电磁理论导引

方能航 著

科学出版社

1986

内 容 简 介

本书对电磁理论中一些非常重要但却不易理解的概念、方法作了深入浅出的探讨.

全书共六章，内容包括：▽算子理论；磁流、磁荷的概念及其应用；唯一性定理的各种形式；近似边界条件；电磁位的各种形式；由已知场源求辐射场的各种方法和公式；口径场的各种模型等. 附录中还介绍了▽算子在并矢微积中的应用和单位换算方法，并附有详细的单位换算表.

全书论证严格、推导详细，可供天线、微波、电波传播、电真空器件等方面的科技人员、大学生、研究生和大专院校教师自学、参考.

电 磁 理 论 导 引

方 能 航 著

责任编辑 刘兴民 张兆富

科 学 出 版 社 出 版

北京朝阳门内大街137号

中国科学院印刷厂印刷

新华书店北京发行所发行 各地新华书店经售

*

1986年1月第 一 版 开本：787×1092 1/32

1986年1月第一次印刷 印张：14 1/4

印数：0001—3,600 字数：319,000

统一书号：15031·691

本社书号：4399·15—7

定价： 3.35 元

序

人类在物质文明发展进程中，逐渐掌握了电磁波这样一种极为有用的信息运载工具. 今天，在地球上以至广阔无限的宇宙内，已充满了人类发送的各种各样电磁波：从波长很长的波直到波长极短的用激光器件发送的波. 在如此宽阔的波段内，通信、导航、雷达、测量仪器甚至医疗设备中，最常用的是波长在三十厘米以下至毫米波这样一段泛称为微波的波段. 微波的产生、传输、定向辐射和传播问题，早在十九世纪下半叶已经开始研究了. 近五十多年来，微波技术获得了迅速的发展，今天正在以更稳健的步伐向更高的高峰攀登.

我国要于本世纪末在微波领域内达到当时国际上的先进水平，必须在微波理论、微波技术和先进的实用微波设备的研制等三个方面进行深入、系统的研究工作. 这首先就得在培养一大批能胜任这些工作的科技人才上下功夫. 看来，当务之急就是要使现在的中、青年科技人员牢牢地掌握为顺利开展今后科研工作所必需具备的基础理论.

电磁场理论固然早在百年之前就有了，但这种理论在实用方面的深化，不过是近三、四十年来在飞速发展的微波技术的推动下才越来越明显的，而深化了的理论又进一步促进了微波技术的发展. 本书是作者根据这些深化了的理论而写就的一本便于科技人员自学用的有关电磁场理论的书籍. 同时，作者还以本书的内容在电子工业部南京电子技术研究所和中国科技大学微波专业研究生班多次讲授过.

犹忆三十年代末我在大学念书时曾听老师讲过▽算子运

算法，但因当时讲得很简单，所以有些运算规则是知其然却不知其所以然，故不易掌握和运用. 本书将∇算子作为一种有力的工具，在通过严格论证让读者建立起明确的概念之后，再用它来进行计算，从而大大地简化了得用许多复杂烦琐的数学推导才能获得所需重要公式的推导过程，使读者领会到∇算子运算法的妙用. 再如麦克斯韦方程组，尽管三十年代末大学里也讲，但讲的只是最基础的形式，而随着微波技术的发展，人们现在对它的理解深入得多了. 本书对广义麦克斯韦方程组的论证和说明下了很大功夫，目的在于使读者能真正掌握和应用好这一电磁场理论中的很重要的内容. 总之，为了便于读者自学和进一步深造起见，为了使读者能融会贯通地掌握电磁场理论，本书对电磁场理论中的一些基本原理和公式作了必要的推导，对一些非常重要但却不易理解的难题作了深入浅出的探讨. 我认为，出版这样一本书是很有必要的，除了上述好处外，它至少还能帮助读者迅速掌握散见于各种杂志内的专题性电磁场文献资料的内容.

张直中

1983 年 8 月 25 日于南京

作　者　序

电子技术尤其是微波和天线技术的发展，要求越来越多的人深入地掌握它们的理论基础——电磁场理论．目前已经出版的有关电磁场理论的中外文书籍不下百种． 从内容来说，电磁场理论已基本定型．然而，国内外仍然不断有新书出版． 它们除在个别地方增加了一些新内容之外，大部分内容与原有书籍的内容是大同小异的． 另一方面，因为篇幅的限制，在既要回顾基本原理又要增加新内容情况下，作者不得不对一些基本原理采取高度浓缩的办法，于是一些关键问题往往未讲清楚，使人难以理解．以在微波和天线技术中广泛应用的等效定理为例，新出版的书中多半只是列举一下结果而已，对于如磁流、磁荷和磁流麦克斯韦方程组等有关的基本概念很少加以说明，更谈不上给出详细和严格的证明了．这样，读者就很难正确和熟练掌握这种能有效地分析电磁场问题的方法．

由此可见，当前除了继续适当地出版一些载有新内容和新结果的电磁场理论书籍之外，更重要的是帮助读者迅速掌握大量现有书籍和文献资料的内容，以充分发挥它们的作用．编写本书的主要目的也就在于此． 具体地说，即对天线和微波专业的广大工程技术人员以及高等院校的有关师生，在阅读和自学电磁场理论书刊过程中，经常碰到的一些较难的基础性问题加以详细的分析和论述，以便读者能用最短的时间去掌握它们的内容，查阅所需的有关公式，从而提高工作能力和教学效果．

学习电磁场理论碰到的第一个问题就是单位制问题. 近年来出版的一些书籍基本上只采用两种单位制，即高斯单位制和有理化千克-米-秒-库仑单位制，因此学会这两种单位制的换算方法是头等重要的. 但是，在早年的一些经典书籍中还应用过诸如赫维赛-洛伦兹等单位制. 为了便于学习经典著作和应用经典著作的成果，对于这样的单位制，我们也应当有所了解. 从实用的观点看，单位制问题主要是单位的换算问题. 解决这个问题并不难，只要有一套比较详细的换算表格就行了. 可是，一般书中所缺的正是这样一套表格. 本书列出了读者可能会遇到的各种单位制的换算表，以便圆满解决换算问题. 为了方便读者起见，本书还推导了各种量的换算公式，供读者在自行计算少数表中没有列出的物理量换算系数时参考. 考虑到问题的初等性质，这一部分内容放在附录 III 中备查.

第二个问题是数学工具问题. 大多数读者可能都学过矢量场论和数理方程，但是对于一般电磁场理论中用得最多的 ∇ 算子的运算法，在电磁场理论书籍(甚至数学书籍)中却难以见到详细和严格的论证，从而妨碍了 ∇ 算子运算法的广泛应用. 一般书中通常都将 ∇ 算子定义为下列符号矢量:

$$\nabla = \mathbf{u}_x \frac{\partial}{\partial x} + \mathbf{u}_y \frac{\partial}{\partial y} + \mathbf{u}_z \frac{\partial}{\partial z}$$

式中 $\mathbf{u}_x$、$\mathbf{u}_y$ 和 $\mathbf{u}_z$ 为沿直角座标系中 x、y、z 轴的三个单位矢量. 接着对 ∇ 算子在形式上进行矢量代数运算，并规定 $\frac{\partial}{\partial x}$ 等符号与函数的结合表示对此函数的微分. 这样，就可得到

$$\nabla \varphi = \mathbf{u}_x \frac{\partial}{\partial x} \varphi + \varphi_y \frac{\partial}{\partial y} \varphi + \mathbf{u}_z \frac{\partial}{\partial z} \varphi = \mathrm{grad}\varphi$$

$$\nabla \cdot \mathbf{A} = \frac{\partial}{\partial x} A_x + \frac{\partial}{\partial y} A_y + \frac{\partial}{\partial z} A_z = \mathrm{div}\mathbf{A}$$

$$\nabla \times \mathbf{A} = \begin{vmatrix} \mathbf{u}_x & \mathbf{u}_y & \mathbf{u}_z \\ \dfrac{\partial}{\partial x} & \dfrac{\partial}{\partial y} & \dfrac{\partial}{\partial z} \\ A_x & A_y & A_z \end{vmatrix} = \mathrm{rot}\mathbf{A}$$

等公式．对于用▽算子来表示 $\mathrm{grad}\varphi$、$\mathrm{div}\mathbf{A}$、$\mathrm{rot}\mathbf{A}$ 等函数而言，那是无可非议的． 但是问题的关键不在于用▽算子来表示某些矢量或标量函数，而在于用▽算子表示之后，对所得到的含有▽算子的表达式，可以把▽算子看作像普通矢量一样进行矢量代数运算．这一点必须进行严格的证明．只有在一整套▽算子的运算规则得到严格证明之后，才可能把▽算子作为极其简便的数学工具来应用，并保证所得结果始终正确．一般书中所缺少的正是对▽算子运算法的证明．本书在苏联数学家希洛夫（Шилов, Г.Е.）的思路上加以完善和补充，对▽算子运算法给出了完整的理论和许多运算实例．这一部分构成了第一章内容．它有助于读者掌握许多书中含糊不清的推导过程，因此，对于任何学习电磁场理论的同志来说，这一章都是有一定参考价值的．

在掌握了用来计算矢量或标量函数的▽算子的运算法之后，下面将会碰到的困难可能是磁流、磁荷的概念和广义麦克斯韦方程组问题．很多书籍，尤其是天线理论方面的书籍，往往一开始就把含有磁流、磁荷的广义麦克斯韦方程组作为分析的出发点．固然，从数学上来说，在所分析的结果中令磁流、磁荷等于零，就可以得到有关麦克斯韦方程组的结果，而广义麦克斯韦方程组则具有麦克斯韦方程组不完全具备的数学上的对称性． 但是，光获得数学上的对称性还不足以是引入磁流、磁荷概念的令人信服的理由． 只有通过对偶原理和等效原理的研究，才能正确和深刻地理解引入磁流、磁荷的意义．一般书籍由于未对磁流、磁荷下明确的定义，没有充分阐

明磁流麦克斯韦方程组概念，因而与此相关的一系列问题就很难表达清楚．本书首先把磁流、磁荷作为数学函数来对待，然后引入磁流麦克斯韦方程组概念． 在这个基础上，广义麦克斯韦方程组可以看成是一般麦克斯韦方程组和磁流麦克斯韦方程组在 $\varepsilon = \varepsilon_m$、$\mu = \mu_m$ 特殊条件下的和，而对偶原理所表达的正是麦克斯韦方程组解和磁流麦克斯韦方程组解之间的关系． 在证明了对偶原理和一般等效定理之后，就能理解磁流、磁荷概念的物理意义，并进一步研究广义麦克斯韦方程组的实际意义． 不难看出，适当地选择广义麦克斯韦方程组中的面电流源和面磁流源，就可以使广义麦克斯韦方程组的解在空间的两个不同区域内与两个相互独立的麦克斯韦方程组的解等效． 通过对两组麦克斯韦方程组的解的选择，例如将一组解选为零，就能获得各种等效定理． 感应定理是一般等效定理在特殊情况下的一种应用．以一般等效定理为出发点来证明感应定理更容易为读者所接受．以上所述为第二章的主要内容． 在第二章的结尾部分，我们还对在裂缝天线理论中广泛应用的巴比内特（Babinet）原理给出了详细的证明．

在第三章中，对麦克斯韦方程组的一般性质进行了探讨．本章的内容具有辅助特性，主要是为以后各章作准备的． 这一章的重点是唯一性定理和非理想导体上的边界条件．这两个问题在一般电磁场理论书籍中讲得都比较简短，不容易彻底掌握．由于唯一性定理是保证用不同方法来求解麦克斯韦方程组时都能得到同样结果的依据，因此其重要性是显而易见的． 本书分一般时变电磁场和正弦电磁场两种情况，对此作了比较深入的分析，给出了唯一性的充分和必要条件． 另外，还对一般书上很少提到的齐次边界条件下的唯一性问题专门进行了研究．应该指出，麦克斯韦方程组解的唯一性指的

是满足一定条件的解只有一个，而决不是说麦克斯韦方程组本身(不考虑附加条件)只有一组解. 在这一章中还对坡印廷矢量 $\mathbf{E}\times\mathbf{H}$ 的物理意义作了探讨，指出只有在交变电磁场或由恒定电流形成的恒磁场条件下才可能把坡印廷矢量理解为通过单位面积的辐射功率，而在同时存在静电和静磁场的情况下，就没有根据认为 $\mathbf{E}\times\mathbf{H}$ 仍然表示通过单位面积的功率. 我们还对复坡印廷矢量的物理意义作了澄清，指出其虚部并没有明确的物理意义，辐射功率的交变分量应该用另外的公式来表达.

从第四章开始，我们对麦克斯韦方程组或广义麦克斯韦方程组的具体求解法进行了系统的探讨. 首先讨论了电磁位问题. 在一般书籍中，电磁位是作为一种表示麦克斯韦方程组解的辅助函数而引入的. 所得微分方程或表达式都是电磁位应当满足的必要条件，而对于这些条件的充分性却很少涉及. 本书在假定读者对一般书中的论述已基本了解的前提下，着重从充分性方面来考虑问题. 首先给出明确的电磁位表达式或所满足的微分方程以及通过电磁位计算场强的计算公式，然后直接证明这样算出来的场满足麦克斯韦方程组. 对于电磁位所应满足的各种规范条件也分别直接作了证明. 这样论证电磁位问题，从数学角度而言，看来更加清楚和严格. 不足之处在于读者可能会对电磁位公式是从哪里来的提出疑问. 好在对这个问题一般书籍都有论述，因此本书就不再重复了. 本章还根据对偶原理讨论了磁流麦克斯韦方程组的电磁位和广义麦克斯韦方程组的电磁位问题. 另外，为严格论证起见，又补充了一些必要的数学知识.

第五章讨论根据已知场源求辐射场的问题. 实际上这是第四章所讨论问题的继续，即如何求解麦克斯韦方程组或广义麦克斯韦方程组的问题. 这一章的中心内容是用各种方法

详细推导著名的斯特拉顿-朱（Stratton-Chu）公式，以便读者学会不同的求解方法．一般书籍中的标准方法是用矢量格林定理求解，其实采用矢量-标量格林定理可以更快地求出结果．利用洛伦兹引理求解是比较古老的方法，推导过程也较繁复，但它在现有文献中还经常出现，所以本书对此也作了详细的介绍．最简便的方法是利用等效定理和电磁位公式，这样可以在几乎不用推导的情况下直接写出结果．在本章的推导过程中读者将看到∇算子运算法所起的关键作用．如果不用∇算子而想完成推导过程，那么就不得不引用许多现成的公式，结果将使整个推导变得既不自然又难以掌握．在这一章中还利用斯特拉顿-朱公式推导了交变电磁场中的镜象原理，并对有关无限区域内场的情况作了较精确的分析．

最后一章讨论口径场的不同模型．过去，国外曾经对因为使用了不同模型而得到不同结果的问题有过争论，但由于发表的文章过分简单，推导也不系统，所以问题不易掌握．我们用同一种方法系统地处理三种模型，使读者能对这个问题有较为透彻的了解．

著者对本书的编写是以自修者作为主要对象的，因此推导过程要比一般书中的详细得多，从而可以省得自修者花费大量时间去推导或频于求人，甚至由于消化不良而卡住．这样做对于从事微波和天线技术研究的同志以及高等院校的有关师生来说也提供了方便．著者深信，读者在掌握了本书的内容之后，就可以自己直接从其他书籍中更快地去掌握其他所需要的内容．

这本书最好能与一本比较详尽论述电磁场理论的书同时学习，这样可以起到相互促进和补充的作用．

本书的基本内容著者曾在1979—1980年对南京电子技术研究所的研究生讲授过，1982年和1983年，又在中国科

技大学微波专业研究生班讲过两次。根据听课同志的意见，这次又对讲稿进行了修改和补充。但是，由于著者编写这类书籍纯属初次尝试，加上才疏学浅，因此缺点和错误之处在所难免，敬请读者批评指正。

在本书的编写过程中，著者得到了南京电子技术研究所张直中总工程师的支持和鼓励。西北电讯工程学院茅于宽教授、中国科技大学钱景仁副教授、长沙国防科技大学张钧副教授，中国电子学会天线专业学会副主任钟吉生高级工程师等对本书的内容和编写方式提出了许多宝贵意见。南京电子技术研究所黄燕鸣研究生和丁燮华工程师详细地阅读了本书的初稿，从内容到文字都提出了许多修改意见。上述大部分意见在修改初稿时均已采纳。著者在此向以上同志表示衷心的感谢。

方能航

1983 年 8 月于南京

目　　录

第一章　∇算子运算法和某些积分关系式…………………… 1
1.1　含有∇算子的式子的定义 ………………………………… 4
1.2　$(\mathbf{a}\cdot\nabla)\mathbf{b}$ 的意义 ………………………………………… 8
1.3　$T(\nabla)$的性质 ………………………………………………… 10
1.4　正确应用∇算子进行运算的例子 ………………………… 18
1.5　辅助公式 ……………………………………………………… 21
1.6　运算举例 ……………………………………………………… 26
1.7　积分关系式 …………………………………………………… 34
1.8　二重∇算子的定义 ………………………………………… 39
1.9　$T(\nabla,\nabla)$的性质………………………………………… 42
1.10　二重∇算子的运算例题 ………………………………… 44
1.11　格林积分定理 ……………………………………………… 50
1.12　复矢量代数 ………………………………………………… 56
1.13　两种特殊情况的定义 ……………………………………… 60
1.14　复矢量的微积分 …………………………………………… 61
1.15　麦克斯韦方程组的复数形式 ……………………………… 65
第二章　磁流和磁荷的概念及其应用…………………………… 69
2.1　磁流和磁荷的定义 …………………………………………… 70
2.2　磁流麦克斯韦方程组的解法．对偶原理 …………………… 74
2.3　磁流麦克斯韦方程组解的物理意义 ………………………… 76
2.4　广义麦克斯韦方程组解的物理意义．一般等效定理 ……… 81
2.5　一般等效定理的两种特殊情况 ……………………………… 93
2.6　一般等效定理的推广 ………………………………………… 96
2.7　场源为周期性函数时等效定理的推广 ……………………… 97
2.8　电流源和磁流源在同一位置时的等效问题 ………………… 103

2.9 只利用面电流或面磁流的等效定理 …………………… 112
2.10 感应定理 ………………………………………… 117
2.11 应用感应定理的例子 ……………………………… 121
2.12 波导中的等效定理 ………………………………… 124
2.13 巴比内特原理 …………………………………… 128
第三章 麦克斯韦方程组的一般性质……………………… 137
3.1 麦克斯韦方程组及其边界条件 ……………………… 137
3.2 坡印廷定理 ………………………………………… 140
3.3 电磁场中的二次关系式 …………………………… 143
3.4 广义麦克斯韦方程组情况下的推广 ………………… 146
3.5 唯一性定理 ………………………………………… 150
3.6 唯一性定理的另一形式 …………………………… 154
3.7 周期性电磁场的唯一性定理 ……………………… 158
3.8 无限区域内的唯一性定理 ………………………… 160
3.9 周期性电磁场唯一性定理的另一证明 ……………… 162
3.10 **E** 和 **H** 所满足的方程 ………………………… 168
3.11 复坡印廷矢量的两种定义 ………………………… 173
3.12 非理想导体边界上的近似边界条件 ……………… 176
3.13 近似边界条件的适用范围 ………………………… 187
第四章 电磁位………………………………………… 193
4.1 电磁位的普遍定义 ………………………………… 193
4.2 几种电磁位 ………………………………………… 197
4.3 对应于复数麦克斯韦方程组的复电磁位 …………… 207
4.4 关于复电磁位的几个结果 ………………………… 210
4.5 磁流麦克斯韦方程组的电磁位 …………………… 219
4.6 广义麦克斯韦方程组的电磁位 …………………… 222
4.7 电偶极子的场 ……………………………………… 225
4.8 磁偶极子的场 ……………………………………… 231
4.9 小电流环的场 ……………………………………… 232
4.10 在积分号下微分的定理 …………………………… 236

4.11 波动方程解的证明 …… 242
4.12 泊松方程解的证明 …… 248
4.13 对滞后矢量位与滞后标量位关系的证明 …… 253
第五章 由已知场源求辐射场的公式 …… 263
5.1 用矢量格林定理求解 …… 263
5.2 非封闭曲面情况下的近似处理方法 …… 271
5.3 辐射场公式的另一形式 …… 282
5.4 用矢量-标量格林公式求解 …… 286
5.5 用洛伦兹引理求解 …… 289
5.6 辐射场公式的又一形式——弗朗兹公式 …… 300
5.7 标量克希霍夫公式 …… 306
5.8 用等效原理和电磁位求解 …… 308
5.9 无限区域的情况 …… 314
5.10 单由电流、磁流表示的场强公式 …… 317
5.11 远区场的结构 …… 319
5.12 镜象原理 …… 325
第六章 口径场的三种模型和方向图公式 …… 333
6.1 口径场的三种模型 …… 333
6.2 方向图公式 …… 334
6.3 不同口径场模式的方向图公式的比较 …… 345
结束语 …… 347
参考文献 …… 349
附录 I 单位制的换算和麦克斯韦方程组在不同单位制中的形式 …… 350
I.1 电磁单位制中的四个基本单位 …… 351
I.2 单位制换算的关键和基本规则 …… 352
I.3 电磁学中的物理量单位换算比的定义 …… 355
I.4 常用电磁量的单位换算比 …… 358
I.5 有理化单位制 …… 364
I.6 麦克斯韦方程组在不同单位制中的形式 …… 366

I.7 公式和数值换算举例 …………………………………… 373
附录 II 并矢微积中的▽算子 …………………………… 377
II.1 T(▽)的定义 …………………………………… 377
II.2 T(▽)的性质 …………………………………… 387
II.3 运算举例 ……………………………………… 389
II.4 T(▽, ▽)的定义和性质 ………………………… 397
II.5 对 T(▽, ▽)的运算举例 ………………………… 398
II.6 积分关系式 …………………………………… 400
II.7 圆柱坐标系中 grad$a$、div$\overleftrightarrow{A}$、rot$\overleftrightarrow{A}$ 及 $\nabla^2\overleftrightarrow{A}$ 的表达式 … 406
II.8 球坐标系中 grad$a$、div$\overleftrightarrow{A}$、rot$\overleftrightarrow{A}$ 及 $\nabla^2\overleftrightarrow{A}$ 的表达式……… 412
II.9 几个基本定义与某些并矢恒等式 ……………… 418
附录 III 各种单位制之间的换算表 ……………………… 421
表 III.1 高斯厘米-克-秒制至米-千克-秒制换算表 ……… 421
表 III.2 米-千克-秒制至高斯厘米-克-秒制换算表 ……… 422
表 III.3 静电厘米-克-秒制至米-千克-秒制换算表 ……… 424
表 III.4 电磁厘米-克-秒制至米-千克-秒制换算表 ……… 425
表 III.5 实用厘米-克-秒制至米-千克-秒制换算表 ……… 426
表 III.6 米-千克-秒制至静电厘米-克-秒制换算表 ……… 428
表 III.7 米-千克-秒制至电磁厘米-克-秒制换算表 ……… 429
表 III.8 米-千克-秒制至实用厘米-克-秒制换算表 ……… 430
表 III.9 赫维赛厘米-克-秒制至米-千克-秒制换算表 …… 432
表 III.10 米-千克-秒制至赫维赛厘米-克-秒制换算表 …… 433
表 III.11 Mie 厘米-克-秒制至米-千克-秒制换算表 ……… 435
表 III.12 米-千克-秒制至 Mie 厘米-克-秒制换算表 ……… 436
表 III.13 物理量换算比公式汇集 ……………………… 437

第一章　∇算子运算法和某些积分关系式

研究电磁场的基本出发点是麦克斯韦方程组。麦克斯韦方程组中有旋度、散度、梯度等矢量函数，因此，在对麦克斯韦方程组进行数学运算时必然会碰到运算上述矢量函数的数学问题。本章先介绍一种运算矢量函数的数学方法——∇算子运算法，作为以后各章中的数学运算工具。

∇算子运算法的优点在于可以把对矢量函数的微分运算转变成矢量代数运算，从而明显地简化运算过程，而且由于代数运算规则的数目是有限的，因此通过∇算子运算法还可以得到矢量恒等式所有可能的形式。通常，在数学手册中都会列出一些重要或常用的矢量函数恒等式，然后用证明两边分量相等的方法来证明它们；这样做虽然没有什么不对的地方，可是这种做法不能告诉人们这些恒等式是怎样推导出来的，它们还有没有其他表示形式，而且其证明过程也相当繁复。用∇算子运算法可以很自然和清楚地看出各种恒等式是怎样得到的以及有几种可能的形式，而且证明过程一般是比较简单的。

通常，∇算子定义为一个"符号"矢量，即从形式上定义为

$$\nabla=\mathbf{u}_x\frac{\partial}{\partial x}+\mathbf{u}_y\frac{\partial}{\partial y}+\mathbf{u}_z\frac{\partial}{\partial z}$$

式中 $\mathbf{u}_x$、$\mathbf{u}_y$、$\mathbf{u}_z$ 为直角坐标系中沿 x、y 和 z 轴的三个单位矢量。

然后规定，可以把∇的各个分量看成普通矢量的分量(数

8610476

量)一样进行形式上的运算,而 $\frac{\partial}{\partial x}$ 和函数 φ 的乘积则理解为对 φ 的偏微分,即 $\frac{\partial\varphi}{\partial x}$.

根据这样的定义和规定,有

$$\begin{aligned}
\nabla\varphi &= \left(\mathbf{u}_x\frac{\partial}{\partial x}+\mathbf{u}_y\frac{\partial}{\partial y}+\mathbf{u}_z\frac{\partial}{\partial z}\right)\varphi \\
&= \mathbf{u}_x\frac{\partial}{\partial x}\varphi+\mathbf{u}_y\frac{\partial}{\partial y}\varphi+\mathbf{u}_z\frac{\partial}{\partial z}\varphi \\
&= \mathbf{u}_x\frac{\partial\varphi}{\partial x}+\mathbf{u}_y\frac{\partial\varphi}{\partial y}+\mathbf{u}_z\frac{\partial\varphi}{\partial z} \\
&= \mathrm{grad}\varphi
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\nabla\cdot\mathbf{R} &= \left(\mathbf{u}_x\frac{\partial}{\partial x}+\mathbf{u}_y\frac{\partial}{\partial y}+\mathbf{u}_z\frac{\partial}{\partial z}\right) \\
&\quad\cdot(\mathbf{u}_xR_x+\mathbf{u}_yR_y+\mathbf{u}_zR_z) \\
&= \frac{\partial}{\partial x}R_x+\frac{\partial}{\partial y}R_y+\frac{\partial}{\partial z}R_z \\
&= \frac{\partial R_x}{\partial x}+\frac{\partial R_y}{\partial y}+\frac{\partial R_z}{\partial z} \\
&= \mathrm{div}\mathbf{R}
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\nabla\times\mathbf{R} &= \left(\mathbf{u}_x\frac{\partial}{\partial x}+\mathbf{u}_y\frac{\partial}{\partial y}+\mathbf{u}_z\frac{\partial}{\partial z}\right) \\
&\quad\times(\mathbf{u}_xR_x+\mathbf{u}_yR_y+\mathbf{u}_zR_z) \\
&= \mathbf{u}_z\frac{\partial}{\partial x}R_y-\mathbf{u}_y\frac{\partial}{\partial x}R_z-\mathbf{u}_z\frac{\partial}{\partial y}R_x \\
&\quad+\mathbf{u}_x\frac{\partial}{\partial y}R_z+\mathbf{u}_y\frac{\partial}{\partial z}R_x-\mathbf{u}_x\frac{\partial}{\partial z}R_y \\
&= \mathbf{u}_x\left(\frac{\partial R_z}{\partial y}-\frac{\partial R_y}{\partial z}\right)+\mathbf{u}_y\left(\frac{\partial R_x}{\partial z}-\frac{\partial R_z}{\partial x}\right) \\
&\quad+\mathbf{u}_z\left(\frac{\partial R_y}{\partial x}-\frac{\partial R_x}{\partial y}\right)
\end{aligned}$$