全国工学硕士研究生入学考试

数学复习指南

裴志明　主编

中国科学技术大学出版社

全国工学硕士研究生入学考试

数学复习指南

主编 裴志明

编者 （按姓氏笔画为序） 马长兴 纪晓福

周 彤 贾建华 裴志明

中国科学技术大学出版社

1993 · 合肥

内　容　简　介

本书是根据国家教委最新修订的《工学硕士研究生入学考试数学考试大纲(修订版)》编写的数学复习指导书，旨在较短时间内使读者了解本考试的特点和要求，巩固所学知识，有针对性地加强薄弱环节，通过解题强化训练，以全面提高应试能力。

全书共四篇，分别复习高等数学、线性代数、概率论和复变函数。每篇中将大纲要求的内容顺序分单元复习，每单元中均有复习要点、例题解析和自测题三部分。附录除自测题答案与提示外，还有工学硕士研究生入学数学考试介绍和1992—1993年的数学一、二、三类试题及解答。

本书的主要特点是：紧密配合大纲，反映考试的要求和特点；面向考生实际，突出复习的针对性；通过对知识难点、解题方法详细的分析讲解，使读者融会贯通、举一反三，从而有效地提高综合应用能力和灵活解决问题的能力。

本书除作为硕士研究生报考者的复习指导书外，还可作为理工科高等院校师生的课外读物或教学参考书。

(皖)新登字08号

全国工学硕士研究生入学考试
数　学　复　习　指　南
裴志明　主编

*

中国科学技术大学出版社出版发行
(安徽省合肥市金寨路96号，230026)
金寨　印刷厂印刷
全国新华书店经销

*

开本：787×1092/16　印张：37　字数：900 千
1993年8月第1版　1993年8月第1次印刷
印数：1－5 000册
ISBN7-312-00438-5/O·134　定价：17.50元

编写说明

本书是根据《工学硕士研究生入学考试数学考试大纲（修订版）》编写的数学复习指导书，旨在较短时间内使读者了解本考试的特点和要求，巩固所学知识，有针对性地加强薄弱环节，通过解题强化训练以全面提高应试能力。

编者大都曾多年从事高等院校的高等数学和工程数学的教学，尤其是每年的研究生入学考试数学辅导班的讲授.在几年来的实践中，我们不断摸索和研究如何更有效地指导考生做好复习，为此做了一些尝试，积累了一些经验．研究生入学考试是一种选拔性统考，虽然和本科数学有直接联系，但仍具有其测试内容上的重点和测试方式上的特点．再加上数学考试覆盖内容较多，复习时间隔的时间较长，都给考生的复习工作带来一定困难．大多数考生由于缺乏必要的指导，只是简单地复习习题课内容，或啃手头上的某本习题集．一方面可能因缺乏针对性，不摸考试特点，对重点、难点重视不够，考完后才发现复习得不大对路；另一方面可能因基础知识和基本技能的复习训练缺乏系统性，解题时漫无头绪，解题后不善归纳总结，致使题虽做了很多，却难真正消化吸收，上场时仍不免心中无数．鉴于上述这些情况，几位编者历时数载，勉力编写了这本数学复习指导书，以满足考生的迫切需要．本书的指导思想就是抓住考试的要求和特点，系统地进行基础知识的基本技能的综合复习，使读者真正消化吸收．融会贯通，提高综合应用能力和灵活处理问题的能力．

全书共分四篇，分别复习高等数学、线性代数、概率论和复变函数，各部分的篇幅按“数学试卷一”的内容比例安排．每篇中将大纲要求的内容顺序分单元复习，以章或讲为一个复习单元．每单元均有复习要点、例题解析和自测题三部分．复习要点仅列出本单元所复习的大纲中的内容．核心部分例题解析解答典型例题，提示要点，分析总结解题的思路、方法，以帮助读者巩固基础，提高能力．自测题进一步加强解题训练，突出重点、难点，培养综合能力和应变能力，巩固和提高复习效果．附录中除自测题提示与答案外，还有工学硕士研究生入学数学考试介绍及近年的数学试题与参考解答，以帮助读者了解本考试的范围、试卷分类、内容比例与题型结构、题目数量以及答卷要求等等．

本书既不是面向初学者的习题课教材，也不是一般的习题集．它以辅导研究生入学数学考试为目的，一切从本考试的具体要求和考生的实际出发．在编选例题与各类练习题时务求体现这一宗旨，即加强题目的针对性，反映考试的重点、难点，使题目的难度（即综合性、技巧性）和命题风格（即测试方式）最大程度地与近年试题吻合．本书大多数题目的难度接近或相当于正式试题，具有较好的典型性．之所以不把类似教材中的基础练习的题目作为重点，并力戒脱离考试要求与特点的偏怪难题，是因为一方面，假定读者已初步掌握了有关课程的基本内容，而且不同程度的读者也可根据情况在使用教材复习基本概念、定理、公式时选作其中的一些基础练习题；另一方面也避免不必要地拔高复习要求，加重考生复习负担．

由于研究生入学考试是一种着重考核综合应用能力的选拔性考试，同时数学考试的命题又更具有灵活性，因而尽管本书在例题和练习题中强调重点，加强针对性，但数学题目无法生

搬硬套、简单模仿。倘若就题解题，即使遇到了很类似的题也可能束手无策。要真正提高读者解决问题的能力和考生的应试能力，就必须在解题时努力强调基础知识、基本技能的深入领会与综合应用，解题方法、技巧的归纳总结。这正是辅导班的课堂复习效果明显优于考生自己做复习题的原因，也正是本书区别于其它一般复习指导书所具有的特色。

体现这一特色的主要是例题解析中每个例题后所附的注，它是本书不可或缺的重要组成部分。它通过概念、定理、公式的理解、应用中易忽略或出错的注意点，错题分析与一题多解，题型总结与解题方法、技巧的归纳，重点、难点的分析讲解，相关内容的比较和联系等，这些提示、分析、总结，无疑使本书更加可读、实用。它有效地克服了多数复习指导书就题解题的缺陷，使读者易于融会贯通，举一反三；充分发挥了解题训练在培养应试能力上的作用，使读者能够通过本书获得事半功倍的复习效果。

本书既忝为读者复习之指南，编者莫敢不竭智尽力，披沙拣金，钩玄提要，务使本书能名实相副，真正有益于读者。编者相信，只要考生认真使用本书，深入领会例题和讲解，独立完成练习，定能稳操必胜之券。后面的《使用说明》是读者使用本书时的一些建议和注意事项，例如使用数学一、二、三类不同试卷的考生如何选用本书内容等，其中均有详细说明，望予重视。

本书的主要读者对象是参加工学硕士研究生入学数学考试的考生，同时也可作为理工科高等院校师生的课外读物或教学参考书。

使 用 说 明

对于本书的主要读者对象，准备参加全国工学硕士研究生入学数学考试的考生，在使用本书时须注意下列事宜。

(1) 首先要了解报考专业招生考试所采用的数学试题类型，是数学一、二、三中的哪一类，这类试题所覆盖的内容有哪些，这些门类的课程在试题所占比例如何，等等。这些均可参考书末附录B的考试介绍。

数学一中概率论和复变函数可由考生任选一门应试，考生在复习之初即应根据平时掌握情况和这些课程与今后所学专业的关系来尽早确定(也有个别学校根据专业统一作了指定)。本书包括了数学一要求的全部内容，各类考生应根据具体情况选用。需要指出的是，数学三中尽管有常微分方程，但要求内容却和数学一、二有差别，这点在本书中已有详细说明。此外，三类试题对同一内容的要求，具体到题目的难易都是一致的，决不可因为应试的是数学二或三，就想当然地降低要求。从书末所附的近年试题中也可看出，尤其一、二类试题的题目有较大程度的重合。

顺便介绍一下考试大纲的一些情况。自1990年国家教委以1986年颁布的《全国工学硕士生入学考试数学考试大纲》为基础作了较大修订以来，每年印行的考试大纲就只有个别文字和编排形式的变动，以及所附样题的逐年更新。因而读者只须从书末的附录B中了解上面提到的那些关于试题类型、覆盖内容等的情况。同时建议读者，最好采用依照修订大纲编写的有关复习资料；如果想及早开始复习，也没必要等着采用当年大纲。至少近年一般情况不会有什么变动或变动极小。当然一旦得到了当年大纲，不妨将有关内容和本书作一核对。

(2) 结合教材使用本书，阅读本书时同步地复习教材中的相关内容。

本书是面向考试的复习指导书，为突出考试要求，体现适当的综合性，减小篇幅，一些概念、定理并未全部罗列，一些较为简单的基础训练题也未能选入。对于一般中等程度的考生，可按照本书的“复习要点”(即大纲中要求的内容)，将教材复习一次，根据自己实际掌握情况演练一些教材中的习题。复习时配套使用的教材，建议采用在1987年4月国家教委颁发《高等工业学校数学课程教学基本要求》以后修订或新编的教材。

当然，对于某些程度较好的考生，也可直接阅读本书，或者只在疑难处参考教材。

(3) 掩卷审题，动手演练。在使用本书的例题时一定要先独立思考，作出解答，或者至少认真审题后再参考例题的题答。

这一建议决非无聊的老生常谈。如果只看解答，懒于思考和动手，掉以轻心，往往导致眼高手低，本书例题可供考生练习、检查、模仿。培养数学解题能力重在独立思考，而对于即将应试的考生更应加强演练。只有如此，才能确实提高应试能力。

(4) 认真领会例题中“注”的内容，加强解题后的思考和总结。

例题中以“注”的形式对例题及相关内容作了较为详细的讲解分析，它在本书占有重要地位。例如概念、定理、公式理解和应用的注意点，典型错误的分析，难点的讲解，审题、解题

方法的归纳和题目类型的总结，等等，这些内容都可作为读者作进一步思考和总结的基础。只有通过读者自己的思考和总结——即消化和吸收，才能真正深入掌握有关内容，提高解题能力。

建议读者作自己的复习笔记，分析自己解题中的错误，记录学习心得和存疑问题，以便有针对性地加强薄弱环节，解决疑难，提高下一轮重点复习的效率。

（5）了解题目的形式和难易。

工学硕士研究生入学数学考试的三类试题的题目均为填空题、选择题、解答题(计算题与应用题)、证明题等四种形式。选择题为单重选择，即(A),(B)，(C)，(D)四个答案中有且只有一个正确答案，因而解题时可使用排除法（即由三个错误答案而推知另一答案为正确答案）。

本书的例题和自测题中的选择题与试题不同，为多重选择题，即(A),(B),(C)，(D)四个答案中至少有一个正确。为节约篇幅，填空题和选择题不再注明“填空题”或“选择题”字样。为方便读者，这两类例题除给出正确答案外，都写出了分析过程，而试卷上只需写出正确答案。

本书多数例题的难度相当于近年的工学硕士研究生入学数学试题。每单元后的自测题一般都和例题配套。如例题的全部内容已掌握，自测题应独立完成。读者可用自测题检查复习效果。

（6）合理安排复习进度。

以下建议仅供参考，考生可根据自己实际情况再作调整。全部复习分两轮进行。重点为第一轮，采用本书按单元复习，每单元安排时间3—5学时。如每周安排复习两个单元，则对于数学一、二、三类试题的应试者分别约需15，13，5周时间。第二轮复习紧接第一轮复习进行，可安排2周时间。一方面用于整理前一轮的复习笔记，进一步查漏补缺；另一方面用附录中的试题作两次模拟测试，以进一步熟悉试题形式，进入临试状态。

目 次

编写说明……………………………………………………………………………… 1
使用说明……………………………………………………………………………… 3

第一篇 高 等 数 学

第一章 函数 极限 连续……………………………………………………………… 1
第一讲……………………………………………………………………………… 1
第二讲……………………………………………………………………………17
第二章 一元函数的微分学……………………………………………………………35
第一讲……………………………………………………………………………35
第二讲……………………………………………………………………………59
第三讲……………………………………………………………………………79
第三章 一元函数的积分学……………………………………………………………95
第一讲……………………………………………………………………………95
第二讲…………………………………………………………………………… 124
第四章 向量代数和空间解析几何………………………………………………… 146
第一讲…………………………………………………………………………… 146
第二讲…………………………………………………………………………… 156
第五章 多元函数的微分学………………………………………………………… 172
第一讲…………………………………………………………………………… 172
第二讲…………………………………………………………………………… 186
第六章 多元函数的积分学………………………………………………………… 198
第一讲…………………………………………………………………………… 198
第二讲…………………………………………………………………………… 211
第三讲…………………………………………………………………………… 227
第七章 无穷级数…………………………………………………………………… 244
第一讲…………………………………………………………………………… 244
第二讲…………………………………………………………………………… 258
第三讲…………………………………………………………………………… 271
第八章 常微分方程………………………………………………………………… 283
第一讲…………………………………………………………………………… 283
第二讲…………………………………………………………………………… 307

第二篇　线性代数

第一章　行列式 ………………………………………… 328
第二章　矩阵 ………………………………………… 344
第三章　向量 ………………………………………… 368
第四章　线性方程组 ………………………………………… 383
第五章　矩阵的特征值和特征向量 ………………………………………… 397
第六章　二次型 ………………………………………… 408

第三篇　概率论

第一章　随机事件和概率 ………………………………………… 419
第二章　随机变量及其分布 ………………………………………… 432
第三章　二维随机变量及其分布 ………………………………………… 449
第四章　随机变量的数字特征　大数定律和中心极限定理 ………………………………………… 468

第四篇　复变函数

第一章　复数和复变函数 ………………………………………… 487
第二章　复变函数的积分 ………………………………………… 500
第三章　级数与留数 ………………………………………… 510
第四章　保角映射 ………………………………………… 532

附录 A　自测题答案与提示 ………………………………………… 542
附录 B　工学硕士研究生入学数学考试介绍 ………………………………………… 551
附录 C　1992年全国工学硕士研究生入学数学试题及参考解答 ………………………………………… 557
附录 D　1993年全国工学硕士研究生入学数学试题及参考解答 ………………………………………… 570

后记 ………………………………………… 584

第一篇　高等数学

第一章　函数　极限　连续

第　一　讲

复　习　要　点

函数的概念及表示法　函数的有界性、单调性、周期性和奇偶性　反函数、复合函数和隐函数　基本初等函数的性质和图形　初等函数　简单应用问题的函数关系的建立。

例　题　解　析

1．已知 $f(x)=\begin{cases}x^2-x+1, & x<0;\\ x^2+x+1, & x\geqslant 0.\end{cases}$ 求 $f(-x)$。

［解］　将函数表达式两端(包括函数分段的定义域)中的 x 全部换为 $-x$，即得

$$f(-x)=\begin{cases}x^2+x+1, & x>0;\\ x^2-x+1, & x\leqslant 0.\end{cases}$$

或者也可在 $-x<0$ 与 $x\geqslant 0$ 的条件下依据函数表达式分别求 $f(-x)$，结果相同。

［注］　这虽是一道很简单的题目，但如果对函数的概念认识不够深刻或掉以轻心，则很容易出现下面的错误解法：

在 $x<0$ 时，$f(x)=x^2-x+1$。将 $-x$ 代入得　$f(-x)=x^2+x+1$。

在 $x\geqslant 0$ 时，$f(x)=x^2+x+1$。将 $-x$ 代入得　$f(-x)=x^2-x+1$。

由上可知

$$f(-x)=\begin{cases}x^2+x+1, & x<0;\\ x^2-x+1, & x\geqslant 0.\end{cases}$$

请读者自己来分析错误所在及其根源。

2．下列式子确定了一个单值函数的是

（A）$y=\begin{cases}x+1, & x\geqslant 1;\\ 2x-\sqrt{3}, & x\leqslant 2.\end{cases}$　　（B）$\dfrac{x^2}{a^2}+\dfrac{y^2}{b^2}=1$。

（C）$y=f^{-1}(x)$，其中 $f(x)=\pm\log_a(x+\sqrt{x^2-1})$。

（D）$y=\begin{cases}x, & x^2\text{为有理数};\\ 0, & x\text{为无理数}.\end{cases}$

［解］ 答案是（C）。容易看出，（A），（B），（D）均为多值函数，而 $y=f^{-1}(x)=(a^x+a^{-x})/2$，故（C）是单值函数。

［注］ 若对于自变量 x 的一个值，因变量 y 且只有一个值与之对应，则称 y 为 x 的单值函数。若对于自变量 x 的一个值，因变量 y 可能有多个值与之对应，则称 y 为 x 的多值函数。单值函数与多值函数统称为函数。

回顾函数的本来定义，在中学数学教材以及某些尽力与中学数学衔接的高等数学教材中，都讲"对应定义域中每个值按照法则 f 总有唯一确定的值"——这实际上仅定义了单值函数。而在大多数的高等数学或微积分教材中定义函数时没有"唯一"二字，这时函数的概念比前者显然要宽，包含了多值函数。在高等数学学习中，建议接受后一种概念，这样就比较容易理解 $\sin^{-1}x$ 与 $\arcsin x$，$\mathrm{ch}^{-1}x$ 与 $\mathrm{arch}\, x$ 的区别。

3．下列各式确定着某隐函数的是

（A）$x^5+x-e^{2y}-5=0$；　　（B）$\begin{cases}x=a\cos t,\\ y=b\sin t\end{cases}$（$a$，$b$ 为常数）；

（C）$\dfrac{x^2}{a^2}+\dfrac{y^2}{b^2}=1$（$a$，$b$ 为常数）；　　（D）$x^2+\dfrac{1}{y^2}+2=0$。

［解］ 答案是（A），（C）。

［注］ 函数没有写成因变量等于含有自变量的式子的形式，而是通过一个含有所有变量的方程，如 $F(x,y)$ 所确定，这样的函数称之为隐函数。但并不是所有方程 $F(x,y)$ 都确定着隐函数。方程（A）可看作是以 x 为未知数的五次方程，必有实根，因而确定了一个隐函数，尽管从（A）无法解出 x 或 y 表达式。但（D）则不然。

4．求下列函数的定义域：

（1）$y=\ln x+\sqrt{\dfrac{1+x}{1-x}}$；　　（2）$y=\arcsin\dfrac{6}{\pi}x+\dfrac{1}{\cos 3x}$；

（3）$y=\sqrt{x^2-3x+2}+\arcsin\dfrac{2x-1}{3}$。

［解］（1）函数的定义域为如下不等式组的解：

$$\begin{cases}x>0,\\ \dfrac{1+x}{1-x}\geqslant 0.\end{cases}$$

不等式 $\dfrac{1+x}{1-x}\geqslant 0$ 即 $(1+x)(1-x)\geqslant 0$ 且 $1-x\neq 0$，其解为 $-1\leqslant x<1$。故原不等式组的解为 $0<x<1$，即函数定义域。

（2）函数的定义域为如下不等式组的解：

$$\begin{cases}\left|\dfrac{6x}{\pi}\right|\leqslant 1,\\ \cos 3x\neq 0.\end{cases}$$

即

$$\begin{cases}-\dfrac{\pi}{6}\leqslant x\leqslant\dfrac{\pi}{6},\\ x\neq\dfrac{k}{3}\pi+\dfrac{\pi}{6},\ k=0,\ \pm 1,\cdots.\end{cases}$$

解得原不等式组的解为 $-\frac{\pi}{6}<x<\frac{\pi}{6}$，即函数的定义域。

(3) 函数的定义域为如下不等式组的解：

$$\begin{cases} x^2-3x+2\geqslant 0, \\ \left|\frac{2x-1}{3}\right|\leqslant 1. \end{cases}$$

解得不等式组的解为 $-1\leqslant x\leqslant 1$，即函数的定义域。

［注］ 由解析式给出的函数 $y=f(x)$ 在其变量没有具体的物理或几何等实际背景，即其值没有隐含的约束条件时，其定义域就是使得函数解析式有数学意义的自变量值的集合，也称为自然定义域。

求一个函数的定义域有以下一般性方法：

a) 基本初等函数的定义域可直接给出。

b) 对于可以写作如下形式的初等函数，$f[g(x)]$，其中 $f(x)$ 为基本初等函数，可以根据基本初等函数 $f(x)$ 的定义域，给出函数 $g(x)$ 的取值范围，通常得到的是关于 $g(x)$ 的可解不等式。只要解出该不等式即得原复合函数的定义域.

c) 对于可以写成若干初等函数（包括基本初等函数）的加、减、乘、除四则运算形式的初等函数，如果参加运算的各初等函数的定义域可求，则该函数的定义域即所有参加运算的函数的定义域之交集（如有除法运算，还需减去使除式为零的数集）。

5．下列哪组函数是同一函数？

(A) $f(x)=\sqrt{\frac{x+1}{x}}$ 与 $g(x)=\frac{\sqrt{x+1}}{\sqrt{x}}$；

(B) $f(x)=\ln(x\operatorname{sgn}x)$ 与 $g(x)=\frac{1}{2}\ln x^2$；

(C) $f(x)=\operatorname{ch}^{-1}x$ 与 $g(x)=\operatorname{ar}\operatorname{ch}x$；

(D) $f(x)=\frac{\pi}{2}$ 与 $g(x)=\arcsin x+\arccos x$。

［解］ 答案是(B)。分析如下：

(A) $f(x)$ 的定义域是不等式 $\frac{x+1}{x}\geqslant 0$ 的解，$g(x)$ 的定义域是不等式组 $\begin{cases} x+1\geqslant 0, \\ x>0 \end{cases}$ 的解，显然其定义域不同。

(B) 对于任意实数 x，$\ln(x\operatorname{sgn}x)=\ln|x|=\ln\sqrt{x^2}=\frac{1}{2}\ln x^2$，而且两函数的定义域也均为实数集 $\mathbf{R}$，因此它们是同一函数。

(C) $f(x)=\operatorname{ch}^{-1}x=\pm\ln(x+\sqrt{x^2-1})$，而 $g(x)=\ln(x+\sqrt{x^2-1})$，显然它们的对应法则不同。

(D) 当 $-1\leqslant x\leqslant 1$ 时，$g(x)=\arcsin x+\arccos x=\frac{\pi}{2}$，$f(x)$ 和 $g(x)$ 的对应法则相同。但 $f(x)$ 的定义域是实数集 $\mathbf{R}$，$g(x)$ 的定义域是 $[-1,1]$，仍不是同一函数。

［注］ 一个函数的要素有三个：定义域、对应法则和值域。任何一个函数实际上都包含

这三个要素。但值域是由定义域和对应法则唯一确定的，故确定一个函数的要素只是定义域和对应法则，它们也称为定义函数的两要素。

如果两个函数的定义域和对应法则相同，尽管变量与对应法则使用的符号不同，如 $f(x)=|x|$ 和 $g(y)=y\operatorname{sgn}y$，实质上都是同一函数(或称它们相同)。两函数的对应法则、值域分别相同，能否认为这两函数是同一函数？问题的关键仍是看它们的定义域是否相同。当且仅当它们有单值的反函数时结论成立.严格单调函数当然满足以上条件,但某些非单调函数也满足以上条件(可参考本讲例题 6)。

6．求下列函数的反函数。

(1) $y=\sqrt{1-x^2}$，$-1\leqslant x\leqslant 1$。

(2) $y=(a^x+a^{-x})/2$。

(3) $y=\begin{cases}x, & x<1;\\ x^2, & 1\leqslant x\leqslant 2;\\ \dfrac{x^3}{2}, & x>2.\end{cases}$

(4) $y=\begin{cases}x, & x\text{ 为有理数};\\ -x, & x\text{ 为无理数}.\end{cases}$

(5) $y=\begin{cases}1+x, & x<2;\\ x^2-1, & x\geqslant 2.\end{cases}$

［解］ (1) 由 $y=\sqrt{1-x^2}$，$-1\leqslant x\leqslant 1$，得

$$x^2=1-y^2,\quad 0\leqslant y\leqslant 1.$$

即

$$x=\pm\sqrt{1-y^2},\quad 0\leqslant y\leqslant 1.$$

故该函数的反函数为 $y=\pm\sqrt{1-x^2}$，$0\leqslant x\leqslant 1$。

(2) 由 $y=\dfrac{a^x+a^{-x}}{2}$，得 $a^x+\dfrac{1}{a^x}-2y=0$，即

$$(a^x)^2-2ya^x+1=0.$$

解此关于 a^x 的一元二次方程,得

$$a^x=\frac{2y\pm\sqrt{4y^2-4}}{2}=y\pm\sqrt{y^2-1}.$$

又由

$$y-\sqrt{y^2-1}=\frac{y^2-(\sqrt{y^2-1})^2}{y+\sqrt{y^2-1}}=(y+\sqrt{y^2-1})^{-1},$$

知

$$a^x=(y+\sqrt{y^2-1})^{\pm 1},$$

故

$$x=\log_a(y+\sqrt{y^2-1})^{\pm 1}=\pm\log_a(y+\sqrt{y^2-1}).$$

知该函数的反函数为

$$y=\pm\log_a(x+\sqrt{x^2-1}),\quad x\geqslant 1.$$

(3) 当 $x<1$ 时，$y=x$。即 $x=y$，$y<1$。

当 $1\leqslant x\leqslant 2$ 时，$y=x^2$。即 $x=\sqrt{y}$，$1\leqslant y\leqslant 4$，

当 $x>2$ 时，$y=\frac{x^3}{2}$。即 $x=\sqrt[3]{2y}$，$y>4$。

由上即得该分段函数的反函数为

$$y=\begin{cases}x, & x<1;\\ \sqrt{x}, & 1\leqslant x\leqslant 4;\\ \sqrt[3]{2y}, & x>4.\end{cases}$$

(4) 当 x 为有理数时，$y=x$。即 $x=y$，y 为有理数。

当 x 为无理数时，$y=-x$。即 $x=-y$，y 为无理数。

由上即得该分段函数的反函数即其本身

$$y=\begin{cases}x, & x\text{ 为有理数};\\ -x, & x\text{ 为无理数}.\end{cases}$$

(5) 当 $x<2$ 时，$y=1+x$。即 $x=y-1$，$y<3$。

当 $x\geqslant 2$ 时，$y=x^2-1$。即 $x=\sqrt{y+1}$（注意不是 $x=\pm\sqrt{y+1}$），$y\geqslant 3$。

由上即得该分段函数的反函数为

$$y=\begin{cases}x-1, & x<3;\\ \sqrt{x+1}, & x\geqslant 3.\end{cases}$$

［注］ (1) 求一个函数的反函数，首先要从函数的解析式中解出自变量的表达式。如果说原来函数的定义域可能是自然定义域（即能使因变量的表达式有数学意义的所有自变量值），那么反函数的定义域只能是原来函数的值域，而不再是反函数的自然定义域，前者显然是后者的子集。例如本题(1)中函数 $y=\sqrt{1-x^2}$，$-1\leqslant x\leqslant 1$ 的定义域是其自然定义域，它的反函数 $y=\pm\sqrt{1-x^2}$ 的定义域不是其自然定义域 $-1\leqslant x\leqslant 1$，而是函数 $y=\sqrt{1-x^2}$的值域，$[0,\ 1]$。

一个单值函数的反函数可能是多值函数，如$y=\sin x$ 的反函数$y=\operatorname{Arc}\sin x$。反之亦然。

大多数定义在连续区间上的非严格单调的单值函数的反函数为多值函数，如本题 (1) 中函数 $y=\sqrt{1-x^2}$。然而并非一定如此，(4)中函数

$$y=\begin{cases}x, & x\text{ 为有理数};\\ -x, & x\text{ 为无理函数}\end{cases}$$

即为反例。说明定义在$(-\infty,+\infty)$上的非严格单调函数可以有单值反函数。

该例同时说明，一个函数的反函数可以是其本身。通过下面的例题 7 可知这样的函数有无穷多个，但其中严格单调的只有 $y=x$ 和 $y=-x$。

(2) 分段函数虽然是个很容易接受的概念，但在实际的求反函数或复合函数的运算时却常显得烦琐或不易理出头绪。考试中也常出现这类问题，本讲作了重点加强。读者只要引起注意，通过认真练习不难熟练掌握。

7．下列函数中不满足 $f^{-1}=f$ 的是

(A) $f(x)=\frac{ax-b}{cx-a}$； (B) $f(x)=\frac{1-x}{1+x}$；

(C) $f(x)=\sqrt[3]{a^3-x^3}$； (D) $f(x)=\frac{1+x}{1-x}$。

［解］ 答案是(D)。分别求以上各函数的反函数，比较其对应法则即得。过程略。

［注］ 满足 $f^{-1}=f$ 的函数 $f(x)$，是否有 $f^{-1}(x)=f(x)$，即反函数是其自身呢？函数 $g(x)=-x, x\in\mathbf{R}^{+}$，而 $g^{-1}(x)=-x$，$x\in\mathbf{R}^{-}$，$g=g^{-1}$ 而 $g^{-1}(x)\neq g(x)$。只有当此函数的定义域和值域相同时，如 $f(x)=\dfrac{1-x}{1+x}$，定义域和值域均为 $\mathbf{R}-\{-1\}$，$f^{-1}=f$ 才能等价于 $f^{-1}(x)=f(x)$。

8．下列各组函数 $f(x)$ 和 $g(x)$ 有可能复合为 $f[g(x)]$ 的是

（A）$f(x)=\ln x$，$g(x)=\sqrt{\sin^2 x}-1$；

（B）$f(x)=\dfrac{1}{(1-x)^2}$，$g(x)=1$；

（C）$f(x)=g(x)=2\pi+\arcsin x$；

（D）$f(x)=D(x)=\begin{cases}1, & x\text{ 为有理数；}\\ 0, & x\text{ 为无理数}\end{cases}$ 与 $g(x)=\operatorname{sgn} x$。

［解］ 答案是（D）。容易判断，除（D）以外，（A），（B），（C）各组中 $g(x)$ 的值域都和 $f(x)$ 的定义域没有非空交集，故无法复合为 $f[g(x)]$。

［注］ 两个函数进行复合并不总是可行的。只有一个函数 $g(x)$ 的值域和另一个函数 $f(x)$ 的定义域有非空交集时才能复合为函数 $f[g(x)]$。由此显然有如下结论：尽管两个函数有相同定义域，却可能无法复合；即使 $f(x)$ 与 $g(x)$ 有复合函数 $f[g(x)]$，也不能确定必存在 $g[f(x)]$；复合函数 $f[g(x)]$ 的定义域必是 $g(x)$ 定义域的子集；定义在实数集 $\mathbf{R}$ 上的两函数总有定义域为 $\mathbf{R}$ 的复合函数 $f[g(x)]$ 与 $g[f(x)]$。

9．就下列各组中的两函数 $f(x)$ 和 $g(x)$ 分别求复合函数 $f[g(x)]$ 与 $g[f(x)]$：

（1）$f(x)=\begin{cases}x^3, & x\leqslant 0;\\ x, & x>0\end{cases}$ 与 $g(x)=\begin{cases}2, & x\leqslant 0;\\ -x^2, & x>0.\end{cases}$

（2）$f(x)=\dfrac{1}{2}(x+|x|)$ 与 $g(x)=\begin{cases}x, & x<0;\\ x^2, & x\geqslant 0.\end{cases}$

（3）$f(x)=\begin{cases}1, & |x|\leqslant 1;\\ 0, & |x|>1\end{cases}$ 与 $g(x)=\begin{cases}2-x^2, & |x|\leqslant 2;\\ 2, & |x|>2.\end{cases}$

（4）$f(x)=\begin{cases}1, & |x|<1;\\ 0, & |x|=1;\\ -1, & |x|>1\end{cases}$ 与 $g(x)=e^x$。

［解］（1）先求 $f[g(x)]$。

当 $x\leqslant 0$ 时，$g(x)=2>0$，$f[g(x)]=g(x)=2$。

当 $x>0$ 时，$g(x)=-x^2\leqslant 0$，$f[g(x)]=g^3(x)=-x^6$。

由上即得

$$f[g(x)]=\begin{cases}2, & x\leqslant 0;\\ -x^6, & x>0.\end{cases}$$

再求 $g[f(x)]$。

当 $x\leqslant 0$ 时，$f(x)=x^3\leqslant 0$，$g[f(x)]=2$。

当 $x>0$ 时，$f(x)=x>0$，$g[f(x)]=-f^2(x)=-x^2$。

由上即得

$$g[f(x)]=\begin{cases}2, & x\leqslant 0;\\ -x^2, & x>0.\end{cases}$$

(2) 先求 $f[g(x)]$。

当 $x<0$ 时，$g(x)=x<0$，$f[g(x)]=\frac{1}{2}(g(x)+|g(x)|)=\frac{1}{2}(x+|x|)=0$。

当 $x\geqslant 0$ 时，$g(x)=x^2\geqslant 0$，$f[g(x)]=\frac{1}{2}(g(x)+|g(x)|)=\frac{1}{2}(x^2+|x^2|)=x^2$。

由上即得

$$f[g(x)]=\begin{cases}0, & x<0;\\ x^2, & x\geqslant 0.\end{cases}$$

再求 $g[f(x)]$。

因 $f(x)=\frac{1}{2}(x+|x|)\geqslant 0$，故 $g[f(x)]=f^2(x)=\frac{1}{2}(x^2+x|x|)$。

(3) 先求 $f[g(x)]$。

解不等式 $|g(x)|\leqslant 1$。由于

$$g(x)=\begin{cases}2-x^2, & |x|\leqslant 2;\\ 2, & |x|>2.\end{cases}$$

故不等式 $|g(x)|\leqslant 1$ 即

$$\begin{cases}|2-x^2|\leqslant 1,\\ |x|\leqslant 2.\end{cases}$$

即

$$\begin{cases}1\leqslant x^2\leqslant 3,\\ |x|\leqslant 2.\end{cases}$$

得不等式 $|g(x)|\leqslant 1$ 的解为 $1\leqslant|x|\leqslant\sqrt{3}$。

解不等式 $|g(x)|>1$。由于 $g(x)$ 定义在实数集 $\mathbf{R}$ 上，故 $|g(x)|>1$ 的解为 $|g(x)|\leqslant 1$ 的补集，即 $|x|<1$ 或 $|x|>\sqrt{3}$。

当 $1\leqslant|x|\leqslant\sqrt{3}$ 时，$|g(x)|\leqslant 1$，故 $f[g(x)]=1$。

当 $|x|<1$ 或 $|x|>\sqrt{3}$ 时，$|g(x)|>1$，故 $f[g(x)]=0$。

由上即得

$$f[g(x)]=\begin{cases}1, & 1\leqslant|x|\leqslant\sqrt{3};\\ 0, & |x|<1 \text{ 或 } |x|>\sqrt{3}.\end{cases}$$

再求 $g[f(x)]$。因 $|f(x)|\leqslant 2, x\in\mathbf{R}$，故

$$g[f(x)]=2-f^2(x)=\begin{cases}1, & |x|\leqslant 1;\\ 2, & |x|>1.\end{cases}$$

(4) 先求 $f[g(x)]$。当 $x<0$ 时，$|g(x)|<1$；$x=0$ 时，$|g(x)|=1$；$x>0$ 时，$|g(x)|>1$。故

$$f[g(x)]=\begin{cases}1, & x<0;\\ 0, & x=0;\\ -1, & x>0.\end{cases}$$

再求$g[f(x)]$。显然有

$$g[f(x)]=\begin{cases}\mathrm{e}, & |x|<1;\\ 1, & |x|=1;\\ \mathrm{e}^{-1}, & |x|>1.\end{cases}$$

10. 下列定义在实数域R上的函数$f(x)$，不满足$f[f(x)]=x$的是

(A) $f(x)=\begin{cases}-\dfrac{1}{x}, & x\neq 0;\\ 0, & x=0.\end{cases}$　　(B) $f(x)=\begin{cases}x, & x\leqslant 0;\\ 0, & x>0.\end{cases}$

(C) $f(x)=\begin{cases}2, & |x|\leqslant 1;\\ x, & |x|>1.\end{cases}$　　(D) $f(x)=\begin{cases}-x, & x\leqslant 0;\\ \dfrac{1}{x}, & x>0.\end{cases}$

［解］ 答案是(D)。仿照上题中求分段函数的复合函数的方法，逐一计算$f[f(x)]$即可得此结论。过程略。

［注］ 如果函数$f(x)$的定义域和值域相同，则有$f[f(x)]=x$等价于$f^{-1}=f$，等价于$f^{-1}(x)=f(x)$。这样的例子如本题(A)中的函数

$$f(x)=\begin{cases}-\dfrac{1}{x}, & x\neq 0;\\ 0, & x=0.\end{cases}$$

如果函数$f(x)$的定义域和值域不同，则$f[f(x)]=x$不等价于$f^{-1}=f$，$f^{-1}=f$也不等价于$f^{-1}(x)=f(x)$(这一结论参见本讲例题7)。如本例(B)中的函数

$$f(x)=\begin{cases}x, & x\leqslant 0;\\ 0, & x>0.\end{cases}$$

尽管其满足$f[f(x)]=x$，但因为定义域为实数集R，值域为非正数集，故有

$$f^{-1}(x)=\begin{cases}\text{所有非负数}, & x=0;\\ x, & x<0.\end{cases}$$

显然$f^{-1}\neq f$。

11. 下列函数无界的是

(A) $f(x)=\dfrac{2x}{1+x^2}$，$x\in\mathbf{R}$；　　(B) $f(x)=\dfrac{\ln x}{x}$，$x\in\left[\dfrac{1}{2}, 1\right]$；

(C) $f(x)=\dfrac{1}{x}\cos\dfrac{1}{x}$，$x\in(0,+\infty)$；　　(D) $f(x)=\dfrac{\sin x}{x}$，$x\in(0, 1)$。

［解］ 答案是(C)。分析如下：

(A) 因$-(x^2+1)\leqslant 2x\leqslant x^2+1$，即$|2x|\leqslant x^2+1$，有

$$\left|\frac{2x}{x^2+1}\right|\leqslant 1.$$

由此知$f(x)$在定义域R上有界。