航空院校成人高等教育统编教材

高等数学

（学习辅导）

徐兵　计慕然　主编

航空工业出版社

航空院校成人高等教育统编教材

高　等　数　学

（学　习　辅　导）

徐　兵　计慕然　主编

1995

内容提要

本书是为了帮助读者学好“高等数学”(教材),依据航空院校 1994 年制定的成人高等教育工程专科高等数学教学基本要求而写成。

书中指出各章教学基本要求及重点。各章内容与教材内容相对应。每章都分为三个层次。以“应该明确的几个问题”为第一层次,指出概念的知识背景、作用等。指出概念的基本要素及知识结构,基本计算方法的应注意的前提条件;概念与概念、计算方法之间的横向联系。以“思考与分析”为第二层次,以思考题形式引导学生对基本概念、基本性质及基本方法有正确的理解。以“范例与分析”为第三层次,归纳计算方法与技巧。最终达到帮助学生理出所学知识的脉络。本书意在成为自学者的“辅导教师”,意在引导,意在深入。

本书可作为夜大学、函授教育、自学考试及高等院校日校专科生学习高等数学的辅导读物。

编 者 的 话

本书是为了帮助读者学好“高等数学”(教材),依据航空院校 1994 年制定的成人高等教育工程专科高等数学教学基本要求而写成。

从高等数学课程的作用来看,一方面它为学生学习后继课程和解决实际问题提供了不可缺少的数学基础知识及常用的数学方法;另一方面通过各个教学环节,培养学生的抽象概括能力、逻辑推理能力、运算能力、自学能力及综合运用所学知识去分析问题和解决问题的能力。从教学的规律来看,这些能力的培养又是在知识的学习过程中完成。

教学必须服从教学规律,教学是教与学的双边活动,它具有科学性,也具有艺术性。教学必须从实际情况出发。成人教育的学生,虽不同于完全自学者,但它也不同于日校生。成人教育的学生不能随时得到教师的解惑而释疑;而且与日校生的学习规律不同。但是该课程的教学任务相同,这些特点为成人教育学生的学习带来了诸多困难。本书作者正是基于此情况而编写此书。

本书编写的基本思想是:

(1) 帮助读者将所学知识理出知识结构,引导读者掌握高等数学的知识框架,理出知识脉络。

(2) 本书各章基本分为三个层次:

以“应该明确的几个问题”为第一层次。指出概念的知识背景、作用与地位等;指出概念的基本要素与知识结构;基本概念与诸方法之间的横向联系等。

以“思考与分析”为第二层次。以引导学生能对基本概念、

基本计算方法有较深刻的理解。

以“范例与分析”为第三层次。用以指明计算中应注意的前提条件、方法的技巧并进行归纳等。

作者意在以本书成为自学者的辅导教师，意在引导，意在深入。

为配合教材的使用，本书中标有 * * 号的例题或思考题成人专科工科可不必选用；标有 * 号的章节或思考题成人专科文科可不必选用。

本书可选作夜大学、函授教育、自学考试及高等院校日校专科生学习高等数学的辅导读物。

本书由北京航空航天大学徐兵、白如冰执笔。

编者

1995 年 1 月

目　　录

第一章 函数

一、教学基本要求

1. 理解函数的概念。

2. 了解分段函数。

3. 理解复合函数的概念，掌握将复合函数拆成一串基本初等函数(包括和的形式)。熟悉基本初等函数及其图形。

4. 能列出简单问题中的函数关系。

二、重点

函数的概念。函数符号的运用。

三、应该明确的几个问题

1. 高等数学与初等数学划分的依据是什么?

分析 从最一般的观点来看，数学的历史可以分为四个基本的、在性质上不同的阶段：

第一阶段：数学萌芽时期。这个时期从远古时代起，止于公元前5世纪。在这个时期里，逐渐形成了数的概念，产生了数的运算方法，几何有了初步发展。但这个时期的知识都是片断的、零碎的。这个时期是算术、几何形成的时期，但它们还没有分开，彼此紧密地交织在一起，也没有形成严格、完整的体系，更重要的是缺乏逻辑，基本上看不到命题的证明、演绎推理和公理化体系。

第二阶段：常量数学时期。即“初等数学”时期。这个时期开始于公元前6、7世纪，终止于17世纪中叶，延续了近两千年。在这个时期，数学已由具体的、实验阶段过渡到抽象的阶段，并逐渐形成一门独立的、演绎的科学。在这个时期里，算术、初等几何、初等代数、三角学都已形成独立的分支。这个时

期的基本成果，已构成现在我国中学数学课程的主要内容。

第三阶段：变量数学时期。即“高等数学”时期。这个时期以 17 世纪中叶笛卡儿的解析几何诞生为起点，终止于 19 世纪中叶。第三阶段与第二阶段的主要区别在于：第二阶段是用静止的方法研究客观世界的个别要素，而第三阶段是用运动的、变化的观点来探究事物变化和发展的规律。这个时期产生了微积分、解析几何、微分方程等。这个时期的基本成果，构成了现在我国高等工科院校中的高等数学课程的主要内容。

第四阶段：现代数学时期。这个时期始于 19 世纪中叶。在这个时期里，数学研究的对象被推广，这相应引起了量的关系和空间形式在概念本身的重大突破。

本书中所讲的“高等数学”包括微积分、空间解析几何、微分方程初步。所谓“初等”与“高等”之分是依惯例而形成的，并没有其“划分”的严格准则。

2. 我们的教材中对函数的概念采用了“依赖关系”的定义，而高中的教材对函数的概念采用了“集合”的定义，这该怎样解释？

分析　函数是一个变量对另一个（或多个）变量的依赖关系的抽象模型。了解函数概念的发展史有助于解释上面的问题。函数的发展可以分为四个时期：

第一时期为 17 世纪初叶以前，其特点是用文字和比例语言来表达函数关系。

第二时期为 17 世纪中、下叶，其特点是把函数当作曲线来研究。

第三时期为 18 世纪。其特点是将解析表达式定义为函数。

第四时期为 19 世纪初叶之后，这个时期给出了函数的明

确的近代定义:“若变量 x 在允许范围内的每一个确定的值,变量 y 按照某个确定的规则有唯一的值与之对应,则称 y 为 x 的函数,记为 $y=f(x)$。”我们称之为“依赖关系定义”,这是目前我国初中数学教材中普通使用的定义。

19 世纪 70 年代,函数又被定义为集合间的对应关系:

“设 A、B 为两个集合,如果按照某种对应法则 f,对于集合 A 中的任何一个元素,在集合 B 中都有唯一的元素和它对应.那么,这样的对应叫做集合 A 到集合 B 的映射,又叫做函数”。我们称之为函数的“集合对应”定义。一些“集合对应”论者认为“依赖关系”的定义的提法有缺陷:对于变量而言,必定是随某个过程而变,它不可能脱离“过程”而“自变”,因此“依赖关系定义”中含有不明确的因素,而“集合对应定义”则无需依赖“过程”,从而消除了“依赖关系定义”中的不明确的因素。然而到了 20 世纪初期,德国数学家豪斯多夫指出,“集合对应定义”中所指出的“对应”一词也是不明确的因素,进而提出了“序偶”形式的函数的新定义。到了 20 世纪 60 年代,一些教科书采用了“序偶”形式的函数的新定义。

目前我国高中教材关于函数的定义则采用了上述“集合对应定义”。从数学的严格性来说,两种定义都有不明确因素存在。但这并不意味着:“依赖关系”的函数定义不好,它有其优点,易于理解。目前我国高等工科院校的高等数学教材多采用依赖关系的函数定义。

3. 函数“依赖关系定义”的关键特征是什么?

分析 由:“对于 x 在允许范围内的每一个确定的值,变量 y 按照某个规则有值与之对应。”可知“函数依赖关系定义”的关键特征为:

——x 的允许范围,即函数的定义域。

——对应规则，即函数的依赖关系。

因此说，函数概念的两个基本要素为：定义域、对应规则（或称依赖关系）。

只有当两个函数的定义域与对应规则完全相同时，才能认为它们是同一个函数。

至于说“对应规则”的特点及 y 的取值特点，在函数的定义中并没有限制，因此可能出现：

(1)当自变量 x 的值变动时，变量 y 的取值不一定随 x 的变动而变化，y 可能总取一个值。

如 $y=2$，它表示不论 x 取什么值，函数所对应的值总等于 2。对照函数的定义可以知道，$y=2$ 表示一个函数，它的定义域为$(-\infty,+\infty)$。这个函数的图形表示与 x 轴平行，且在 x 轴上方 2 个单位处的直线。

(2)函数对应规则的形式没有加以限制。

①如果函数对应规则的形式是解析表达式，它可以表示为 $y=f(x)$，则称函数为显式表示。

②如果函数对应规则是由 $F(x,y)=0$ 的形式给出，则称 y 是 x 的隐函数。

③如果对应规则是由几个解析表达式而表示的，则为分段函数。如

$$f(x)=\begin{cases} x, & x\leqslant 0 \\ x+1, & 0<x<1 \\ x^2, & x\geqslant 1 \end{cases}$$

注意这里的 $f(x)$ 不是三个函数，而是定义域为$(-\infty,+\infty)$的一个函数，它由三个解析表达式来表达。

④如果对应规则是由表格或图形表示出来，那么我们称这种表示为函数的表格表示法或图形表示法。

⑤如果 x 与 y 通过第三个变量而联系起来，如

$$\begin{cases}x=\varphi(t)\\y=\psi(t)\end{cases}$$

则称这种函数关系为参数方程表示的函数。

4. 研究函数的单调性、有界性离不开自变量的范围。

如 $y=x^2$，在 $x<0$ 时为单调减少函数；在 $x>0$ 时为单调增加函数；在$(-\infty,+\infty)$内为非单调函数。

同样，$y=x^2$ 在$(0,1)$内为有界函数；在$(0,+\infty)$内为无界函数。

四、思考与分析

思考题 1　$y=C$(常数)是否建立了 y 与 x 的函数关系？

分析　由本章三、3(1)的分析可知 $y=C$ 是表示函数关系。它的定义域为$(-\infty,+\infty)$，这个函数的几何图形表示与 x 轴平行，且与 x 轴相距 C 个单位的直线。

思考题 2　$f(x)=\dfrac{1}{x}$是否为单调下降函数？

分析　由函数单调性的定义可以知道：研究函数的单调性离不开自变量的范围。

对于 $f(x)=\dfrac{1}{x}$，定义域为$(-\infty,0)$，$(0,+\infty)$。研究函数的单调性通常有两种途径：其一为依据定义，即若$f(x)$在 D 内有定义，对于 D 内任取两点 $x_1<x_2$，比较$f(x_1)$，$f(x_2)$来判定。其二为判定导数符号，后者一般来说较前者方便。因此，在这部分里，我们只侧重于方法一的思路，不探究较复杂的问题。

在$(-\infty,0)$内任取 $x_1<x_2$，考察 $f(x_2)-f(x_1)=\dfrac{1}{x_2}-\dfrac{1}{x_1}$ $=\dfrac{x_1-x_2}{x_1x_2}$，由于 $x_1\cdot x_2>0$，而 $x_1-x_2<0$，可知$f(x_2)-f(x_1)$

<0，这意味着 $f(x)=\frac{1}{x}$ 在 $(-\infty,0)$ 内单调下降。同理可证 $f(x)=\frac{1}{x}$ 在 $(0,+\infty)$ 内也单调下降。但是我们不能说 $f(x)$ 在 $(-\infty,+\infty)$ 内是单调下降的。这不仅是由于在 $x=0$ 点，$f(x)=\frac{1}{x}$ 没有定义。事实上，对于在 $x=0$ 点有定义的时候，如 $g(x)=\begin{cases}\frac{1}{x}, & x\neq 0\\ 1, & x=0\end{cases}$，仿上述讨论可知 $g(x)$ 在 $(-\infty,0)$ 与 $(0,+\infty)$ 内都是单调下降的，但是 $g(x)$ 在 $(-\infty,+\infty)$ 内并不是单调下降的。设 $x_1=-1$，$x_2=1$，则 $x_1<x_2$，而 $g(x_1)=\frac{1}{x_1}=-1$，$g(x_2)=\frac{1}{x_2}=1$，因此 $g(x_1)<g(x_2)$。即 $g(x)$ 在 $(-\infty,+\infty)$ 不是单调下降函数。

此思考题 2 表明：

①研究函数的单调性离不开自变量的取值范围。

②函数 $f(x)$ 在 $[a,c)$，$(c,b]$ 上都单调下降，也不能说 $f(x)$ 在 $[a,b]$ 上单调下降。

思考题 3　是否每一个函数 $f(x)$ 都有反函数？

分析　先考察函数 $y=C$，事实上 $y=C$ 不存在反函数。因此可以说，不是每个函数都存在反函数。

对于反函数存在的充分条件，不属于教学基本要求。这部分只要求读者知道求反函数的步骤，会求简单函数的反函数。

思考题 4　是否 $y=f(u)$，$u=g(x)$ 一定能复合成 y 为 x 的函数？

分析　注意到复合函数的定义"若对 x 在某一范围内的每一个确定的值，u 按确定的规则有一确定值与之相对应 $u=g(x)$；而对于此 u 的确定值，y 按确定的规则有一确定值与之

相对应 $y=f(u)$，这样就确定了变量 y 与变量 x 之间的函数关系，称这种关系为 y 是 x 的复合函数”。

若考察 $y=f(u)=\arcsin u, u=x^2+2$。可以看到，不论 x 取什么值，相应的 u 总不小于 2，而使 $y=\arcsin u$ 有意义的值必须是 $|u|\leqslant 1$。因此可知 $\arcsin(x^2+2)$ 是无意义的。换言之任意给定 $y=f(u)$，$u=g(x)$，并不一定能复合成 y 为 x 的函数。

思考题 5　$f(n)=\sin n$（n 为自然数）是否是以 2π 为周期的函数？

分析　读者先回忆以 T 为周期的周期函数的概念：“设 $y=f(x)$，若存在 $T>0$，对任意的 x 都有 $f(x+T)=f(x)$，则称 $y=f(x)$ 为周期函数，称 T 为周期。这里所指出的“对任意的 x”是指对于该函数定义域中的值。本思考题的用意就是要强调这一点。本例中 $f(n)=\sin n$ 的定义域为整个自然数集合，而 $n+2\pi$ 不是自然数，所以 $f(n+2\pi)$ 没有意义，根本谈不上与 $f(n)$ 相等，因而 $f(n)=\sin n$（n 为自然数）不是以 2π 为周期的函数。

思考题 6　由 $F(x,y)=0$ 确定了 y 为 x 的函数，它是否一定可以确定出 y 为 x 的显函数形式？

分析　对于一些复杂的隐函数 $F(x,y)=0$，往往不能用显式形式 $y=f(x)$ 表示出来。

思考题 7　$1+x+x^2+\cdots+x^n+\cdots$ 是否为 x 的函数？

分析　注意到当 $|x|<1$ 时，上式是公比为 x 的等比数列之和，且其值 $y=\frac{1}{1-x}$，换言之，任意给定 $|x|<1$，总有 $y=\frac{1}{1-x}$ 的值与之相对应，因此说 $1+x+x^2+\cdots+x^n+\cdots$ 是 x 的函数。

有必要指出函数 $1+x+x^2+\cdots+x^n+\cdots$，$|x|\geqslant 1$ 不是初等函数。只需注意到初等函数的定义："基本初等函数经过有限次四则运算或有限次复合运算而成的函数称为初等函数。"而上述函数是基本初等函数经过无限次四则运算而成。

思考题 8　周期函数是否一定有最小周期？

分析　思考题 5 的分析中给定了周期函数的定义。教材中指出了"若在周期 T 的所有取值中，存在一个大于零的最小值 T_0，则称 T_0 为最小周期。对存在最小周期的周期函数，平常所说的周期即指最小周期。"

设　$f(x)=\begin{cases}1, & x\text{ 为有理数}\\ 0, & x\text{ 为无理数}\end{cases}$

对于任意给定的正有理数 T，都有 $f(x+T)=f(T)$。因此，$f(x)$ 为周期函数，任何正有理数都是该函数的周期，但是 $f(x)$ 不存在最小周期。

上述分析表明并不是说周期函数必定有最小周期。

思考题 9　设 $f(x)$ 在 $(-\infty,+\infty)$ 内有定义，是否至少存在一个区间 (a,b)，使得 $f(x)$ 在 (a,b) 内为单调函数？

分析　先考察　$f(x)=\begin{cases}1, & x\text{ 为有理数；}\\ 0, & x\text{ 为无理数。}\end{cases}$

在 $(-\infty,+\infty)$ 内有定义。但是在 $(-\infty,+\infty)$ 内不存在任何区间 (a,b) 使得 $f(x)$ 为单调函数。

此例告诉我们"直观想象"并不可靠。

思考题 10　若对于任意的 $M>0$，$f(x)$ 在 $[-M,M]$ 上有界，那么 $f(x)$ 是否必定在 $(-\infty,+\infty)$ 内一定有界？

分析　只需考察 $f(x)=x^2$，对于任意给定的 $M>0$，函数 $f(x)=x^2$ 在 $[-M,M]$ 上有界，但是 $f(x)=x^2$ 在 $(-\infty,+\infty)$ 内无界。

与思考题 9 相仿，此思考题也表明：1°. 决不能以"直观想

象"代替"证明","直观想象"有时并不可靠；2°. 在有限区间$[a,b]$上的结论不能随便推广到无穷区间$(-\infty,+\infty)$。

五、范例与分析

例 1　选择题(你认为有几个正确，则选几个)

下列结论______正确。

A. 两个单调上升函数之和，仍为单调上升函数。

B. 两个单调上升函数之积，仍为单调上升函数。

C. 若$f(x)$为单调上升函数，则$\frac{1}{f(x)}$为单调下降函数。

D. 若$f(x)$为单调上升函数，则其反函数也为单调上升函数。

分析　对于单调性的判别问题，前面四、思考题 2 已作了分析。本题中的函数皆为任意的，且不再限于一个函数。因此，较前要复杂些。需对每个命题进行分析，以便选择。

设$f(x)$，$g(x)$为在区间(a,b)内的两个单调上升函数，任取$x_1\in(a,b)$，$x_2\in(a,b)$，设$x_1<x_2$。则有$f(x_1)<f(x_2)$，$g(x_1)<g(x_2)$。

不难得知当$F(x)=f(x)+g(x)$时，必有

$F(x_2)=f(x_2)+g(x_2)>f(x_1)+g(x_1)=F(x_1)$，这表明$F(x)=f(x)+g(x)$为单调上升函数。即 A 正确。

这类问题实质上属于证明题。通常的处理方法是，猜测命题是否成立。如果命题成立的可能性大些，那么可以从结论入手，通过演绎推理来证明。如果命题不成立的可能性大些，就要想办法，看看能不能推翻它。比较简单的是构造一个反例即可。而对于较复杂的问题，也可以利用反证法等证明。

不难明白，$f(x)=x^2$，$g(x)=-\frac{1}{x}$在$(0,+\infty)$内都为单调上升函数，但是$f(x)\cdot g(x)=-x$，在$(0,+\infty)$内并不是

单调上升函数。因此，应该排除 B。

有必要指出，我们的教材中对函数的单调性定义是“若对 D 内任意两点 x_1,x_2，当 $x_1<x_2$ 时，恒有 $f(x_1)<f(x_2)$，则称 $f(x)$ 在 D 内为单调增加的。有的教材(工程技术课程中可见)对函数的单调性采用如下定义:“若对 D 内任意两点 x_1,x_2，当 $x_1<x_2$ 时，恒有 $f(x_1)\leqslant f(x_2)$，则称 $f(x)$ 在 D 内为单调增加的。如果当 $x_1<x_2$ 时，恒有 $f(x_1)<f(x_2)$，则称 $f(x)$ 在 D 内为严格单调增加的。因此有必要提醒读者注意，读不同教材时，必须注意该教材中给定的定义或规定，以免随意套用而出现问题。

再考察 $f(x)=x$ 在 $(-\infty,+\infty)$ 内为单调上升函数，而 $\dfrac{1}{f(x)}=\dfrac{1}{x}$ 并不是 $(-\infty,+\infty)$ 内的单调下降函数。这在四、思考题 2 中已给出了说明。因此，应该排除 C。

对于 D 来说，设 $f(x)$ 在 (a,b) 内为单调上升函数。若其反函数为 $x=\psi(y)$，不妨设 $x=\psi(y)$ 在相应的区间内不是单调上升函数，那么，必定存在 $y_1<y_2$ (y_1,y_2 属于上面指出的“相应”区间)，使 $x_1=\psi(y_1)\geqslant\psi(y_2)=x_2$，由于 $y=f(x)$ 为单调上升函数，对于 $x_1>x_2$，有

$$y_1=f(x_1)\geqslant f(x_2)=y_2$$

这与 $y_1<y_2$ 相矛盾。这表明上述假设 $x=\psi(y)$ 在相应的区间内不是单调上升函数的假设是不正确的。换言之，证明了命题 D 是正确的，因此应该选择 D。

故正确的选择应为 A、D。

上述的证明方法常称之为反证法。

例 2　选择题(你认为有几个正确，则选几个)

设 $f(x),\psi(x)$ 都是偶函数，且它们的定义域，值域均为

$(-\infty,+\infty)$，则下面结论______正确。

A. $\psi[f(x)]$与$f[\psi(x)]$都是奇函数。

B. $\psi[f(x)]$与$f[\psi(x)]$都是偶函数。

C. $\psi[f(x)]$与$f[\psi(x)]$都是非奇非偶函数。

D. $\psi[f(x)]$与$f[\psi(x)]$之一为非奇非偶函数。

分析　这里需要读者明确奇函数、偶函数的定义与判别方法。“若$f(x)$在D内有定义，对于D内任意的x，恒有$f(-x)=-f(x)$，则称$f(x)$为D上的奇函数；若对上述的x恒有$f(-x)=f(x)$，则称$f(x)$为D上的偶函数。”这个定义提供了判别函数奇偶性的方法。

若$f(x)$，$\psi(x)$都为偶函数，且它们的定义域、值域都是$(-\infty,+\infty)$，那么，对任意的x，都有

$$f(-x)=f(x),\psi(-x)=\psi(x)$$

因此　$\psi[f(-x)]=\psi[f(x)],f[\psi(-x)]=f[\varphi(x)]$

即$\psi[f(x)]$与$f[\psi(x)]$都是偶函数。故结论B正确，而结论A,C,D都不正确。

于是结论应选B。

例3　选择题(你认为有几个正确，则选几个)

在$(-\infty,+\infty)$内，函数$f(x)=\dfrac{(1+x)^2}{1+x^2}$是______。

A. 奇函数；　　B. 偶函数。

C. 无界函数；　　D. 有界函数。

分析　依例2的分析可知，对任意$x\in(-\infty,+\infty)$，$f(-x)=\dfrac{(1-x)^2}{1+x^2}$它既不等于$f(x)$，也不等于$-f(x)$，因此$f(x)$不是偶函数，也不是奇函数，于是排除B,A。

由于$0\leqslant f(x)=\dfrac{(1+x)^2}{1+x^2}=\dfrac{1+2x+x^2}{1+x^2}\leqslant\dfrac{1+x^2+(1+x^2)}{1+x^2}=2$，可知$f(x)$在$(-\infty,+\infty)$内为有界函数，因此排除C，选