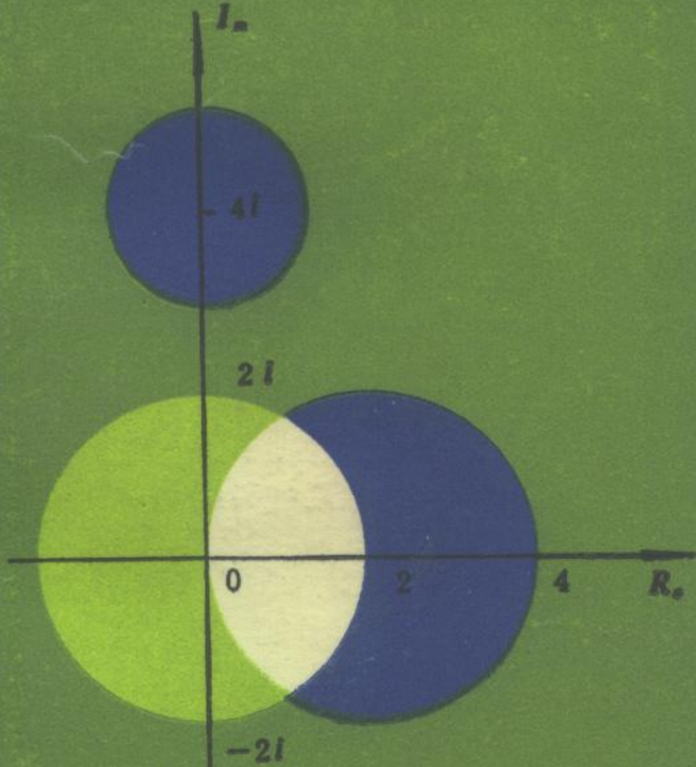
科硕士研究生系列教材

矩阵论

吴雄华　陈承东　钱仲范　编



同济大学出版社

工科硕士研究生系列教材

矩阵论

吴雄华　陈承东　钱仲范　编

同济大学出版社

（沪）新登字204号

内 容 提 要

本书是同济大学研究生院的工科硕士研究生系列教材之一，根据国家教委课程指导委员会制定的工科硕士研究生“矩阵论”课程教学基本要求编写而成，内容包括基础知识、矩阵的标准形、线性空间与线性变换、内积空间、矩阵分析、矩阵的广义逆和特征值的估计。各章都配有一定数量的习题，供学生巩固知识使用。

本书内容取舍得当，结构安排合理，既有数学的严格性和逻辑推理的严密性，又有工程技术中的实用性。可作工科高等院校各专业硕士研究生的教材，也可供工科院校师生和工程技术人员阅读参考。

责任编辑　李炳钊
封面设计　王肖生

工科硕士研究生系列教材
矩 阵 论
[illegible] 东 [illegible] 编
同济大学出版社出版
（上海四平路1239号）
新华书店上海发行所发行
常熟文化印刷厂印刷
开本：787×1092　1/32　印张：7.5　字数：180千字
1994年3月第1版　　1994年3月第1次印刷
印数：1—2000　　定价：3.80元
ISBN 7-5608-1316-X/O 117

序

研究生教育是我国高等教育的最高层次，如何培养符合社会需要的人才，除多方面的工作外，研究生教材是培养人才和传授知识的重要工具。因而应高度重视教材建设，要有计划地、逐步地为各个学科的主要课程编写、出版各种具有不同风格和特色、反映国内外科学技术先进水平的教材，是有利于不断提高教学质量、更好地为社会主义现代化建设服务的工作。

教材既是教学经验的总结，又是科学的著作，我校各系(院、所)的学科、专业委员会在培养研究生的过程中，在科研、课程建设、导师队伍建设、研究生教学管理等方面，积累了丰富的经验并取得了可喜的成果，为培养合格的研究生人才创造了良好的条件。

研究生课程，尤其是学位课程，是本专业学科最重要、最基本的课程，是研究生培养中的重要环节，在编写这些课程的教材时，应注意以下基本要求：应努力运用辩证唯物主义和历史唯物主义的观点阐述自然科学和技术科学的基本规律；应以本门课程在教学计划中的地位和作用为依据；应具有与本门学科发展相适应的科学水平，应贯彻理论与实际相结合的原则，以利于培养学生分析问题和解决问题的能力；应贯彻“少而精”的原则，要注意总结教学经验，体现循序渐进的原则，并应做到文字通顺、说理清楚，便于自学，避免繁琐。

研究生教材从编写到编辑、出版，都经过了认真的调查论

证，但毕竟水平和经验都感不足，缺点和错误在所难免，希望通过反复的实践，广泛地听取校内外专家学者和使用者的意见，使其不断改进和完善。

同济大学研究生院

1993.5

前　言

本书是同济大学研究生院的工科硕士研究生系列教材之一，是根据国家教委课程指导委员会指定的工科硕士研究生“矩阵论”课程教学基本要求编写的。矩阵的理论和方法已越来越广泛地被用于解决工程实际问题，因此，矩阵论是工科硕士研究生必备的基础知识。

编者多年来一直从事“矩阵论”课程的教学工作，因此，本书基本上是在多年使用的讲义的基础上编写而成的。编写时考虑到工科研究生原来虽毕业于全国各所不同的高校，但同济大学数学教研室编的工程数学《线性代数》在各高校中使用得比较普遍，故本书将该书内容作为预备知识，即假定读者已学过该书。

本书主要讲述大多数工科专业常用的矩阵基本理论和基本方法。其特点是内容清晰简明，通俗易懂，基本思想清楚，不拘泥于繁琐的理论推演。

全书共分七章，内容包括基础知识、矩阵的标准形、线性空间与线性变换、内积空间、矩阵分析、矩阵的广义逆和特征值的估计。各章配有一定数量的习题。教学时数约为50学时。

在本书编写过程中，承蒙邵嘉裕教授详细审阅了原稿，提出了许多中肯的修改意见，在此表示衷心的感谢。

编　者

1993年1月

符 号 表

$e_i=(0,\cdots,0,\overset{i}{1},0,\cdots,0)^T$	第i个单位向量
$\mathrm{rank}A$	矩阵A的秩
$\boldsymbol{R}^n$	n维实向量空间
$\boldsymbol{C}^n$	n维复向量空间
$\boldsymbol{A}^T$	矩阵A的转置
A^*	矩阵A的伴随矩阵
$A\cong B$	A与B等价
$A\sim B$	A与B相似
$\bar{A}^T$	矩阵A的共轭转置
$\mathrm{diag}[\lambda_1,\lambda_2,\cdots,\lambda_n]$	对角元为$\lambda_1,\lambda_2,\cdots,\lambda_n$的对角阵
$\mathrm{diag}[J_1,J_2,\cdots,J_s]=J_1\oplus J_2\oplus\cdots\oplus J_s$	准对角阵
$\boldsymbol{R}^{m\times n}$	$m\times n$阶实矩阵全体
$\boldsymbol{C}^{m\times n}$	$m\times n$阶复矩阵全体
$N(A)$	矩阵A的核空间
$R(A)$	矩阵A的像空间
$KerT$	线性变换T的核空间
$\mathrm{Im}T$	线性变换T的像空间
$\dim V$	线性空间V的维数
E	单位(恒等)矩阵
$\boldsymbol{I}$	恒等变换

$V_1 \oplus V_2$	子空间 V_1 与 V_2 的直和
V_λ	特征值 λ 的特征子空间
$D_i(\lambda)$	第 i 阶行列式因子
$d_i(\lambda)$	第 i 阶不变因子
$m_A(\lambda)$	方阵 A 的最小多项式
$T \leftarrow S$	向量组 T 可由向量组 S 线性表示
$T \longleftrightarrow S$	向量组 T, S 等价
$\langle \alpha_1, \alpha_2, \cdots, \alpha_s \rangle$	由向量 $\alpha_1, \alpha_2, \cdots, \alpha_s$ 张成的子空间
$\mathrm{tr}A$	方阵 A 的迹

目　　录

第一章 基 础 知 识

线性代数是学习矩阵论的主要基础，本章旨在帮助读者复习、整理已学的线性代数知识，并通过各种例题来深化基本概念，阐述主要定理的应用、提高学生解题的实际能力以利于以后几章的学习。本章仅讨论实矩阵。

1.1 矩 阵 运 算

在矩阵的基本运算中，矩阵的乘法，方阵求逆是重要的运算。矩阵的分块对运算的简化也起到重要的作用。

一、矩阵的乘法

对于矩阵A和B，如果有$AB=C$，首先要求A的列数等于B的行数，这时A乘以B才能进行。其次C的元素c_{ij}为A的第i行的元素与B的第j列对应元素乘积之和。亦即设$A=(a_{ij})$为$m\times s$阵，$B=(b_{ij})$为$s\times n$阵，则$C=(c_{ij})$为$m\times n$矩阵，并且有

$$c_{ij}=\sum_{k=1}^{s}a_{ik}b_{kj},\quad (i=1,\ 2,\ \cdots,\ m;\ j=1,\ 2,\ \cdots,\ n).$$

若C的m个行向量为γ_1，γ_2，$\cdots$，γ_m，B的s个行向量为β_1，β_2，$\cdots$，β_s，则有

$$C=\begin{bmatrix}\gamma_1\\ \gamma_2\\ \cdots\\ \gamma_m\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}a_{11}\cdots a_{1s}\\ a_{21}\cdots a_{2s}\\ \cdots\cdots\\ a_{m1}\cdots a_{ms}\end{bmatrix}\begin{bmatrix}\beta_1\\ \beta_2\\ \vdots\\ \beta_s\end{bmatrix},\qquad (1.1.1)$$

上式表明A与B的乘积矩阵C的行向量组可以由B的行向组线性表示。C的第i个行向量的表达式的组合系数为A的第i行的元素。

若C的n个列向量为$\delta_1, \delta_2, \cdots \delta_n$, A的s个列向量为$\alpha_1, \alpha_2, \cdots, \alpha_s$, 则有

$$C=[\delta_1, \delta_2, \cdots, \delta_n]=[\alpha_1, \alpha_2, \cdots, \alpha_s]\begin{bmatrix} b_{11} & \cdots & b_{1n} \\ b_{21} & \cdots & b_{2n} \\ \cdots & \cdots & \cdots \\ b_{s1} & \cdots & b_{sn} \end{bmatrix}, \quad (1.1.2)$$

上式表明C的列向量组也可以由A的列向量组线性表示。C的第j列向量的表达式中的组合系数为B的第j列的各个元素。

例如线性方程组$AX=b$可以改写成

$$x_1\alpha_1+x_2\alpha_2+\cdots+x_n\alpha_n=b.$$

其中　$A=[\alpha_1, \alpha_2, \cdots, \alpha_n]$, α_j是A的第j个列向量($j=1, 2, \cdots, n$)。

$X=[x_1, x_2, \cdots, x_n]^T$是$n$维列向量。

这样，非齐次线性方程组$AX=b$有解的充要条件可表达成：b可以表示成A的列向量组的线性组合。

下面是几个利用矩阵的乘法解题的例子。

例 1.1.1　设$n\geqslant 3$,

$$D_n=\begin{bmatrix} a_1x_1+b_1y_1 & \cdots & a_1x_n+b_1y_n \\ a_2x_1+b_2y_1 & \cdots & a_2x_n+b_2y_n \\ & \cdots\cdots & \\ a_nx_1+b_ny_1 & \cdots & a_nx_n+b_ny_n \end{bmatrix},$$

求$|D_n|$。

解 直接计算这一行列式的值是困难的，我们借助矩阵的乘法运算，将D分解为两个矩阵的乘积，得：

$$D_n=\begin{bmatrix} a_1 & b_1 & 0\cdots 0 \\ a_2 & b_2 & 0\cdots 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots \quad \vdots \\ a_n & b_n & 0\cdots 0 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} x_1 & x_2\cdots x_n \\ y_1 & y_2\cdots y_n \\ 0 & 0\cdots 0 \\ \vdots & \vdots \quad \vdots \\ 0 & 0\cdots 0 \end{bmatrix},$$

由两个n阶方阵乘积的行列式等于各个方阵取行列式的乘积的性质得

$$|D_n|=0.$$

例 1.1.2 设

$$D_n=\begin{bmatrix} n & \sum_{i=1}^{n}x_i & \cdots & \sum_{i=1}^{n}x_i^{n-1} \\ \sum_{i=1}^{n}x_i & \sum_{i=1}^{n}x_i^2 & \cdots & \sum_{i=1}^{n}x_i^n \\ & \cdots\cdots & & \\ \sum_{i=1}^{n}x_i^{n-1} & \sum_{i=1}^{n}x_i^n & \cdots & \sum_{i=1}^{n}x_i^{2(n-1)} \end{bmatrix},$$

其中$x_i(i=1, 2, \cdots, n)$两两不等，求$|D_n|$.

解 同上题一样，将D_n分解成两个矩阵的乘积

$$D_n=\begin{bmatrix} 1 & 1 & \cdots & 1 \\ x_1 & x_2 & \cdots & x_n \\ \cdots\cdots & & & \\ x_1^{n-1} & x_2^{n-1} & \cdots & x_n^{n-1} \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 1 & x_1 & \cdots & x_1^{n-1} \\ 1 & x_2 & \cdots & x_2^{n-1} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ 1 & x_n & \cdots & x_n^{n-1} \end{bmatrix}$$

上面右式是两个范德蒙矩阵V_n与V_n^T的乘积，且

$$|V_n|=|V_n^T|=\prod_{1<i<j<n}(x_i-x_j)$$

所以

$$|D_n| = |V_n|^2 = [\prod_{1\leqslant i<j\leqslant n}(x_i - x_j)]^2.$$

例 1.1.3 设

$$D = \begin{bmatrix} a & b & c & d \\ -b & a & -d & c \\ -c & d & a & -b \\ -d & -c & b & a \end{bmatrix},$$

求 $|D|$。

解 直接计算这一行列式是麻烦的，我们找一个矩阵 B 与 D 相乘，使乘积矩阵的行列式容易计算，且 $|B|$ 也易于计算。令 $B = D^T$，则有

$$DD^T = \begin{bmatrix} a & b & c & d \\ -b & a & -d & c \\ -c & d & a & -b \\ -d & -c & b & a \end{bmatrix}\begin{bmatrix} a & -b & -c & -d \\ b & a & d & -c \\ c & -d & a & b \\ d & c & -b & a \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} a^2+b^2+c^2+d^2 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & a^2+b^2+c^2+d^2 & & \\ 0 & 0 & a^2+b^2+c^2+d^2 & \\ 0 & 0 & 0 & a^2+b^2+c^2+d^2 \end{bmatrix},$$

两边取行列式得

$$|D|^2 = (a^2+b^2+c^2+d^2)^4,$$

因而有

$$|D| = \pm(a^2+b^2+c^2+d^2)^2.$$

为了确定 $|D|$ 的符号，取 $a=1$，$b=c=d=0$，则 $D=1$。所以有

$$|D| = (a^2+b^2+c^2+d^2)^2.$$

例 1.1.4 设

$$A=\begin{bmatrix} a_0 & a_1 & a_2 \\ a_2 & a_0 & a_1 \\ a_1 & a_2 & a_0 \end{bmatrix}.$$

求证：$|A|=f(1)f(\omega)f(\omega^2)$，其中 $f(x)=a_0+a_1x+a_2x^2$，ω 为 1 的单位立方根，即 $\omega=e^{\frac{2\pi i}{3}}$.

证明 作方阵

$$B=\begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & \omega & \omega^2 \\ 1 & \omega^2 & \omega^4 \end{bmatrix},$$

则有

$$AB=\begin{bmatrix} a_0 & a_1 & a_2 \\ a_2 & a_0 & a_1 \\ a_1 & a_2 & a_0 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & \omega & \omega^2 \\ 1 & \omega^2 & \omega^4 \end{bmatrix}$$

$$=\begin{bmatrix} a_0+a_1+a_2 & a_0+a_1\omega+a_2\omega^2 & a_0+a_1\omega^2+a_2\omega^4 \\ a_2+a_0+a_1 & \omega(a_0+a_1\omega+a_2\omega^2) & \omega^2(a_0+a_1\omega^2+a_2\omega^4) \\ a_1+a_2+a_0 & \omega^2(a_0+a_1\omega+a_2\omega^2) & \omega^4(a_0+a_1\omega^2+a_2\omega^4) \end{bmatrix}.$$

两边取行列式得

$$|A||B|=\begin{bmatrix} f(1) & f(\omega) & f(\omega^2) \\ f(1) & \omega f(\omega) & \omega^2 f(\omega^2) \\ f(1) & \omega^2 f(\omega) & \omega^4 f(\omega^2) \end{bmatrix}$$

$$=f(1)f(\omega)f(\omega^2)\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & \omega & \omega^2 \\ 1 & \omega^2 & \omega^4 \end{vmatrix}$$

$$=f(1)f(\omega)f(\omega^2)|B|.$$

然而 $|B|$ 为范德蒙行列式，且 1, ω, ω^2 为两两不同的数，所以 $|B|\neq 0$，从而

$$|A| = f(1)f(\omega)f(\omega^2).$$

对于 n 阶轮回方阵

$$A = \begin{bmatrix} a_0 & a_1 & \cdots & a_{n-2} & a_{n-1} \\ a_{n-1} & a_0 & \cdots & a_{n-3} & a_{n-2} \\ \cdots\cdots & & & & \\ a_1 & a_2 & \cdots & a_{n-1} & a_0 \end{bmatrix}$$

要直接计算这个方阵的行列式是很困难的，我们可以采用例1.1.4的方法，作一个 n 阶范德蒙方阵

$$B = \begin{bmatrix} 1 & 1 & \cdots & 1 \\ 1 & \omega & \cdots & \omega^{n-1} \\ 1 & \omega^2 & \cdots & \omega^{2(n-1)} \\ \cdots\cdots & & & \\ 1 & \omega^{n-1} & \cdots & \omega^{(n-1)^2} \end{bmatrix}, \quad \omega = e^{\frac{2\pi i}{n}},$$

则有

$$AB = \begin{bmatrix} \sum_{i=0}^{n-1} a_i & \sum_{i=0}^{n-1} a_i\omega^i & \cdots & \sum_{i=0}^{n-1} a_i\omega^{i(n-1)} \\ \sum_{i=0}^{n-1} a_i & \omega\sum_{i=1}^{n-1} a_i\omega^i & \cdots & \omega^{n-1}\sum_{i=0}^{n-1} a_i\omega^{i(n-1)} \\ \cdots\cdots & & & \\ \sum_{i=0}^{n-1} a_i & \omega^{n-1}\sum_{i=0}^{n-1} a_i\omega^i & \cdots & \omega^{(n-1)^2}\sum_{i=0}^{n-1} a_i\omega^{i(n-1)} \end{bmatrix}.$$

令

$$f(x) = a_0 + a_1x + \cdots + a_{n-1}x^{n-1},$$

则

$$|A||B| = \begin{vmatrix} f(1) & f(\omega) & \cdots & f(\omega^{n-1}) \\ f(1) & \omega f(\omega) & \cdots & \omega^{n-1}f(\omega^{n-1}) \\ \cdots\cdots & & & \\ f(1) & \omega^{n-1}f(\omega) & \cdots & \omega^{(n-1)^2}f(\omega^{n-1}) \end{vmatrix}$$