \sqrt{n+1}}.$$

$$3.23. \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\sqrt{n^7+5} - \sqrt{n-5}}{\sqrt[3]{n^7+5} + \sqrt{n-5}}.$$

$$3.24. \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\sqrt[3]{n^2+2} - 5n^2}{n - \sqrt{n^4-n+1}}.$$

$$3.25. \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\sqrt{n+2} - \sqrt[3]{n^3+2}}{\sqrt[7]{n+2} - \sqrt[5]{n^5+2}}.$$

$$3.26. \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n \sqrt{71n} - \sqrt[3]{64n^3+9}}{(n - \sqrt[8]{n}) \sqrt{11+n^2}}.$$

$$3.27. \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\sqrt{n+6} - \sqrt{n^2-5}}{\sqrt[3]{n^3+3} + \sqrt[4]{n^3+1}}.$$

$$3.28. \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\sqrt{n^3+6} - \sqrt{n-6}}{\sqrt[5]{n^3+6} + \sqrt{n-6}}.$$

$$3.29. \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n^2 - \sqrt{n^3+1}}{\sqrt[3]{n^6+2-n}}.$$

$$3.30. \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\sqrt{n+1} - \sqrt[3]{n^3+1}}{\sqrt[5]{n+1} - \sqrt[6]{n^5+1}}.$$

$$3.31. \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n^5 \sqrt{n} + \sqrt[5]{32n^{10}+1}}{(n + \sqrt[4]{n}) \sqrt[3]{n^5-1}}.$$

习题 4. 计算数列的极限.

$$4.1. \lim_{n \rightarrow \infty} n (\sqrt{n^2+1} + \sqrt{n^2-1}).$$

- 4.2. $\lim_{n \rightarrow \infty} n [\sqrt{n(n-2)} - \sqrt{n^2-3}]$.
- 4.3. $\lim_{n \rightarrow \infty} (n - \sqrt[3]{n^3-5})n\sqrt{n}$.
- 4.4. $\lim_{n \rightarrow \infty} [\sqrt{(n^2+1)(n^2-4)} - \sqrt{n^4-9}]$.
- 4.5. $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\sqrt{n^5-8} - n\sqrt{n(n^2+5)}}{\sqrt{n}}$.
- 4.6. $\lim_{n \rightarrow \infty} (\sqrt{n^2-3n+2} - n)$. 4.7. $\lim_{n \rightarrow \infty} (n + \sqrt[3]{4-n^3})$.
- 4.8. $\lim_{n \rightarrow \infty} [\sqrt{n(n+2)} - \sqrt{n^2-2n+3}]$.
- 4.9. $\lim_{n \rightarrow \infty} [\sqrt{(n+2)(n+1)} - \sqrt{(n-1)(n+3)}]$.
- 4.10. $\lim_{n \rightarrow \infty} n^2 [\sqrt{n(n^4-1)} - \sqrt{n^5-8}]$.
- 4.11. $\lim_{n \rightarrow \infty} n (\sqrt[3]{5+8n^3} - 2n)$.
- 4.12. $\lim_{n \rightarrow \infty} n^2 (\sqrt[3]{5+n^3} - \sqrt[3]{3+n^3})$.
- 4.13. $\lim_{n \rightarrow \infty} [\sqrt[3]{(n+2)^2} - \sqrt[3]{(n-3)^2}]$.
- 4.14. $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\sqrt{(n+1)^3} - \sqrt{n(n-1)(n-3)}}{\sqrt{n}}$.
- 4.15. $\lim_{n \rightarrow \infty} (\sqrt{n^2+3n-2} - \sqrt{n^2-3})$.
- 4.16. $\lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt{n} (\sqrt{n+2} - \sqrt{n-3})$.
- 4.17. $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\sqrt{n(n^5+9)} - \sqrt{(n^4-1)(n^2+5)}}{n}$.
- 4.18. $\lim_{n \rightarrow \infty} (\sqrt{n(n+5)} - n)$.
- 4.19. $\lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt{n^3+8} (\sqrt{n^3+2} - \sqrt{n^3-1})$.
- 4.20. $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\sqrt{(n^3+1)(n^2+3)} - \sqrt{n(n^4+2)}}{2\sqrt{n}}$.
- 4.21. $\lim_{n \rightarrow \infty} [\sqrt{(n^2+1)(n^2+2)} - \sqrt{(n^2-1)(n^2-2)}]$.
- 4.22. $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\sqrt{(n^5+1)(n^2-1)} - n\sqrt{n(n^4+1)}}{n}$.
- 4.23. $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\sqrt{(n^4+1)(n^2-1)} - \sqrt{n^6-1}}{n}$.

$$4.24. \lim_{n \rightarrow \infty} [n - \sqrt{n(n-1)}].$$

$$4.25. \lim_{n \rightarrow \infty} n^3 [\sqrt[3]{n^2(n^6+4)} - \sqrt[3]{n^8-1}].$$

$$4.26. \lim_{n \rightarrow \infty} [n\sqrt{n} - \sqrt{n(n+1)(n+2)}].$$

$$4.27. \lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt[3]{n} [\sqrt[3]{n^2} - \sqrt[3]{n(n-1)}].$$

$$4.28. \lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt{n+2} (\sqrt{n+3} - \sqrt{n-4}).$$

$$4.29. \lim_{n \rightarrow \infty} n (\sqrt{n^4+3} - \sqrt{n^4-2}).$$

$$4.30. \lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt{n(n+1)(n+2)} (\sqrt{n^3-3} - \sqrt{n^3-2}).$$

$$4.31. \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\sqrt{(n^2+5)(n^4+2)} - \sqrt{n^6-3n^3+5}}{n}.$$

习题 5. 计算数列的极限.

$$5.1. \lim_{n \rightarrow \infty} \left(\frac{1}{n^2} + \frac{2}{n^2} + \frac{3}{n^2} + \cdots + \frac{n-1}{n^2} \right).$$

$$5.2. \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{(2n+1)! + (2n+2)!}{(2n+3)!}.$$

$$5.3. \lim_{n \rightarrow \infty} \left[\frac{1+3+5+7+\cdots+(2n-1)}{n+1} - \frac{2n+1}{2} \right].$$

$$5.4. \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{2^{n+1} + 3^{n+1}}{2^n + 3^n}. \quad 5.5. \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1+2+3+\cdots+n}{\sqrt{9n^4+1}}.$$

$$5.6. \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1+3+5+\cdots+(2n-1)}{1+2+3+\cdots+n}.$$

$$5.7. \lim_{n \rightarrow \infty} \left[\frac{1+3+5+\cdots+(2n-1)}{n+3} - n \right].$$

$$5.8. \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1+4+7+\cdots+(3n-2)}{\sqrt{5n^4+n+1}}.$$

$$5.9. \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{(n+4)! - (n+2)!}{(n+3)!}.$$

$$5.10. \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{(3n-1)! + (3n+1)!}{(3n)! (n-1)}.$$

$$5.11. \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{2^n - 5^{n+1}}{2^{n+1} + 5^{n+2}}.$$

- $$5.12. \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1 + \frac{1}{3} + \frac{1}{3^2} + \cdots + \frac{1}{3^n}}{1 + \frac{1}{5} + \frac{1}{5^2} + \cdots + \frac{1}{5^n}}$$
- $$5.13. \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1-3+5-7+9-11+\cdots+(4n-3)-(4n-1)}{\sqrt{n^2+1}+\sqrt{n^2+n+1}}.$$
- $$5.14. \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1-2+3-4+\cdots+(2n-1)-2n}{n}.$$
- $$5.15. \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\sqrt[3]{n^3+5}-\sqrt{3n^2+2}}{1+3+5+\cdots+(2n-1)}.$$
- $$5.16. \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{3^n-2^n}{3^{n-1}+2^n}.$$
- $$5.17. \lim_{n \rightarrow \infty} \left[\frac{n+2}{1+2+3+\cdots+n} - \frac{2}{3} \right].$$
- $$5.18. \lim_{n \rightarrow \infty} \left(\frac{5}{6} + \frac{13}{36} + \cdots + \frac{3^n+2^n}{6^n} \right).$$
- $$5.19. \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{2-5+4-7+\cdots+2n-(2n+3)}{n+3}.$$
- $$5.20. \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{(2n+1)!+(2n+2)!}{(2n+3)!-(2n+2)!}.$$
- $$5.21. \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1+2+\cdots+n}{n-n^2+3}.$$
- $$5.22. \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n^2+\sqrt{n}-1}{2+7+12+\cdots+(5n-3)}.$$
- $$5.23. \lim_{n \rightarrow \infty} \left(\frac{3}{4} + \frac{5}{16} + \frac{9}{64} + \cdots + \frac{1+2^n}{4^n} \right).$$
- $$5.24. \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{2+4+6+\cdots+2n}{1+3+5+\cdots+(2n-1)}.$$
- $$5.25. \lim_{n \rightarrow \infty} \left[\frac{1+5+9+13+\cdots+(4n-3)}{n+1} - \frac{4n+1}{2} \right].$$
- $$5.26. \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1-2+3-4+\cdots-2n}{\sqrt[3]{n^3+2n+2}}.$$
- $$5.27. \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{2^n+7^n}{2^n-7^{n-1}}.$$
- $$5.28. \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n!+(n+2)!}{(n-1)!+(n+2)!}.$$
- $$5.29. \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{3+6+9+\cdots+3n}{n^2+4}.$$