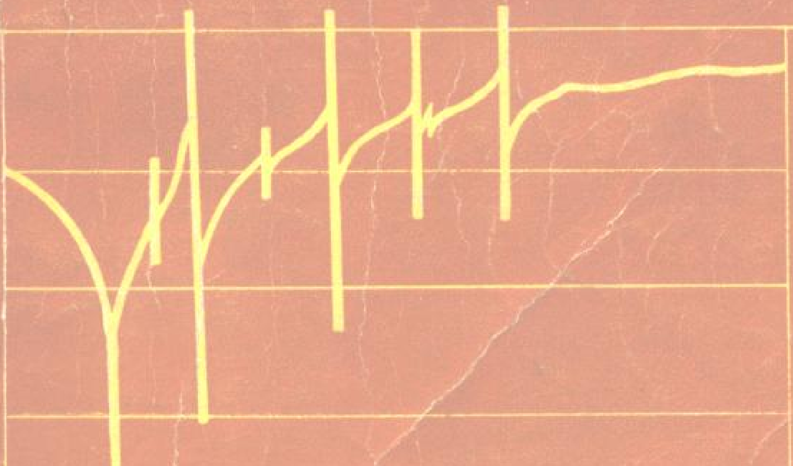
压电振动

王矜奉　姜祖桐　石瑞大 编著



科学出版社

压电振动

王矜奉　姜祖桐　石瑞大 编著

科学出版社
1989

内 容 简 介

本书论述了压电振动的基本理论。前五章从弹性动力学和压电学的基本理论出发，系统地分析了各类压电器件的谐振特性；第六章论述了压电振子的等效参数、压电材料常数与频谱的关系；第七章介绍了求解压电振子频谱的若干实用近似的方法。

本书可作为高等院校有关专业的教科书，也可供从事压电器件研究的科技工作者参考。

压 电 振 动

王矜奉　姜祖桐　石瑞大 编著

责任编辑　王　旭　张邦固

科 学 出 版 社 出 版

北京市东黄城根北街16号

中国科学院开封印刷厂印刷

新华书店北京发行所发行　各地新华书店经售

*

1989年8月第 一 版　　开本：787×1092　1/32

1989年8月第一次印刷　　印张：10

印数：0001—1,220　　字数：226,000

ISBN 7-03-001009-4/O·244

定价：7.70元

代 序

从 1880 年居里兄弟发现压电效应以来，压电理论和压电技术得到了迅速的发展．新的压电材料不断问世，新的压电器件竞相涌现，压电理论日趋成熟，压电技术的应用也日益广泛．特别是近十年来，为适应通讯、自动控制、水声、超声、传感技术的需求，压电器件的研制和应用出现了前所未有的新局面．

我国从事压电技术研究和应用的人员已形成了一支可观的科技队伍．但是，我国在压电器件的研制和应用上起步晚，与国外有一段差距，技术水平和理论水平需要进一步提高．《压电振动》一书正是适应这种状况而编写的．

压电器件的功能大多是利用压电弹性体的压电效应和谐振特性来实现的．压电器件的理论包括压电理论和弹性理论两大部分．本书从这两大基本理论出发，分析讨论了各类典型压电器件的振动模式．虽然已有一些弹性振动的论著出版，但是，像本书这样系统地阐述压电振动的著述尚不多见．

本书的特点是，物理概念清晰，推理严谨，注重应用．内容编排由浅入深、循序渐近，各章自成体系而又相互关联．

通过本书，读者可以学习掌握压电器件谐振特性的一般分析方法，对开拓压电谐振器、压电滤波器、压电传感器设计和研制工作者的思路，对提高压电器件应用工作者的理论水平，会有所裨益．

秦自楷

1988年 3 月

前　　言

近几十年来，压电器件的研制和应用一直在蓬勃发展．压电谐振器、压电滤波器、压电换能器及压电传感器在通讯、自动控制、计测、电声、水声、超声、航空、航天、医疗卫生等领域得到了广泛的应用．这些压电器件的主要理论大都是源于压电体的振动理论．

本书的前五章从弹性动力学和压电物理学的基本理论出发，系统地分析讨论了棒形压电振子的伸缩振动、弯曲振动、扭转振动，板形压电振子的弯曲振动、径向伸缩振动、面切变振动、厚度切变振动、能陷振动，圆环、圆筒、球壳压电振子的各类振动以及压电体的表面振动．在阐明理论的同时，本书适当地介绍了有关振动模式的实际应用．在第六章分析了压电振子等效参数、压电材料常数与频谱的关系，并介绍了这些参数和常数的测量方法．在第七章给出了求解压电振子频谱的若干实用的近似方法．附录中简述了一些矩阵运算的基本知识，以利于线性代数知识不足的读者学习时查用；同时还列出了压电晶体的常数等，可供读者在学习和研究工作中查用．

本书的初稿曾呈请秦自楷教授指正．中国电子学会理事韩锡振高级工程师对本书的修改稿作了审阅，提了不少宝贵意见．俞淑华同志、孙广珍同志在插图的绘制上做了大量工作．在此，谨向这些同志表示衷心的感谢．

作者学识水平有限，书中错误和不妥之处在所难免．我

们诚恳希望广大读者给予批评指正.

王矜奉

（山东大学物理系）

姜祖桐、石瑞大

（鞍山市电子陶瓷公司）

1988年3月

目　录

第一章　固体弹性的基本理论

1.1　固体弹性的本质及其假定

当固体受外力作用时，固体（介质）中的质点偏离原来平衡位置，与此同时，介质内部产生一种弹性恢复力. 外力撤消后，在弹性恢复力作用下，质点可能会恢复到原平衡位置，也可能恢复不到原平衡位置。固体介质质点在外力撤消后能恢复到原来平衡位置的性质称为固体的弹性. 弹性是固体介质的一个重要属性.

弹性振动理论是弹性动力学的重要组成部分. 它主要研究弹性恢复力与介质形变，以及与质点位移之间的关系，研究波动的规律，特别是驻波的重要性质. 弹性振动理论是以质点位移作为基本研究对象的. 这里所说的质点，在宏观上是极其微小的，而微观上却包含许许多多的分子和原子. 因此，弹性振动理论是关于固体弹性这一属性的宏观理论.

固体弹性这一宏观性质是固体介质微观性质的反映. 从固体物理理论我们知道，固体内两原子（或分子，离子）间的作用力可表示为

$$f = \frac{A}{r^{m+1}} - \frac{B}{r^{n+1}}. \tag{1.1}$$

式中r为两原子之间的距离，A, B, m, n是常数，
对一些离子晶体和金属，$m=1$，$3<n<11$. 式中第一项代表两原子间的吸引力，第二项代表排斥力. 图1.1表示出了吸引力和排斥力及其合力与r的关系曲线. 可以看出，在$r=r_0$处合力

为零，这便是原子的平衡位置．在$r<r_0$时，排斥力是主要的，当 $r>r_0$ 时吸引力是主要的．当固体受拉伸时，r增大，此时原子间的吸引力反抗着这一拉伸形变．当固体受挤压时，r 减小，原子间的排斥力抗击着这一外界的压力．

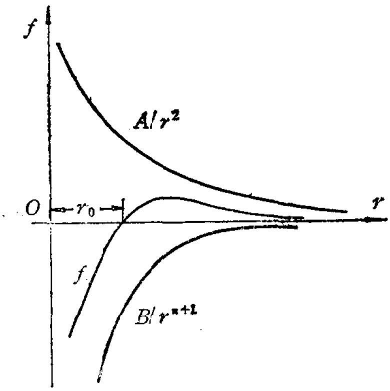


图1.1固体中原子间的互作用力

从(1.1)式可以看出，由于 $n>m$，在r_0 附近，合力 f 的斜率主要取决于排斥力的斜率．该斜率越大，固体介质的弹性越强．因此，我们可以说，固体弹性的强弱主要取决于介质中原子间的排斥力的大小．

随着外力的消失而消失的形变叫做固体的弹性形变；去掉外力后仍然保留的形变叫残余形变或永久形变．弹性力学研究的形变属弹性形变．但实验表明，绝对的弹性形变是不存在的，任何外力引起的形变都存在残余形变．不过，对绝大多数固体而言，当外力引起的形变较小时，残余形变很小，一般不超过0.005％．也就是说，理想化的弹性固体仅是实际固体的一个近似．基于这一近似，经典弹性理论假定：

1．固体介质是连续的．

2．固体介质是均匀的．

3．固体介质是完全弹性的．

4．弹性体的形变与本身尺寸相比是微小的．

这些假定，使弹性力学的数学处理变得简单明了，使外力与弹性恢复力、外力与介质形变、弹性恢复力与形变成为一一对应的线性关系．

1.2 固体弹性力学的基本概念

弹性力学中有四个重要的物理量，它们是：外力、应力、应变和质点位移．对于压电弹性介质来说，由于力学量与电学量相互耦合，还有两个基本物理量，即电场强度和电位移矢量．

1. 外力

作用在弹性体上的外力分为体力和表面力．体力作用于物体的内部，例如重力、磁性力和惯性力等．一般情况下，物体均处于重力场中，重力引起的形变不随时间变化，是弹性体稳定的形变．因此，在讨论弹性体的振动问题时，我们将不考虑重力对弹性体质点的应变和位移等的影响．

一般情况下，不同位置的质点受到的体力可能是不同的，也就是说，体力可能是质点位置坐标的函数．为了描述某一点的体力的大小和方向，我们称极限

$$\lim_{\Delta\tau\to 0}\frac{\Delta \boldsymbol{P}}{\Delta\tau}=\frac{d\boldsymbol{P}}{d\tau}=\boldsymbol{F}$$

为体积元 $\Delta\tau$ 趋于零时该点的体力密度．

表面力是指分布在物体表面上的力．只有当弹性体与其它物体或物质相接触时，才可能存在表面力．同样，我们称极限

$$\lim_{\Delta s\to}\frac{\Delta \boldsymbol{P}'}{\Delta s}=\frac{d\boldsymbol{P}'}{ds}=\boldsymbol{F}'$$

为面积元 Δs 趋于零时该点的表面力密度．

2. 应力

所谓弹性体的应力，是指弹性体受到外力时，内部产生的

抵抗形变的弹性恢复力. 当有外力作用于弹性体表面时，外力并没有直接作用于物体内部的质点上，而是借助于作用在相邻质点间的弹性力传递给内部质点的. 由于弹性体是连续介质，我们必须找出一个描述连续介质的弹性恢复力的办法.

设想在弹性体内有一面积为 Δs 的截面. 截面两边的质点相互受到对方传递的作用力. 根据牛顿第三定律可知，这两方的力大小相等方向相反. 由于力是矢量，可以想象的出，所取面积元 Δs 的方位不同，面积元两边的作用力随 Δs 的方位而异. 如果面积元 Δs 的某一面的外法线方向的单位矢量为$\boldsymbol{n}$，我们称极限

$$\lim_{\Delta s\to 0}\frac{\Delta \mathbf{T}_n}{\Delta s}=\frac{d\mathbf{T}_n}{ds}=\boldsymbol{T}_n$$

为 Δs 趋于零这一点外法线为 $\mathbf{n}$ 截面上的应力.

因为在弹性体中某一点的面积元的方位有无数个选取方法，所以在弹性体内某一点可以定义无数个应力向量. 但是，如果已知过某点的三个相互垂直面积元上的应力向量，则过该点任何其它面积元上的应力向量，均可由这三个应力向量求出. 亦即，这三个应力向量能够完全确定该点的应力状态，

在直角坐标中，在 (x, y, z) 这一点，$+x$ 方向面积元上的应力为

$$\mathbf{T}_x=\mathbf{x}T_{xx}+\mathbf{y}T_{yx}+\mathbf{z}T_{zx}. \tag{1.2}$$

$+y$ 和 $+z$ 方向面积元上的应力分别为

$$\mathbf{T}_y=\boldsymbol{x}T_{xy}+\boldsymbol{y}T_{yy}+\boldsymbol{z}T_{zy}, \tag{1.3}$$

$$\mathbf{T}_z=\boldsymbol{x}T_{xz}+\boldsymbol{y}T_{yz}+\boldsymbol{z}T_{zz}. \tag{1.4}$$

式中 $\boldsymbol{x},\boldsymbol{y},\boldsymbol{z}$ 分别是 x, y, z 轴的单位矢量；T_{xx}, T_{yy}, T_{zz} 是垂直于作用截面的应力分量，称之为正应力；其它应力分量均处于作用截面内，称之为切应力.

$\mathbf{T}_x$，$\mathbf{T}_y$，$\mathbf{T}_z$三个应力向量能够完全确定 (x, y, z) 点的应

力状态，也就是说一个应力状态对应九个应力分量．由九个分量决定的量是一个二阶张量，所以应力是一个二阶张量，可用矩阵表示之，

$$[T]=\begin{bmatrix} T_{xx} & T_{xy} & T_{xz} \\ T_{yx} & T_{yy} & T_{yz} \\ T_{zx} & T_{zy} & T_{zz} \end{bmatrix}. \tag{1.5}$$

设在弹性体内某一点 (x, y, z) 处有一任意取向的面元，其外法线方向的单位矢量为

$$\boldsymbol{n}=\boldsymbol{x}\mathrm{n}_x+\boldsymbol{y}\mathrm{n}_y+\boldsymbol{z}\mathrm{n}_z,$$

该面元上的应力为

$$\mathrm{T_n}=\boldsymbol{x}T_{xn}+\boldsymbol{y}T_{yn}+\boldsymbol{z}T_{zn}. \tag{1.6}$$

今取如图 1.2 所示的四面体体积元，由图示可得 x 轴方向上的合力为

$$T_{xn}\Delta s_n-T_{xx}\Delta s_x-T_{xy}\Delta s_y-T_{xz}\Delta s_z+F_x\Delta\tau=0,$$

式中 $F_x\Delta\tau$ 为四面体所受体力在 x 轴方向上的量．当面积元 Δs_n 趋于零时，$\Delta\tau$ 比 Δs_n 更快地趋于零，所受体力一项可以忽略．

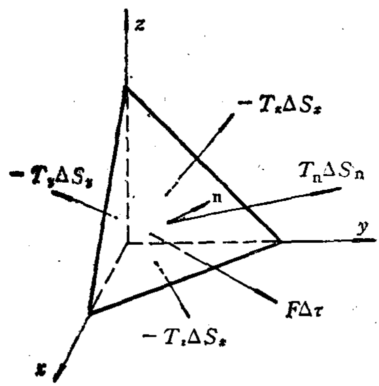


图1.2 四面体体积元所受应力及体力

利用关系式

$$\Delta s_x=\mathrm{n}_x\Delta s_n,$$
$$\Delta s_y=n_y\Delta s_n,$$
$$\Delta s_z=n_z\Delta s_n,$$

可得四面体表面上所受应力在 x 方向上的分量之间的关系式：

$$T_{xn}=T_{xx}n_x+T_{xy}n_y+T_{xz}n_z, \tag{1.7}$$

同样有

$$T_{yn}=T_{yx}n_x+T_{yy}n_y+T_{yz}n_z, \tag{1.8}$$

$$T_{zn}=T_{zx}n_x+T_{zy}n_y+T_{zz}n_z. \tag{1.9}$$

用矩阵形式表示，则为

$$\begin{bmatrix} T_{xn} \\ T_{yn} \\ T_{zn} \end{bmatrix}=\begin{bmatrix} T_{xx} & T_{xy} & T_{xz} \\ T_{yx} & T_{yy} & T_{yz} \\ T_{zx} & T_{zy} & T_{zz} \end{bmatrix}\begin{bmatrix} n_x \\ n_y \\ n_z \end{bmatrix}. \tag{1.10}$$

简记之为

$$[T_n]=[T][n].$$

3. 位移与应变

弹性力学中质点位移的定义与质点力学中质点的位移的定义相同，即质点的位移描述的是质点于每一时刻在空间的位置. 设质点位移在直角坐标中的位移分量分别是 u, v, w，则其位移矢量为

$$\boldsymbol{u}=\boldsymbol{x}u+\boldsymbol{y}v+\boldsymbol{z}w. \tag{1.11}$$

但是，弹性介质的形变指的是介质质点间发生的相对位移. 而在刚体的平动或转动中，虽然质点的位移发生了变化，但介质质点间并未发生位移. 这就是说，位移本身不能用来衡量弹性介质的形变. 在弹性力学中用来描述介质形变的物理量称之为应变.

如图 1.3 所示，在介质中取一平面，P 为弹性体中的任一点，$PA=\Delta x$，$PB=\Delta y$，Δx，Δy 是两条微小线段. 由于介质形变，设 P, A, B 三点分别移动到 P', A', B'.

线段在长度上的相对伸长（或缩短）量称之为正应变，由图 1.3 可知，PA 的正应变是

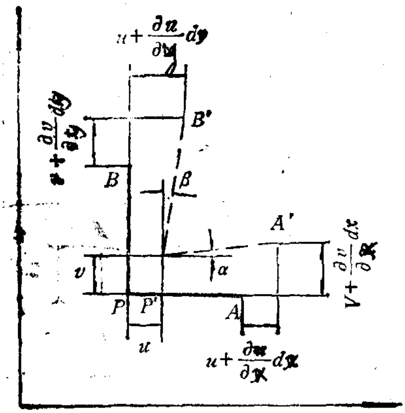


图1.3　弹性体的形变

$$S_{xx}=\lim_{\Delta x\to 0}\frac{\left(u+\dfrac{\partial u}{\partial x}\Delta x\right)-u}{\Delta x}=\frac{\partial u}{\partial x}. \tag{1.12}$$

同样 PB 线段的正应变为

$$S_{yy}=\frac{\partial v}{\partial y}. \tag{1.13}$$

从图 1.3 可知，PA，PB 线段在发生正应变的同时，其方向也发生了变化．PA 偏转的角度为

$$\alpha=\lim_{\Delta x\to 0}\frac{\left(v+\dfrac{\partial v}{\partial x}\Delta x\right)-v}{\Delta x}=\frac{\partial v}{\partial x}. \tag{1.14}$$

PB 偏转的角度为

$$\beta=\frac{\partial u}{\partial y}. \tag{1.15}$$

我们称 PA 和 PB 线段偏转角之和为切应变，并定义

$$S_{xy}=S_{yx}=\frac{1}{2}(\alpha+\beta)=\frac{1}{2}(\beta+\alpha)=\frac{1}{2}\left(\frac{\partial v}{\partial x}+\frac{\partial u}{\partial y}\right). \tag{1.16}$$