双曲綫函数

徐玉相著

商務印書館

12

10

双曲綫函数

徐玉相著

商务印書館

双 曲 綫 函 数

徐玉相著

商 務 印 書 館 出 版
上海河南中路二一一號
〔上海市書刊出版業營業許可證出字第〇二五號〕
新 華 書 店 總 經 售
上 海 勞 動 印 製 廠 印 刷
13017·144

1936年5月初版　　開本 850×1168 1/32
1957年8月3版　　印張 8 2/16
1957年8月上海第1次印刷　　印數 1—1,500
定價(10) ¥ 1.20

序　言

雙曲線函數,爲意大利人 Riccati 氏所發明,其最初之論文,發表於1757年.其後經 Lambert, Gudermann, Gronau, Laisant, Gunther, Greenhill Kennelly 等氏之研究,而至於今日之發達.此函數,在高等數學,物理學及有關於數學,物理學之工學上,應用頻繁.故凡有志於此種學問之士,則雙曲線函數之概要,不可不知也.

我國數學書籍,關於雙曲線函數.不僅罕無專書,卽其斷片記述,亦難得之於現有之數學書中.爲學子之便利計,爲國家之文化計,實不容長此因循.我是以不遑遜讓,而有此小册之編輯也.

本書共分三編:第一編,實數之雙曲線函數,論述以實數爲自變數之雙曲線函數;第二編,複虛數之雙曲線函數,論述以複虛數爲自變數之雙曲線函數;第三編,雙曲線函數之應用,則舉例說明雙曲線函數之應用之大要.全書內容,雖未可稱完璧,但基礎各端,大致已備.

本書敍述,甚爲平易淺顯.凡略知微積分學者,讀之卽不難無師自通,故可供大學理工科學生自修之用.若採作敎科書,則爲敎師者,祇須擇要而講解之可矣.

本書編輯時,大部分之材料,係模仿日本岩藤重正氏所著之'應用數學雙曲線函數篇''一書者.此外,兼採L. Kiepert氏之"Differentialrechnung", J. McMahon氏之"Hyperbolic Functions", M. E. J. Gheury De Bray氏之"Elementary Hyperbolics"等書之所長.對於以上諸作者,深表敬謝之意.

一九三二年一月

海寧徐玉相識

目　錄

第一篇　實數之雙曲線函數……1

第一章　雙曲線函數之意義……1

§ 1.　雙曲線之扇形度與特性比之關係……1

§ 2.　雙曲線函數之定義……3

§ 3.　雙曲線函數之幾何學的意義……5

§ 4.　雙曲線函數名稱之由來……9

§ 5.　雙曲線函數與指數函數之關係……10

§ 6.　雙曲線函數之變化……11

第二章　重要的恆等式……15

§ 7.　$\sinh(x\pm y)$, $\cosh(x\pm y)$, $\tanh(x\pm y)$……15

§ 8.　$\sinh 2x$, $\cosh 2x$, $\tanh 2x$……16

§ 9.　$\sinh 3x$, $\cosh 3x$, $\tanh 3x$……17

§ 10.　$\sinh\frac{x}{2}$, $\cosh\frac{x}{2}$, $\tanh\frac{x}{2}$……18

§ 11　$\sinh^2 x$, $\cosh^2 x$, $\sinh^3 x$, $\cosh^3 x$……20

§ 12.　$\left.\begin{matrix}\sinh(x+y)\sinh(x-y)\\ \cosh(x+y)\cosh(x-y)\end{matrix}\right\}$……20

$\left.\begin{array}{l}\tanh x \pm \tanh y \\ \coth x \pm \tanh y \\ \coth x \pm \coth y\end{array}\right\}$ ……21

§ 13. $\left.\begin{array}{l}\sinh x \cosh y \\ \cosh x \sinh y \\ \cosh x \cosh y \\ \sinh x \sinh y\end{array}\right\} \left.\begin{array}{l}\sinh x+\sinh y \\ \sinh x-\sinh y \\ \cosh x+\cosh y \\ \cosh x-\cosh y\end{array}\right\}$ ……22

第三章 逆雙曲線函數 ……26

§ 14. 逆雙曲線函數之定義……26

§ 15. 逆雙曲線函數與對數函數之關係 ……27

§ 16. 重要的恆等式 ……30

§ 17. 雙曲方程式及逆雙曲方程式……33

第四章 Gudermann 函數 ……40

§ 18. 橢圓線之扇形度與特性比之關係 ……40

§ 19. Gudermann 函數……42

§ 20. Gudermann 函數與雙曲線函數之關係 ……44

§ 21. Gudermann 函數之變化……46

§ 22. Gudermann 函數之圖解算法……47

第五章 逆 Gudermann 函數 ……50

§ 23. 逆 Gudermann 函數之定義……50

§ 24. 用圓函數之逆雙曲線函數以表示逆 Gudermann 函數 ……50

§ 25. 用圓函數之對數函數以表示逆 Gudermann 函數 ……51

§ 26. 雙曲線函數値之計算 ……52

第六章 微分法 ……54

§ 27. 不等式 $\sinh x > x > \tanh x$ ……54

§ 28. 極限値 $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sinh x}{x}, \lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\tanh x}{x}$ ……55

§ 29. 雙曲線函數之微分商 ……56

§ 30. $\sinh mx, \cosh mx$ 之逐次微分商 ……61

§ 31. 逆雙曲線函數之微分商 ……62

§ 32. Gudermann 函數之微分商 ……65

§ 33. 逆 Gudermann 函數之微分商 ……67

第七章 積分法 ……70

§ 34. $\int \sinh x\,dx \int \cosh x\,dx \cdots\cdots \int \operatorname{csch} x\,dx$ ……70

§ 35. $\int \sinh^2 x\,dx \int \cosh^2 x\,dx \cdots\cdots \int \operatorname{csch}^2 x\,dx$ ……72

§ 36. $\left.\begin{array}{l}\int \sinh mx \cosh nx\,dx \\ \int \cosh mx \cosh nx\,dx \\ \int \sinh mx \sinh nx\,dx\end{array}\right\}$ ……74

§ 37. $\left.\begin{array}{l}\int \sinh mx \cos nx\, dx \\ \int \cosh mx \cos nx\, dx \\ \int \sinh mx \sin nx\, dx \\ \int \cosh mx \sin nx\, dx\end{array}\right\}$ ……………………75

§ 38. $\int f(\sinh x, \cosh x)\, dx$ ……………………78

§ 39. $\int \sinh^m x \cosh^n x\, dx$ ……………………79

§ 40. $\int \sinh^n x\, dx \int \cosh^n x\, dx$ …… $\int \operatorname{csch}^n x\, dx$ ……81

§ 41. $\int x^m \sinh nx\, dx \int x^m \cosh nx\, dx$ ……………………83

§ 42. $\int e^{ax} \sinh nx\, dx, \int e^{ax} \cosh nx\, dx$ ……………………85

§ 43. $\int e^{ax} \sinh^n x\, dx \int e^{ax} \cosh^n x\, dx$ ……………………86

§ 44. $\int \sinh^{-1} x\, dx, \int \cosh^{-1} x\, dx,$ …… $\int \operatorname{csch}^{-1} x\, dx$ ……87

第八章 無限級數展開法 ……………………103

§ 45. 雙曲線函數之無限級數展開法 ……………………103

§ 46. 逆雙曲線函數之無限級數展開法……………………105

§ 47. Gudermann 函數之無限級數展開法 ……………………110

§ 48. 逆 Gudermann 函數之無限級數展開法 ……111

第九章 函數之圖 ……………………116

§49 雙曲線函數之圖……………………116

§50. 逆雙曲線函數之圖 ……121
§51. Gudermann 函數之圖 ……123
§52. 逆 Gudermann 函數之圖 ……124

第二篇　複虛數之雙曲線函數 ……125

第十章　複虛數 ……125

§53. 複虛數之定義及基礎的性質 ……125
§54. 複虛數之加減乘除 ……126
§55. 複虛數及其加減乘除之幾何學的表示 ……128

第十一章　複虛級數及羃級數 ……132

§56. 複虛級數 ……132
§57. 羃級數 ……135

第十二章　指數函數,雙曲線函數及圓函數 ……138

§58. 複虛數之指數函數 ……138
§59. 複虛數之雙曲線函數 ……140
§60. 純虛數之雙曲線函數 ……141
§61. 複虛數之圓函數 ……141
§62. 純虛數之圓函數 ……142
§63. 指數函數 e^{iy} 及雙曲線函數 $H(iy)$ 之變化 ……143
§64. $\sinh(x\pm iy)$, $\cosh(x\pm iy)$, $\tanh(x\pm iy)$ 之展開式 ……144
§65. 雙曲線函數之週期 ……146

§66. $H\left(x\pm i\frac{\pi}{2}\right)$ ……150

§67. $H(x+in\pi)$ ……150

§68. $H(in\pi)$ 及 $H\left[i(2n+1)\frac{\pi}{2}\right]$ ……151

第十三章 對數函數，逆雙曲線函數及逆圓函數……154

§69. 複虛數之對數函數 ……154

§70. 複虛數之逆雙曲線函數……155

§71. 複虛數之逆圓函數 ……156

§72. $\sinh^{-1}(x\pm iy)$, $\cosh^{-1}(x\pm iy)$, $\tanh^{-1}(x\pm iy)$ 之展開式……158

第三篇 雙曲線函數之應用……167

第十四章 三次方程式之解法……167

§73. 使三次方程式 $x^3+ax^2+bx+c=0$ 變爲 $y^3+py+q=0$ 之形 ……167

§74. $y^3+py+q=0$ 之解法 ……168

§75. $y^3+3ly\pm2m=0$ 之三角函數的解法(l, m 各爲正的實數)……169

§76. $y^3+3ly\pm2m=0$ 之雙曲線函數的解法(l, m 各爲正的實數)……173

§77. $y^3-3ly\pm2m=0$ 之三角函數的解法(l, m 各爲正的實數, $m^2\leqq l^3$) ……177

§78. $y^3-3ly\pm 2m=0$ 之雙曲線函數的解法 (l, m 各為正的實數, $m^2>l^3$) ……183

§79. 解三次方程式之例 ……186

第十五章　代數函數之積分值可用雙曲線函數表示者 ……193

§80. $\int\frac{dx}{\sqrt{x^2+a^2}}$, $\int\frac{dx}{\sqrt{x^2-a^2}}$, $\int\frac{dx}{a^2-x^2}$, $\int\frac{dx}{x^2-a^2}$ $\int\frac{dx}{x\sqrt{a^2-x^2}}$, $\int\frac{dx}{x\sqrt{a^2+x^2}}$ ……193

§81. $\int\sqrt{x^2+a^2}dx\int\sqrt{x^2-a^2}\,dx$ ……197

§82. $\int\frac{dx}{ax^2+2bx+c}$, $\int\frac{dx}{\sqrt{ax^2+2bx+c}}$ ……199

第十六章　微分方程式之解可用雙曲線函數表示者 ……202

§83. 關於微分方程式的幾個用語之說明 ……202

§84. 微分方程式之解可用雙曲線函數表之者……204

第十七章　複虛數之圓函數及逆圓函數之展開式……207

§85. $\sin(x\pm iy)$, $\cos(x\pm iy)$, $\tan(x\pm iy)$ 之展開式……207

§86. $\sin^{-1}(x\pm iy)$, $\cos^{-1}(x\pm iy)$, $\tan^{-1}(x\pm iy)$ 之展開式……209

第十八章　懸鏈線 ……217

§87. 懸鏈線……217

§ 88. 彈性懸鏈線 ……………………………………220

第十九章 擔負及張力同時並受之梁之撓屈 ………225

§ 89. 一端固定之梁於自由端垂直擔負及水平張力同時並受時之撓屈……………………225

§ 90. 肱梁同時並受均布擔負及水平張力作用時之撓屈 ……………………………………227

第二十章 斜航曲線及 Mercator 氏航海圖……………231

§ 91. 斜航曲線 ……………………………………231

§ 92. Mercator 氏航海圖 ……………………………234

第二十一章 附錄……………………………………238

§ 93. 其他應用事項之名稱及參考書 ………………238

§ 94. 函數表 ……………………………………240

第一篇　實數之雙曲線函數

第一章　雙曲線函數之意義

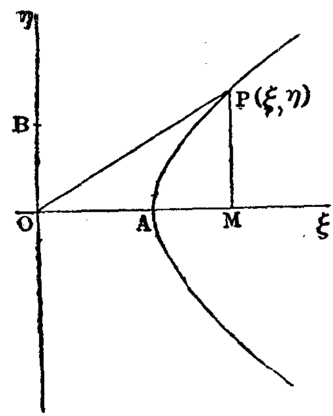
§1. 雙曲線之扇形度與特性比之關係.

如第1圖所示,於雙曲線(Hyperbola)

$$\frac{\xi^2}{a^2}-\frac{\eta^2}{b^2}=1 \quad\text{.................(i)}$$

之第I象限內之線上,取任意之點$P(\xi,\eta)$.由P點向ξ軸引垂線,設其足為M.

再設扇形(Sector) $AOPA$ 之面積為S,則



第 1 圖

$$S=\triangle OPM-MAPM=\frac{1}{2}\xi\eta-\int_a^\xi \eta\, d\xi \quad\text{.....................(ii)}$$

由(i)得

$$\eta=\pm\frac{b}{a}\sqrt{\xi^2-a^2};$$

但P點在第I象限內之時,則η為正;

故 $$\eta=\frac{b}{a}\sqrt{\xi^2-a^2}.\cdots\cdots\cdots\cdots(\text{iii})$$

以(iii)代入(ii)之中,則

$$S=\frac{1}{2}\xi\frac{b}{a}\sqrt{\xi^2-a^2}-\frac{b}{a}\int_a^\xi\sqrt{\xi^2-a^2}\,d\xi$$

$$=\frac{1}{2}\cdot\frac{b}{a}\xi\sqrt{\xi^2-a^2}$$

$$-\frac{b}{a}\left|\frac{1}{2}\xi\sqrt{\xi^2-a^2}-\frac{1}{2}a^2\log(\xi+\sqrt{\xi^2-a^2}\right|_a^\xi$$

$$=\frac{1}{2}ab\log\frac{\xi+\sqrt{\xi^2-a^2}}{a}$$

$$=\frac{1}{2}ab\log\left(\frac{\xi}{a}+\sqrt{\left(\frac{\xi}{a}\right)^2-1}\right).$$

故 $$\frac{S}{\frac{1}{2}ab}=\log\left(\frac{\xi}{a}+\sqrt{\left(\frac{\xi}{a}\right)^2-1}\right).\cdots\cdots\cdots\cdots(\text{iv})$$

此處之 $\frac{1}{2}ab$,等於以共軛半徑(Conjugate radius)

$$OA=a,\quad OB=b$$

爲二邊之直角三角形 AOB 之面積,設以 T 表之,則由(iv)得

$$\frac{S}{T}=\log\left(\frac{\xi}{a}+\sqrt{\left(\frac{\xi}{a}\right)^2-1}\right).\cdots\cdots\cdots\cdots(\text{v})$$

今爲簡單起見,設

$$\frac{S}{T}=x,$$

以之代入(v)之中,則

$$x=\log\left(\frac{\xi}{a}+\sqrt{\left(\frac{\xi}{a}\right)^2-1}\right).$$

變形之,則

$$\frac{\xi}{a}+\sqrt{\left(\frac{\xi}{a}\right)^2-1}=e^x,$$

卽

$$\sqrt{\left(\frac{\xi}{a}\right)^2-1}=e^x-\frac{\xi}{a}. \quad\text{(vi)}$$

再將(vi)之兩邊各自乘而整理之,則

$$\frac{\xi}{a}=\frac{1}{2}(e^x+e^{-x}). \quad\text{(vii)}$$

以(vii)代入(i)之中,則

$$\frac{\eta}{b}=\frac{1}{2}(e^x-e^{-x}). \quad\text{(viii)}$$

此處(vii),(viii)中之x,稱爲雙曲線(i)

$$\frac{\xi^2}{a^2}-\frac{\eta^2}{b^2}=1$$

上之P點之扇形度(Sectorial measure).又$\frac{\xi}{a}$,稱爲P點之第一特性比(Primary characteristic ratio);而$\frac{\eta}{b}$稱爲P點之第二特性比(Secondary characteristic ratio).

由(vii),(viii)可知特性比$\frac{\xi}{a}$,$\frac{\eta}{b}$皆僅爲扇形度x之函數,而與共軛半徑a,b則無關係,換言之,與雙曲線之形狀無關係.故不問a,b之如何,在任意一雙曲線,其特性比與扇形度之間,恆得一定不變之函數關係.

§2. 雙曲線函數之定義.

雙曲線函數(Hyperbolic function),亦如圓函數(Circular function),分爲下列數種:

雙曲線正弦 (Hyperbolic sine),

雙曲線餘弦 (Hyperbolic cosine),

雙曲線正切 (Hyperbolic tangent),

雙曲線餘切 (Hyperbolic cotangent),

雙曲線正割 (Hyperbolic secant),

雙曲線餘割 (Hyperbolic cosecant).

今設其自變數爲 x, 則以上六種之函數, 各以下列記號表之:

$$\sinh x,\quad \cosh x,\quad \tanh x,\quad \coth x,\quad \operatorname{sech} x,\quad \operatorname{csch} x.$$

或用德國字母而以下列記號表之:

$$\mathfrak{Sin}\,\mathfrak{x},\quad \mathfrak{Cos}\,\mathfrak{x},\quad \mathfrak{Tg}\,\mathfrak{x},\quad \mathfrak{Ctg}\,\mathfrak{x},\quad \mathfrak{Sek}\,\mathfrak{x},\quad \mathfrak{Csk}\,\mathfrak{x},$$

此等, 各讀爲 Hyperbolic sine x, Hyperbolic cosine x 等, 或簡讀爲 hyper-sine x, hyper-cosine x 等, 亦可簡讀爲 h－sine x, h－cosine x 等.

至於此六種雙曲線函數之定義, 則如下:

$$\sinh x=\frac{1}{2}(e^{x}-e^{-x}), \qquad (1)$$

$$\cosh x=\frac{1}{2}(e^{x}+e^{-x}), \qquad (2)$$

$$\tanh x=\frac{\sinh x}{\cosh x}=\frac{1}{\coth x}, \qquad (3)$$

$$\coth x=\frac{\cosh x}{\sinh x}=\frac{1}{\tanh x}, \qquad (4)$$