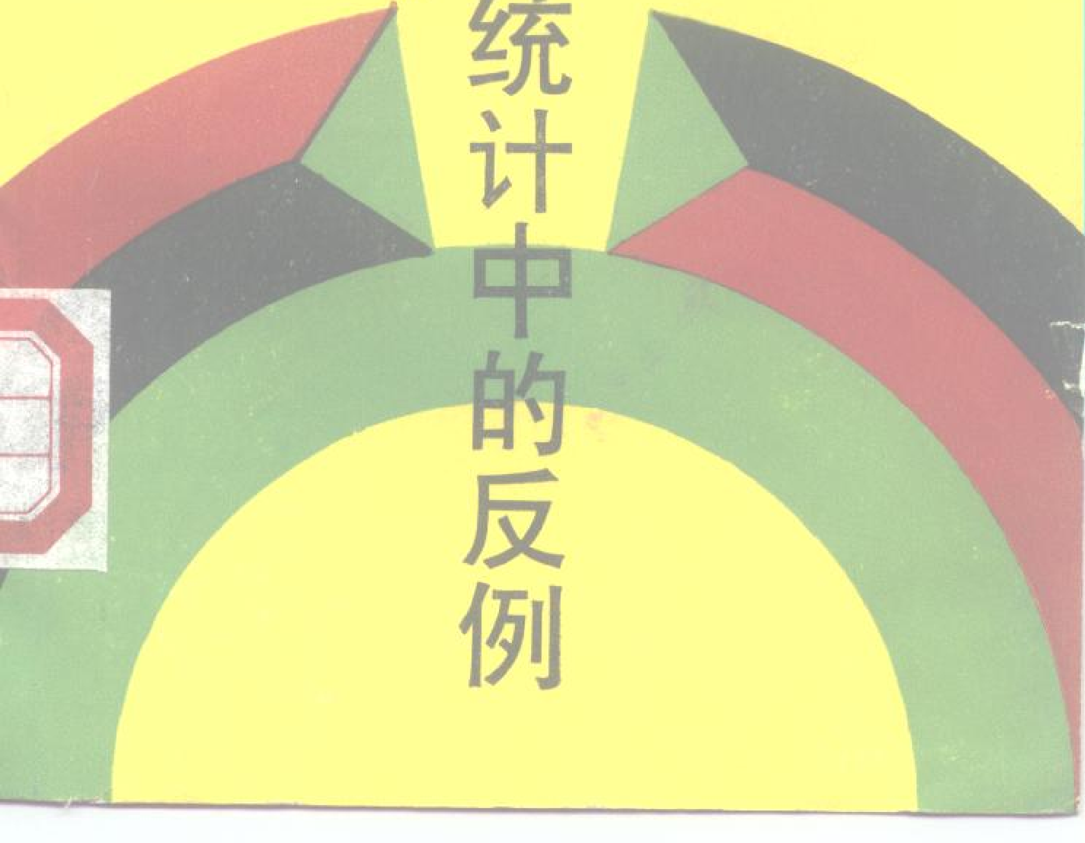
# 概率论与数理统计中的反例

陈俊雅 王秀英 编著

天津科学技术出版社



# 概率论与数理统计中的反例

陈俊雅　王秀花　编著

天津科学技术出版社

津新登字(90)003号

责任编辑:黄立民

**概率论与数理统计中的反例**

陈俊雅　王秀花　编著

*

天津科学技术出版社出版

天津市张自忠路189号　邮编300020

天津新华印刷二厂印刷

新华书店天津发行所发行

*

开本787×1092毫米 1/32 印张9.5 字数233 000

1993年11月第1版

1993年11月第1次印刷

印数:1—2 580

ISBN 7-5308-1376-5/O·68　定价:7.70元

# 前　言

概率论与数理统计是研究大量随机现象中数量规律的一门数学学科，它是近代数学的重要分支，理论严谨，应用广泛，并且与其它数学学科互相渗透结合，因此，早已成为高等学校数学系学生的一门必修基础课。而且，目前高等学校中的许多非数学专业也开设了这门课程。甚至中等学校的数学教材里，也用一定篇幅介绍了概率统计的初步知识。

粗略地讲，数学的发现可以分为两大类，即提出证明和构造反例。统观目前概率论与数理统计的教材，绝大多数都是以正面陈述的证明为主体，本书则致力于介绍概率论与数理统计中的反例。

在这本书中，我们给反例以较为广泛的定义，把不符合定义或说明一个命题不正确的例子都称为反例。显然，反例的作用是多方面的。从科学性来讲，它是推翻错误命题的手段；从教学方面来讲，它可以纠正学生的错觉，加深学生对正确命题和概念的理解。在教学过程中，恰如其分地使用一个反例，往往会收到很好的效果。

编者长期从事概率论与数理统计的教学工作，深感反例对教学工作之重要和临时构造反例之不易，因此编写了这本反例集，希望能为广大教师和学生提供一些方便。

本书适合学习概率统计的大学生，对概率统计有兴趣的读者和有关科技人员使用。对于讲授这门课程的大学教师，也

是一本有用的参考书。

本书的前七章由陈俊雅编写，第八章由王秀花编写。信阳师院的杜明全副教授协助整理了大部分初稿。南开大学的朱成熹教授和张润楚副教授认真审阅了书稿，提出了宝贵的修改意见。此外，还有不少同志为此书的出版作了不懈的努力。在此，特向这些同志表示衷心的感谢。

由于我们水平有限，书中一定会有缺点和错误，恳请同行和读者批评指正。

**编　者**

1992年6月25日

# 目　　录

# 第一章　随机试验、随机事件与概率

## 1.1　非随机试验

### 有关知识

**【定义】**　设 E 是一个试验，如果满足：

1) 在相同条件下可以重复进行；

2) 在试验之前不能准确地预料试验的结果，

则称 $E$ 是一个随机试验。

**反例**　在随机试验的定义中，1)，2) 缺一不可。

**例 1**　设 $E$：观察在一个标准大气压下水的沸点。显然 $E$ 满足 1)，但不满足 2)，所以 $E$ 不是随机试验。

**例 2**　设 $E$：观察张三从得肺癌到死亡的时间。虽然 $E$ 满足 2)，但不满足 1)，所以 $E$ 不是随机试验。

**注**：如果例 2 中的 $E$ 改为观察一个人从得肺癌到死亡的时间，则 $E$ 满足 1) 和 2)，此时 $E$ 是一个随机试验。

# 1.2 非古典型随机试验

## 有关知识

**【定义】** 如果随机试验 $E$ 满足：

1) 只有有穷个基本事件；

2) 一切基本事件都是等可能的，

则称 $E$ 是一个古典型随机试验。

**反例** 在古典型随机试验中，1)，2) 缺一不可。

**例1** 设随机试验 $E$ 为向平面区域 $\Omega$ 内任意投一质点 $M$。如果用点 $P$ 表示质点 $M$ 落在点 $P$ 上，则可能出现的结果是 $P$，$P \in \Omega$。把这些结果作为基本事件，显然，基本事件有无穷多个。即 $E$ 不满足 1)，因而 $E$ 不是古典型随机试验。

**注1** $E$ 不满足 1) 但满足 2)。事实上，由于向 $\Omega$ 内投点是任意的，所以质点落在 $\Omega$ 内每一点上的可能性都一样大。即一切基本事件都是等可能的。

**例2** 口袋里装有 3 只白球和 5 只黑球，设试验 $E$ 为从中任意取出一只球，则可能出现的结果是

$\omega_1 = \{$取出一只白球$\}$；

$\omega_2 = \{$取出一只黑球$\}$，

把这两个结果取作基本事件，则试验 $E$ 满足条件 1)，但不满足条件 2)。这是因为口袋里黑球比白球多，取到黑球的可能性比取到白球的可能性大。所以 $E$ 是非古典型随机试验。

**注2** 若将例 2 中的 8 只球分别编号为 1,2,3,4,5,6,7,8。则可能出现的结果是

$\omega_i=$｛取出一只标号为$i$的球｝，$i=1,2,\cdots 8$. 把这8个结果取作基本事件，则试验$E$满足条件1)和2)，因而是古典型随机试验。

## 1.3 非几何型随机试验

### 有关知识

**【定义】** 设$\Omega$是$n$维空间中的一个勒贝格可测集，具有有限的正测度$L(\Omega)$。向$\Omega$中投掷一质点$M$，如果点必定落在$\Omega$中，并且落在任一可测集$A\subset\Omega$中的可能性的大小与$A$的测度$L(A)$成正比，而与$A$的位置及形状无关，则称这种掷点的试验为几何型随机试验。今用$A$表示事件：｛质点$M$落在$A$中｝，并定义其概率为

$$P(A)=\frac{L(A)}{L(\Omega)}$$

这一类概率称为几何概率。

**反例**

**例** 设$E$为观察某办公室的一部电话在一昼夜24小时中接到第一次呼唤的时刻$\xi$，则$\xi$必定落在$[0,24)$中，但$\xi$落在$[8,12]$中的可能性比落在$[0,4]$中的可能性大，所以$E$不是几何型随机试验。

## 1.4 不相互独立的随机试验

### 有关知识

**【定义1】** 设$A_1,A_2,\cdots,A_n$是$n$个事件，若对所有可能

的 $1 \leqslant i < j < k < \cdots \leqslant n$，有

$$P(A_iA_j) = P(A_i)P(A_j),$$

$$P(A_iA_jA_k) = P(A_i)P(A_j)P(A_k),$$

$$\cdots$$

$$P(A_1A_2\cdots A_n) = P(A_1)P(A_2)\cdots P(A_n)。$$

则称事件 $A_1, A_2, \cdots, A_n$ 相互独立。

**【定义 2】** 设 $E_1, E_2, \cdots, E_n$ 是 $n$ 个随机试验，$A_k$ 是试验 $E_k$ 的任一事件，$k = 1, 2, \cdots, n$。如果 $A_1, A_2, \cdots, A_n$ 相互独立，则称试验 $E_1, E_2, \cdots, E_n$ 相互独立。

**反例**

**例** 有一批产品，其中有 $M$ 件正品，$N$ 件次品. 设 $E_1$ 为从这 $M + N$ 件产品中任取一件产品，$E_2$ 为从余下的 $M + N - 1$ 件产品中任取一件产品，…，$E_n$ 为从余下的 $M + N - n + 1$ 件产品中任取一件产品，$1 < n \leqslant M + N$. 则试验 $E_1, E_2, \cdots, E_n$ 不是相互独立的。

事实上，令

$A_k = \{$第 $k$ 次抽取的一个产品是次品$\}$，则 $A_k$ 是试验 $E_k (k = 1, 2, \cdots, n)$ 的事件，并且容易算出

$$P(A_1) = \frac{N}{M+N}, \quad P(\overline{A}_1) = \frac{M}{M+N},$$

$$P(A_1A_2) = P(A_1)P(A_2 | A_1) = \frac{N}{M+N} \cdot \frac{N-1}{M+N-1},$$

$$P(\overline{A}_1A_2) = P(\overline{A}_1)P(A_2 | \overline{A}_1) = \frac{M}{M+N} \cdot \frac{N}{M+N-1},$$

$$P(A_2) = P(A_1A_2) + P(\overline{A}_1A_2) = \frac{N}{M+N},$$

所以

$$P(A_1A_2) \neq P(A_1)P(A_2),$$

故事件 $A_1$ 和 $A_2$ 不相互独立，因而事件 $A_1,A_2,\cdots,A_n$ 不相互独立。于是，由定义 2 可知试验 $E_1,E_2,\cdots,E_n$ 不相互独立。

## 1.5 一个随机试验的基本事件可以有不同取法

### 有关知识

设 $A_1,A_2,\cdots,A_n$ 是随机试验 $E$ 的 $n$ 个事件，并且具有

1) 互不相容性：$A_i\cap A_j=\varnothing(i\neq j)$；

2) 完全性：$\bigcup\limits_{i=1}^{n}A_i=\Omega$，

则可取 $A_1,A_2,\cdots,A_n$ 为基本事件。

**反例** 对于一个随机试验，基本事件的取法不是唯一的。

**例 1** 掷一颗均匀的骰子，若考察朝上的一面出现的点数，则基本事件可取为

$$A_i=\{出现\ i\ 个点\},i=1,2\cdots,6.$$

显然，$A_i\cap A_j=\varnothing(i\neq j)$，$\bigcup\limits_{i=1}^{6}A_i=\Omega$。

若考察出现点数的奇偶性，则基本事件也可取作

$$A_1=\{出现奇数个点\},$$

$$A_2=\{出现偶数个点\}。$$

显然，$A_1\cap A_2=\varnothing$，$A_1\cup A_2=\Omega$.

**例 2** 一个口袋里装有 $M$ 个黑球和 $N$ 个白球，无放回地抽取 $n$ 次，每次任意取一个球。若视同色球不可辨别，则有 $C_{M+N}^{n}$ 种不同取法。显然，这些取法是互不相容的，并且是完全的，因此可把这 $C_{M+N}^{n}$ 种取法当作基本事件。若视同色球也是