工程数学

线性代数

朱金寿　陈晓江　杨爱芳　编

华中理工大学出版社

O151.2
287

工程数学

线性代数

朱金寿　陈晓江　杨爱芳　编

华中理工大学出版社

（鄂）新登字第 10 号

图书在版编目（CIP）数据

线性代数 /朱金寿编 —武汉：华中理工大学出版社，1995 年 12 月

ISBN 7—5609—1208—7

Ⅰ．线…

Ⅱ．①朱… ②陈… ③杨…

Ⅲ．线性代数

Ⅳ．O151.2

线 性 代 数

朱金寿 陈[illegible]江 杨爱芳 编

责任编辑：周怡 龙纯曼

华中理工大学出版社出版发行

（武昌喻家山 邮编：430074）

新华书店湖北发行所经销

江凝轻印刷社排版

金盾印刷厂印刷

*

开本：850×1168 1/32 印张：7 插页： 字数：173 000

1995 年 12 月第 1 版 1995 年 12 月第 1 次印刷

印数：1—7 000

ISBN 7—5609—1208—7/O.141

定价：6.00 元

前　言

随着近代科学技术的迅速发展及电子计算机的普及使用，线性代数越来越广泛应用于自然科学、工程技术以及社会科学等各个领域，从而使线性代数这门基础课越来越被重视，成为高等理工科及部分文科的必修课，而且其教学内容在深度和广度上都在不断提高．为适应教学改革和满足广大备考研究生读者的需要，我们积多年的教学和辅导研究生入学考试的经验，编写了这本既可作为教材又可以作为备考复习资料的线性代数．本书主要有以下特点：

1．层次分明，适应面广．本书内容分基础部分和提高部分（带“＊”号的章节）两个层次，基础部分是按教学大纲的基本要求编写的，包括了线性代数的主要内容和基本计算方法，每节配有适量的例题和练习，用于对基本概念和方法的理解、巩固．讲授这部分内容大约需要 32 个学时左右．提高部分是对前面所学内容的综合应用与深入提高．可供教师上习题课选用和要求较高的读者课外阅读．读者可略去不看，不影响对后面内容的学习，但我们希望读者能全看或选看，这样，有助于提高读者分析问题和解决问题的能力，有利于扩大读者的知识面．

2．由浅入深，通俗易读．本书在编排方法和风格上，我们尽量从具体到抽象，从简单到复杂，循序渐进，使读者容易接受．例如由大家熟悉的线性代数方程组引进向量、向量相关性等抽象概念，又把这些抽象概念简化为具体的矩阵秩的问题进行处理．同时，我们还力求编排脉络清晰，叙述详略得当，在每个章节前都标明讨论的主要问题，说明问题从何而来，到何处去，这样便于读者抓住

线性代数的主要内容进行学习，有助于提高读者阅读和自学能力，便于自学. 本书每节都配有练习，每章配有综合训练的习题，书末附有练习和习题的答案、提示或简答.

3. 例题新颖，实用性强. 在例题选择上我们力求典型、新颖、具有代表性和实用性，着重培养读者解题的基本思路和方法. 提高部分的例题和习题，大多数选自研究生试题和一些工科院校的期末试题，如果读者能全面系统地阅读本书，对了解研究生入学(线性代数)考试的试题形式和范围，是大有好处的.

参加本书编写的有：陈晓江(第一、二章)，朱金寿(第三、五章)，杨爱芳(第四、六章)，全书由朱金寿负责统编.

本书由武汉大学数学系叶明训教授主审，参加审稿的还有武汉汽车工业大学蔡宏材教授、欧阳家之教授、史南星副教授。他们都认真审阅了原稿，并提出不少宝贵意见。本书在编写、出版过程中得到了有关领导和老师的支持、帮助，谨此对他们表示衷心的感谢.

华中理工大学出版社对本书的编审、出版给予热忱支持和帮助，在此一并致谢.

由于我们水平有限，难免有不妥甚至错误之处，恳请读者批评指正.

编　者

1995年8月于武汉

试读结束：需要全本请在线购买： www.ertongbook.com

内 容 简 介

本书是根据1987年国家教委批准的高等工业学校《线性代数课程教学基本要求》和1995年全国高等学校工科数学系列课程教学改革会议精神编写的.

本书内容包括:行列式、矩阵、向量组的线性相关性与矩阵的秩、线性方程组、相似矩阵与二次型、线性空间与线性变换.每章最后一节是综合应用与提高部分,可作为教师上习题课的参考内容,也可供要求较高的学生或备考研究生的读者选学,书末附有练习和习题答案.

本书可作为高等工业院校本、专科各专业教材或教学参考书,也可以作为电大、函大和夜大的教学用书,还可供工程技术人员自学和作为备考研究生的综合复习资料.

目　录

第一章　行列式

行列式是一个重要的数学工具，不仅在数学的各个领域中，而且在其它各学科中都会经常用到它．特别在线性代数中它更是一个不可缺少的计算工具．在这一章里我们主要讨论以下三个问题：

1．行列式的定义和性质；

2．行列式的计算方法；

3．利用行列式求解线性方程组．

§1.1　行列式的定义

中学代数中介绍过二阶、三阶行列式，并且利用它们来求解二元、三元线性方程组．为了求解 n 元线性方程组，需要把行列式的概念推广到 n 阶．为此，我们先介绍一些预备知识，然后引出 n 阶行列式的定义．

一、全排列及其逆序数

我们知道，n 个不同元素全部取出的一个排列称为 n 个不同元素的一个全排列．全排列的个数

$$P_n=n\cdot(n-1)\cdots3\cdot2\cdot1=n!.$$

当 n 个元素为自然数 1 至 n 时，对于两个自然数，如果大的排在小的前面，就称这两个自然数间有一个**逆序**．一个排列中所有逆序的总和称为这个排列的**逆序数**，记为 τ．

逆序数为奇数的排列称为**奇排列**，逆序数为偶数的排列称为**偶排列**．

下面介绍求逆序数的方法.

设

$$p_1 p_2 \cdots p_n$$

为 n 个自然数 $1,2,\cdots,n$ 的一个排列，考虑元素 $p_i(i=1,2,\cdots,n)$，如果比 p_i 大且排在 p_i 前面的元素有 τ_i 个，就称 p_i 的逆序数为 τ_i. 全体元素的逆序数的总和

$$\tau=\tau_1+\tau_2+\cdots+\tau_n$$

即是这个排列的逆序数.

例 1 求排列 34152 的逆序数.

解 在排列 34152 中，3 排在首位，逆序数为 0；4 的前面没有比 4 大的，逆序数为 0；1 的前面比 1 大的数有两个：3，4，故逆序数为 2；5 是最大数，逆序数为 0；2 的前面比 2 大的数有三个：3，4，5，故逆序数为 3.

于是所给排列的逆序数

$$\tau=0+0+2+0+3=5.$$

排列 34152 是一奇排列. 如果把其中任意两个元素互换一下位置，而其它元素不动，不难算出所得到的排列是一偶排列. 这种作新排列的方法称为一个**对换**.

例如，将奇排列 34152 的前两个元素作一个对换，得到一个新排列 43152，排列 43152 的逆序数为 6，即为偶排列. 一般地，有

定理 一个排列中的任意两个元素对换，改变排列奇偶性.

(证明留给读者).

二、n 阶行列式的定义

我们先研究一下二阶和三阶行列式的结构，找出它们的共同规律，然后根据这些共同规律给出 n 阶行列式的定义，大家知道

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix}=a_{11}a_{22}-a_{12}a_{21}, \tag{1-1}$$

试读结束：需要全本请在线购买： www.ertongbook.com

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} = a_{11}a_{22}a_{33} + a_{12}a_{23}a_{31} + a_{13}a_{21}a_{32} - a_{11}a_{23}a_{32} - a_{12}a_{21}a_{33} - a_{13}a_{22}a_{31}. \quad (1\text{-}2)$$

以三阶行列式为例，研究它的结构. 容易看出：

(1)　(1-2)式右边每一项都恰是三个元素的乘积，而且这三个元素位于行列式的不同的行、不同的列，因此(1-2)式右边的任意项除正负号外可以写成 $a_{1p_1}a_{2p_2}a_{3p_3}$. 这里第一个下标(称**行标**)是按自然顺序 123 排列的，而第二个下标(称**列标**)排成 $p_1p_2p_3$，它是 1,2,3 的某个排列.

(2)　(1-2)式中每项带有符号，不是正号就是负号，各项的正负号与其列标的排列有关：

带正号的三项列标排列是：123,231,312，它们都是偶排列；

带负号的三项列标排列是：132,213,321，它们都是奇排列.

因此各项所带的正负号可以表示为 $(-1)^{\tau}$，其中 τ 为列标排列的逆序数.

(3)　因为 1,2,3 的不同排列共有 $3! = 6$ 个，所以(1-2)式右边是 6 项的代数和.

总之，三阶行列式可表示为：

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} = \sum (-1)^{\tau} a_{1p_1}a_{2p_2}a_{3p_3}$$

其中 τ 为排列 $p_1p_2p_3$ 的逆序数，$\sum$ 表示对 1,2,3 三个数的所有排列 $p_1p_2p_3$ 取和.

以上这些规律对二阶行列式显然也是成立的. 现在，我们根据这些规律定义 n 阶行列式如下：

设有 n^2 个数 $a_{ij}(i,j=1,2,\cdots,n)$，把它们排成 n 行 n 列的表

$$
\begin{matrix}
a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\
a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\
\cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\
a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn}
\end{matrix}
$$

(1) 作出表中位于不同行不同列的 n 个数的乘积，这些乘积可以写成下面的一般形式：

$$a_{1p_1}a_{2p_2}\cdots a_{np_n},$$

其中 $p_1p_2\cdots p_n$ 是 $1,2,\cdots,n$ 的一个排列.

(2) 每个乘积前所带的符号由排列 $p_1p_2\cdots p_n$ 的逆序数 τ 决定，当 τ 为偶数时带正号，当 τ 为奇数时带负号，于是一般项可表示为：

$$(-1)^{\tau}a_{1p_1}a_{2p_2}\cdots a_{np_n}.$$

(3) 因为 n 个数的所有排列共有 $n!$ 个，所以这样的项共有 $n!$ 个.

所有这 $n!$ 项的代数和

$$\sum (-1)^{\tau}a_{1p_1}a_{2p_2}\cdots a_{np_n}$$

称为 **n 阶行列式**，记为

$$D=\begin{vmatrix}
a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\
a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\
\cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\
a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn}
\end{vmatrix}=\sum (-1)^{\tau}a_{1p_1}a_{2p_2}\cdots a_{np_n} \qquad (1\text{-}3)$$

其中，$\sum$ 表示对 $1,2,\cdots,n$ 这 n 个数的所有排列 $p_1p_2\cdots p_n$ 取和，τ 表示排列 $p_1p_2\cdots p_n$ 的逆序数. 数 a_{ij} 称为第 i 行第 j 列上的**元或元素**.

当 $n=1$ 时，规定 $|a|=a$，注意此时不要与绝对值记号相混淆.

在上面行列式的定义中，每个乘积的行标是按自然顺序排列的，实际上我们可以交换乘积中元素的顺序，使每个乘积的列标按自然顺序排列，从而有类似定义：

$$D=\sum(-1)^{\tau}a_{p_1 1}a_{p_2 2}\cdots a_{p_n n}. \tag{1-4}$$

下面根据定义计算两类最简单也是最重要的行列式.

例 2 证明**对角行列式**(其中未写出的元素均为 0)

$$\begin{vmatrix}\lambda_1 & & & \\ & \lambda_2 & & \\ & & \ddots & \\ & & & \lambda_n\end{vmatrix}=\lambda_1\lambda_2\cdots\lambda_n;$$

$$\begin{vmatrix} & & & \lambda_1 \\ & & \lambda_2 & \\ & \iddots & & \\ \lambda_n & & & \end{vmatrix}=(-1)^{\frac{n(n-1)}{2}}\lambda_1\lambda_2\cdots\lambda_n.$$

证 第一式是显然的,下面证明第二式.

记 $\lambda_i=a_{i,n-i+1}$,则由行列式的定义,有

$$\begin{vmatrix} & & & \lambda_1 \\ & & \lambda_2 & \\ & \iddots & & \\ \lambda_n & & & \end{vmatrix}=\begin{vmatrix} & & & a_{1n} \\ & & a_{2,n-1} & \\ & \iddots & & \\ a_{n1} & & & \end{vmatrix}$$

$$=(-1)^{\tau}a_{1n}a_{2,n-1}\cdots a_{n1}=(-1)^{\tau}\lambda_1\lambda_2\cdots\lambda_n,$$

其中 τ 为排列 $n(n-1)\cdots 321$ 的逆序数

$$\tau=0+1+2+\cdots+(n-1)=\frac{n(n-1)}{2},$$

故第二式成立.

为方便起见,一般称 n 阶行列式从左上角到右下角的对角线为**主对角线**,从右上角到左下角的对角线为**次对角线**. 如果对角线以下(上)的元素均为零,则行列式称为**上(下)三角行列式**,它的值与对角行列式相同.

例 3 证明上三角行列式

$$D=\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ & & \ddots & \vdots \\ & & & a_{nn} \end{vmatrix}=a_{11}a_{22}\cdots a_{nn}.$$

证 由行列式定义，一般项为

$$a_{1p_1}a_{2p_2}\cdots a_{np_n}.$$

在行列式中，第 n 行元素除 a_{nn} 外均为零，故只能取 $p_n=n$. 再考察第 $n-1$ 行，p_{n-1} 不能再取 n，因此这时 p_{n-1} 只能取 $n-1$，即 $p_{n-1}=n-1$. 依次可知 $p_{n-2}=n-2$，…，$p_2=2$，$p_1=1$. 不难看出，在定义中除去

$$a_{11}a_{22}\cdots a_{nn}$$

这一项外，其余的项均为零. 而这一项的列标排列 $1\ 2\ \cdots\ n$ 是偶排列，故这一项带正号，于是

$$D=\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ & & \ddots & \vdots \\ & & & a_{nn} \end{vmatrix}=a_{11}a_{22}\cdots a_{nn}.$$

证毕

练 习 1.1

1. 计算下列各排列的逆序数：

(1) 4312；(2) 21453.

2. 写出 4 阶行列式中含有 $a_{11}a_{23}$ 的项.

3. 决定 6 阶行列式中下列各项的符号：

(1) $a_{14}a_{23}a_{31}a_{42}a_{56}a_{65}$； (2) $a_{51}a_{32}a_{43}a_{14}a_{65}a_{26}$.

4. 利用公式(1-1)或(1-2)，计算下列各行列式：

(1) $\begin{vmatrix} 5 & 2 \\ 7 & 3 \end{vmatrix}$；(2) $\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 3 \\ 1 & 3 & 6 \end{vmatrix}$；(3) $\begin{vmatrix} 5 & 6 & 3 \\ 0 & 1 & 0 \\ 7 & 4 & 5 \end{vmatrix}$.

5. 利用行列式定义，求

$$f(\lambda)=\begin{vmatrix}\lambda-a_{11} & -a_{12} & -a_{13}\\ -a_{21} & \lambda-a_{22} & -a_{23}\\ -a_{31} & -a_{32} & \lambda-a_{33}\end{vmatrix}$$

中 λ^3,λ^2 的系数.

6. 证明：

$$\begin{vmatrix}a_{11} & a_{12} & 0 & 0\\ a_{21} & a_{22} & 0 & 0\\ c_{11} & c_{12} & b_{11} & b_{12}\\ c_{21} & c_{22} & b_{21} & b_{22}\end{vmatrix}=\begin{vmatrix}a_{11} & a_{12}\\ a_{21} & a_{22}\end{vmatrix}\begin{vmatrix}b_{11} & b_{12}\\ b_{21} & b_{22}\end{vmatrix}.$$

类似地证明：

$$\begin{vmatrix}a_{11} & \cdots & a_{1k} & 0 & \cdots & 0\\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots\\ a_{k1} & \cdots & a_{kk} & 0 & \cdots & 0\\ c_{11} & \cdots & c_{1k} & b_{11} & \cdots & b_{1n}\\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots\\ c_{n1} & \cdots & c_{nk} & b_{n1} & \cdots & b_{nn}\end{vmatrix}=\begin{vmatrix}a_{11} & \cdots & a_{1k}\\ \cdots & \cdots & \cdots\\ a_{k1} & \cdots & a_{kk}\end{vmatrix}\begin{vmatrix}b_{11} & \cdots & b_{1n}\\ \cdots & \cdots & \cdots\\ b_{n1} & \cdots & b_{nn}\end{vmatrix}.$$

§1.2 行列式的性质

为了简化行列式的计算，需要对行列式作进一步的讨论，研究行列式的性质.

记

$$D=\begin{vmatrix}a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n}\\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n}\\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots\\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn}\end{vmatrix},\quad D'=\begin{vmatrix}a_{11} & a_{21} & \cdots & a_{n1}\\ a_{12} & a_{22} & \cdots & a_{n2}\\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots\\ a_{1n} & a_{2n} & \cdots & a_{nn}\end{vmatrix},$$

称行列式 D' 为行列式 D 的**转置行列式**.

性质 1 行列式与其转置行列式相等.

证 记

$$D'=\begin{vmatrix} b_{11} & b_{12} & \cdots & b_{1n} \\ b_{21} & b_{22} & \cdots & b_{2n} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ b_{n1} & b_{n2} & \cdots & b_{nn} \end{vmatrix},$$

即 $b_{ij}=a_{ji}(i,j=1,2,\cdots,n)$. 由行列式定义(1-4)式，及 $b_{ij}=a_{ji}$，有

$$D'=\sum(-1)^{\tau}b_{p_1 1}b_{p_2 2}\cdots b_{p_n n}=\sum(-1)^{\tau}a_{1p_1}a_{2p_2}\cdots a_{np_n},$$

所以 $D=D'$. 证毕

性质 1 表明，在行列式中行与列的地位是相同的. 因此，凡是有关行的性质，对列也同样成立. 反之亦然.

性质 2 用数 k 乘行列式的某一行(列)，等于用数 k 乘此行列式，即

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ ka_{i1} & ka_{i2} & \cdots & ka_{in} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix}=k\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{i1} & a_{i2} & \cdots & a_{in} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix}.$$

证 由行列式定义，有

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ ka_{i1} & ka_{i2} & \cdots & ka_{in} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix}=\sum(-1)^{\tau}a_{1p_1}\cdots ka_{ip_i}\cdots a_{np_n}$$

$$=k\sum(-1)^{\tau}a_{1p_1}\cdots a_{ip_i}\cdots a_{np_n}=k\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{i1} & a_{i2} & \cdots & a_{in} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix}.$$

证毕

试读结束：需要全本请在线购买： www.ertongbook.com