

# 概率论与数理统计中的反例

陈俊雅 王秀英 编著 ● 天津科学技术出版社



# 概率论与数理统计中的反例

陈俊雅 王秀花 编著

天津科学技术出版社

津新登字(90)003号

责任编辑:黄立民

**概率论与数理统计中的反例**

陈俊雅 王秀花 编著

\*

天津科学技术出版社出版  
天津市张自忠路189号 邮编 300020

天津新华印刷二厂印刷  
新华书店天津发行所发行

\*

开本 787×1092毫米 1/32 印张 9.5 字数 223 060  
1993年11月第1版  
1993年11月第1次印刷  
印数:1—2 580

ISBN 7-5308-1376-5/O·68 定价:7.70元

# 前 言

概率论与数理统计是研究大量随机现象中数量规律的一门数学学科,它是近代数学的重要分支,理论严谨,应用广泛,并且与其它数学学科互相渗透结合,因此,早已成为高等学校数学系学生的一门必修基础课。而且,目前高等学校中的许多非数学专业也开设了这门课程。甚至中等学校的数学教材里,也用一定篇幅介绍了概率统计的初步知识。

粗略地讲,数学的发现可以分为两大类,即提出证明和构造反例。统观目前概率论与数理统计的教材,绝大多数都是以正面陈述的证明为主体,本书则致力于介绍概率论与数理统计中的反例。

在这本书中,我们给反例以较为广泛的定义,把不符合定义或说明一个命题不正确的例子都称为反例。显然,反例的作用是多方面的。从科学性来讲,它是推翻错误命题的手段;从教学方面来讲,它可以纠正学生的错觉,加深学生对正确命题和概念的理解。在教学过程中,恰如其分地使用一个反例,往往会收到很好的效果。

编者长期从事概率论与数理统计的教学工作,深感反例对教学工作之重要和临时构造反例之不易,因此编写了这本反例集,希望能为广大教师和学生提供一些方便。

本书适合学习概率统计的大学生,对概率统计有兴趣的读者和有关科技人员使用。对于讲授这门课程的大学教师,也

是一本有用的参考书。

本书的前七章由陈俊雅编写,第八章由王秀花编写。信阳师院的杜明全副教授协助整理了大部分初稿。南开大学的朱成熹教授和张润楚副教授认真审阅了书稿,提出了宝贵的修改意见。此外,还有不少同志为此书的出版作了不懈的努力。在此,特向这些同志表示衷心的感谢。

由于我们水平有限,书中一定会有缺点和错误,恳请同行和读者批评指正。

**编 者**

1992年6月25日

# 目 录

<b>第一章 随机试验、随机事件与概率</b> .....	( 1 )
1.1. 非随机试验 .....	( 1 )
1.2. 非古典型随机试验 .....	( 2 )
1.3. 非几何型随机试验 .....	( 3 )
1.4. 不相互独立的随机试验 .....	( 3 )
1.5. 一个随机试验的基本事件可以有不同取法 .....	( 5 )
1.6. 基本事件未必都是事件 .....	( 6 )
1.7. 概率不是频率的极限 .....	( 7 )
1.8. 贝特朗奇论 .....	( 8 )
1.9. 有限可加但不可列可加的集函数 .....	( 10 )
1.10. 概率为 1 的事件未必是必然事件, 概率为 0 的事件未必是 不可能事件 .....	( 11 )
1.11. 概率为 1 的事件的交事件的概率未必是 1 .....	( 12 )
1.12. 可交换事件但不是尾事件 .....	( 12 )
<b>第二章 随机变量及其分布</b> .....	( 15 )
2.1. 同一概率空间上的不同随机变量可以有相同的分布函数 .....	( 15 )
2.2. $\xi$ 的分布函数连续但不是连续型随机变量 .....	( 19 )
2.3. 奇异型随机变量的函数不一定是奇异型随机变量 .....	( 21 )
2.4. 连续型随机变量的函数不一定是连续型随机变量 .....	( 24 )
2.5. 分布函数连续的随机变量的函数可以有任意分布函数 .....	( 26 )

- 2.6. 非离散型、非连续型、非奇异型随机变量 ..... ( 26 )
- 2.7. 概率分布函数序列的极限函数未必是概率分布函数 ..... ( 27 )
- 2.8.  $\xi_n$  的分布函数趋向于  $\xi$  的分布函数, 而  $\xi_n$  的分布不趋向于  $\xi$  的分布 ..... ( 28 )
- 2.9.  $f(x, y)$  在点  $(x_0, y_0)$  连续, 但  $F_{xy}''(x_0, y_0) \neq f(x_0, y_0)$  ..... ( 31 )
- 2.10. 边际分布不能唯一确定联合分布 ..... ( 36 )
- 2.11. 求边际密度公式中的勒贝格积分不能换为黎曼积分 ..... ( 38 )
- 2.12. 分量为连续型的二维随机变量未必是连续型的 ..... ( 39 )
- 2.13.  $\xi + \eta$  是连续型随机变量而  $\xi$  和  $\eta$  不全是连续型随机变量  
..... ( 44 )
- 2.14.  $\xi$  与  $\eta$  都是连续型随机变量而  $(\xi, \eta)$  不是二维连续型随机变量  
..... ( 46 )
- 2.15. 两个不同的二维随机变量可以有相同的联合分布函数  
..... ( 48 )
- 2.16.  $\xi$  与  $\eta$  同分布而  $(\xi, \eta)$  与  $(\eta, \xi)$  不同分布 ..... ( 49 )
- 2.17.  $\xi$  与  $\eta$  是正态变量而  $(\xi, \eta)$  不是二维正态变量 ..... ( 51 )
- 2.18. 正态变量的和未必是正态变量 ..... ( 53 )
- 2.19. 非正态变量的和可能是正态变量 ..... ( 56 )
- 2.20. 独立随机变量  $\xi$  与  $\eta$  服从均匀分布而  $\xi + \eta$  不服从均匀分布  
..... ( 57 )
- 2.21.  $(\xi, \eta)$  服从均匀分布而  $\xi$  与  $\eta$  不服从均匀分布 ..... ( 58 )
- 2.22. 由  $F_1 * F_2 = F_1 * F_3$  不能推出  $F_2 = F_3$  ..... ( 59 )
- 2.23.  $F_n \rightarrow F$  而  $f_n \not\rightarrow f$  ..... ( 61 )
- 2.24.  $\xi$  与  $\eta$  同分布而  $\xi - \eta$  不是对称随机变量 ..... ( 64 )

### 第三章 随机变量的数字特征 ..... ( 68 )

- 3.1. 随机变量的各阶矩不能唯一决定其分布 ..... ( 68 )

- 3.2. 任意阶绝对矩都不存在的随机变量 ..... ( 70 )
- 3.3.  $E|\xi+\eta|^n$  存在而  $E|\xi|^n$  和  $E|\eta|^n$  不存在 ..... ( 71 )
- 3.4.  $D(\xi+\eta)$  存在而  $D\xi$  和  $D\eta$  不存在 ..... ( 73 )
- 3.5.  $F_{\xi_n}(x) \rightarrow F_{\xi}(x)$  而  $E\xi_n^k \not\rightarrow E\xi^k (k=1,2,\dots)$  ..... ( 74 )
- 3.6.  $E\xi_n^k \rightarrow E\xi^k (k=1,2,\dots)$  而  $F_{\xi_n}(x) \not\rightarrow F_{\xi}(x)$  ..... ( 76 )
- 3.7.  $E\xi_n \rightarrow E\xi$  而  $E|\xi_n| \not\rightarrow E|\xi|, E|\xi_n| \rightarrow E|\xi|$  而  $E\xi_n \not\rightarrow E\xi$  ..... ( 78 )
- 3.8.  $\lim_{n \rightarrow \infty} n^k P(|\xi| > n) = 0$  而  $E\xi^k$  不存在 ..... ( 79 )
- 3.9.  $\rho_{\xi,\eta} \neq 0, \rho_{\eta,\zeta} \neq 0$  而  $\rho_{\xi,\zeta} = 0$  ..... ( 80 )
- 3.10.  $\rho_{\xi,\eta} = 0, \rho_{\eta,\zeta} = 0$  而  $\rho_{\xi,\zeta} \neq 0$  ..... ( 81 )
- 3.11.  $g(x)$  不是凹函数而有  $g(E\xi) \leq E g(\xi)$  ..... ( 82 )

#### 第四章 独立性与相依性 ..... ( 84 )

- 4.1.  $n$  个事件两两独立而不相互独立 ..... ( 84 )
- 4.2.  $P(A_1 A_2 A_3) = P(A_1)P(A_2)P(A_3)$  而  $A_1, A_2, A_3$  不相互独立  
..... ( 85 )
- 4.3.  $A$  与  $B$  独立且  $B$  与  $C$  独立而  $A$  与  $C$  不独立 ..... ( 86 )
- 4.4. 对有限交不封闭的事件类独立类的扩张定理不成立 ..... ( 87 )
- 4.5.  $n$  个随机变量两两独立而不相互独立 ..... ( 88 )
- 4.6.  $\xi$  与  $\zeta$  独立且  $\eta$  与  $\zeta$  独立而  $(\xi, \eta)$  与  $\zeta$  不独立 ..... ( 90 )
- 4.7.  $f(\xi)$  与  $g(\eta)$  独立而  $\xi$  与  $\eta$  不独立 ..... ( 93 )
- 4.8.  $(\xi_1, \xi_2)$  与  $(\xi_3, \xi_4)$  相互独立而  $\xi_1, \xi_2, \xi_3, \xi_4$  不相互独立 ..... ( 95 )
- 4.9.  $f(\xi_1, \xi_2)$  与  $g(\xi_1, \xi_2)$  相互独立的例子 ..... ( 96 )
- 4.10.  $E(\xi\eta) = E\xi E\eta$  而  $\xi$  与  $\eta$  不相互独立 ..... ( 97 )
- 4.11. 既不相关又不独立的两个随机变量 ..... ( 99 )
- 4.12.  $f(\xi)$  与  $g(\xi)$  不相关的例子 ..... ( 101 )
- 4.13.  $\xi$  与  $\eta$  独立且  $\eta$  与  $\zeta$  独立而  $\xi$  与  $\zeta$  不独立 ..... ( 101 )
- 4.14. 独立性与不相关性等价的随机变量 ..... ( 103 )



4.15. 两个同分布但不独立的随机变量 .....	(105)
4.16. 次序统计量 $\xi_{(1)}, \xi_{(2)}, \dots, \xi_{(n)}$ 未必相互独立 .....	(107)
4.17. 两个不相互独立而条件独立的随机变量 .....	(108)
4.18. 两个相互独立而非条件独立的随机变量 .....	(109)
4.19. $E(\eta \xi) \stackrel{\text{a.s.}}{=} E\eta$ 而 $\xi$ 与 $\eta$ 相互不独立 .....	(110)
4.20. $\xi$ 与 $\eta$ 不相关而 $E(\eta \xi) \stackrel{\text{a.s.}}{=} E\eta$ 不成立 .....	(112)
4.21. $\xi$ 与 $\zeta$ 相互独立而 $E(\xi \eta, \zeta) \stackrel{\text{a.s.}}{=} E(\xi \eta)$ 不成立 .....	(114)

## 第五章 随机变量的特征函数 .....

5.1. 特征函数列的极限未必是特征函数 .....	(119)
5.2. 连续型随机变量的特征函数不一定绝对可积 .....	(120)
5.3. $\varphi_{\xi+\eta}(t) = \varphi_{\xi}(t)\varphi_{\eta}(t)$ 而 $\xi$ 与 $\eta$ 不相互独立 .....	(121)
5.4. 公式 $\varphi_{\xi^{(k)}}(0) = i^k E\xi^k$ 不能推广到多元特征函数的情形 .....	(125)
5.5. 特征函数可微而数学期望不存在的随机变量 .....	(126)
5.6. 特征函数在有限区间上的值不能唯一决定分布函数 .....	(130)
5.7. 由 $\varphi_1\varphi_2 = \varphi_1\varphi_3$ 不能推出 $\varphi_2 = \varphi_3$ .....	(132)
5.8. 不取零值但不是无穷可分的特征函数 .....	(133)
5.9. $\varphi_1\varphi_2$ 无穷可分而 $\varphi_1$ 和 $\varphi_2$ 不都是无穷可分 .....	(135)
5.10. $ \varphi $ 无穷可分而 $\varphi$ 不无穷可分 .....	(141)
5.11. 无穷可分而有不可分解因子的特征函数 .....	(141)

## 第六章 随机变量序列的收敛性 .....

6.1. 依概率收敛而不几乎处处收敛 .....	(144)
6.2. 依概率收敛而不 $r$ -阶平均收敛 .....	(147)
6.3. 几乎处处收敛而不 $r$ -阶平均收敛 .....	(148)
6.4. $r$ -阶平均收敛而不几乎处处收敛 .....	(149)
6.5. 依分布收敛而不依概率收敛 .....	(150)

6.6. 弱收敛而不完全收敛 .....	(152)
6.7. $\xi_n \xrightarrow{L} \xi$ 和 $\eta_n \xrightarrow{L} \eta$ 而 $\xi_n + \eta_n \xrightarrow{L} \xi + \eta$ 不成立 .....	(154)
6.8. $\xi_n \xrightarrow{P} 0$ 而 $\frac{1}{n} S_n \xrightarrow{P} 0$ 不成立 .....	(156)
6.9. $\xi_n \xrightarrow{L} \xi$ 而 $f(\xi_n) \xrightarrow{L} f(\xi)$ 不成立 .....	(158)
6.10. 几乎处处收敛而矩不收敛 .....	(161)
6.11. 依概率收敛而数学期望和方差都不收敛 .....	(162)
6.12. 几乎一致收敛而不 $r$ -阶平均收敛 .....	(163)
6.13. $\sum_{n=1}^{\infty} (\xi_n - E\xi_n)$ a. s. 收敛而 $\sum_{n=1}^{\infty} D\xi_n$ 发散 .....	(164)

**第七章 极限定理** .....

7.1. 波雷尔——康特立引理中事件独立性的条件不能少 .....	(166)
7.2. 不满足马尔可夫条件而服从大数定律 .....	(170)
7.3. 不满足车贝晓夫大数定律的条件而服从大数定律 .....	(171)
7.4. 不满足辛钦大数定律的条件而服从广义大数定律 .....	(173)
7.5. 服从弱大数定律而不服从强大数定律 .....	(175)
7.6. Kolmogorov 强大数定律中的独立性条件不能少 .....	(178)
7.7. Kolmogorov 强大数定律之逆不真 .....	(179)
7.8. 服从强大数定律而不服从中心极限定理 .....	(181)
7.9. 服从中心极限定理而不服从大数定律 .....	(184)
7.10. 服从中心极限定理而不满足林德贝格条件 .....	(186)
7.11. 满足林德贝格条件而不满足李雅普诺夫条件 .....	(187)
7.12. 满足费勒条件而不满足林德贝格条件 .....	(191)
7.13. 既不服从大数定律又不服从中心极限定理 .....	(192)
7.14. 既服从强大数定律又服从中心极限定理 .....	(196)
7.15. 服从中心极限定理的相依随机变量序列 .....	(198)

7.16. 服从大数定律的相依随机变量序列 .....	( 202 )
7.17. 服从强大数定律与中心极限定理的相依随机变量序列 .....	( 204 )
7.18. 不服从大数定律与中心极限定理的相依随机变量序列 .....	( 207 )

## 第八章 数理统计 ..... ( 214 )

8.1. 样本均值 $\bar{x}$ 与样本方差 $S_n^2$ 未必独立 .....	( 214 )
8.2. 矩估计不唯一 .....	( 216 )
8.3. 矩估计未必存在 .....	( 217 )
8.4. 极大似然估计(MLE)不唯一 .....	( 218 )
8.5. 无偏估计未必存在 .....	( 220 )
8.6. 无偏估计存在但未必合理 .....	( 222 )
8.7. 非一致估计是存在的 .....	( 223 )
8.8. 一致估计不唯一 .....	( 224 )
8.9. 若 $\hat{\theta}$ 是 $\theta$ 的无偏估计而 $u(\hat{\theta})$ 未必是 $u(\theta)$ 的无偏估计 .....	( 224 )
8.10. MLE 的另一种求法 .....	( 225 )
8.11. MLE 未必是一致估计 .....	( 227 )
8.12. 非指数型分布族是存在的 .....	( 229 )
8.13. 不完备的分布族是存在的 .....	( 231 )
8.14. 充分而不完备的统计量 .....	( 233 )
8.15. 不充分而完备的统计量 .....	( 236 )
8.16. 既不充分也不完备的统计量 .....	( 238 )
8.17. 不完备的分布族可能有完备的统计量 .....	( 241 )
8.18. 联合充分统计量的分量未必是充分统计量 .....	( 242 )
8.19. 有界完备未必是完备的 .....	( 244 )

8.20. 若可测函数 $f(X)$ 的分布与未知参数 $\theta$ 有关, $f(X)$ 也可能与有 界完备统计量 $t(X)$ 独立 .....	( 246 )
8.21. 极大似然估计未必是充分估计量 .....	( 247 )
8.22. 非有效估计的例 .....	( 248 )
8.23. 无偏估计的方差可能低于 $C-R$ 下界 .....	( 253 )
8.24. 有效估计未必存在 .....	( 254 )
8.25. Rao-Cramér 不等式的条件不被满足也可能存在一致最小方 差无偏估计 .....	( 257 )
8.26. 若 $\hat{\theta}$ 是 $\theta$ 的有效估计, $u(\hat{\theta})$ 未必是 $u(\theta)$ 的有效估计 .....	( 260 )
8.27. 极大似然估计未必是有效估计 .....	( 263 )
8.28. 充分估计量未必是有效估计 .....	( 264 )
8.29. 若 $\theta$ 的估计量 $\hat{\theta}$ 渐近地服从正态分布 $N(\theta, \frac{1}{nI(\theta)})$ , 也不能说 $\hat{\theta}$ 是 $\theta$ 的渐近有效估计 .....	( 266 )
8.30. 次序统计量 $(X_{(1)}, X_{(2)}, \dots, X_{(n)})$ 未必完备 .....	( 269 )
8.31. 总体分布为连续型 MP 检验也可能是随机化检验 .....	( 271 )
8.32. UMP 检验可能不存在 .....	( 277 )
8.33. UMP 检验是无偏检验但反之不真 .....	( 279 )
8.34. UMP 检验不存在而 UMP 无偏检验存在 .....	( 282 )
<b>参考文献</b> .....	( 286 )

# 第一章 随机试验、随机事件 与概率

## 1.1 非随机试验

### 有关知识

**【定义】** 设  $E$  是一个试验, 如果满足:

- 1) 在相同条件下可以重复进行;
- 2) 在试验之前不能准确地预料试验的结果,

则称  $E$  是一个随机试验。

**反例** 在随机试验的定义中, 1), 2) 缺一不可。

**例 1** 设  $E$ : 观察在一个标准大气压下水的沸点。显然  $E$  满足 1), 但不满足 2), 所以  $E$  不是随机试验。

**例 2** 设  $E$ : 观察张三从得肺癌到死亡的时间。虽然  $E$  满足 2), 但不满足 1), 所以  $E$  不是随机试验。

**注:** 如果例 2 中的  $E$  改为观察一个人从得肺癌到死亡的时间, 则  $E$  满足 1) 和 2)。此时  $E$  是一个随机试验。

## 1.2 非古典型随机试验

### 有关知识

**【定义】** 如果随机试验  $E$  满足:

- 1) 只有有穷个基本事件;
- 2) 一切基本事件都是等可能的,

则称  $E$  是一个古典型随机试验。

**反例** 在古典型随机试验中, 1), 2) 缺一不可。

**例1** 设随机试验  $E$  为向平面区域  $\Omega$  内任意投一质点  $M$ 。如果用点  $P$  表示质点  $M$  落在点  $P$  上, 则可能出现的结果是  $P$ ,  $P \in \Omega$ 。把这些结果作为基本事件, 显然, 基本事件有无穷多个。即  $E$  不满足 1), 因而  $E$  不是古典型随机试验。

**注1**  $E$  不满足 1) 但满足 2)。事实上, 由于向  $\Omega$  内投点是任意的, 所以质点落在  $\Omega$  内每一点上的可能性都一样大。即一切基本事件都是等可能的。

**例2** 口袋里装有 3 只白球和 5 只黑球, 设试验  $E$  为从中任意取出一只球, 则可能出现的结果是

$$\omega_1 = \{\text{取出一只白球}\};$$

$$\omega_2 = \{\text{取出一只黑球}\},$$

把这两个结果取作基本事件, 则试验  $E$  满足条件 1), 但不满足条件 2)。这是因为口袋里黑球比白球多, 取到黑球的可能性比取到白球的可能性大。所以  $E$  是非古典型随机试验。

**注2** 若将例2中的 8 只球分别编号为 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8。则可能出现的结果是

$\omega_i = \{\text{取出一只标号为 } i \text{ 的球}\}, i = 1, 2, \dots, 8$ . 把这 8 个结果取作基本事件, 则试验  $E$  满足条件 1) 和 2), 因而是古典型随机试验。

### 1.3 非几何型随机试验

#### 有关知识

**【定义】** 设  $\Omega$  是  $n$  维空间中的一个勒贝格可测集, 具有有限的正测度  $L(\Omega)$ . 向  $\Omega$  中投掷一质点  $M$ , 如果点必定落在  $\Omega$  中, 并且落在任一可测集  $A \subset \Omega$  中的可能性的大小与  $A$  的测度  $L(A)$  成正比, 而与  $A$  的位置及形状无关, 则称这种掷点的试验为几何型随机试验. 今用  $A$  表示事件: {质点  $M$  落在  $A$  中}, 并定义其概率为

$$P(A) = \frac{L(A)}{L(\Omega)}$$

这一类概率称为几何概率。

#### 反例

**例** 设  $E$  为观察某办公室的一部电话在一昼夜 24 小时中接到第一次呼唤的时刻  $\xi$ , 则  $\xi$  必定落在  $[0, 24)$  中, 但  $\xi$  落在  $[8, 12]$  中的可能性比落在  $[0, 4]$  中的可能性大, 所以  $E$  不是几何型随机试验。

### 1.4 不相互独立的随机试验

#### 有关知识

**【定义 1】** 设  $A_1, A_2, \dots, A_n$  是  $n$  个事件, 若对所有可能

的  $1 \leq i < j < k < \dots \leq n$ , 有

$$P(A_i A_j) = P(A_i)P(A_j),$$

$$P(A_i A_j A_k) = P(A_i)P(A_j)P(A_k),$$

...

$$P(A_1 A_2 \dots A_n) = P(A_1)P(A_2) \dots P(A_n).$$

则称事件  $A_1, A_2, \dots, A_n$  相互独立。

**【定义 2】** 设  $E_1, E_2, \dots, E_n$  是  $n$  个随机试验,  $A_k$  是试验  $E_k$  的任一事件,  $k = 1, 2, \dots, n$ 。如果  $A_1, A_2, \dots, A_n$  相互独立, 则称试验  $E_1, E_2, \dots, E_n$  相互独立。

### 反例

**例** 有一批产品, 其中有  $M$  件正品,  $N$  件次品。设  $E_1$  为从这  $M + N$  件产品中任取一件产品,  $E_2$  为从余下的  $M + N - 1$  件产品中任取一件产品,  $\dots, E_n$  为从余下的  $M + N - n + 1$  件产品中任取一件产品,  $1 < n \leq M + N$ 。则试验  $E_1, E_2, \dots, E_n$  不是相互独立的。

事实上, 令

$A_k = \{\text{第 } k \text{ 次抽取的一个产品是次品}\}$ , 则  $A_k$  是试验  $E_k$  ( $k = 1, 2, \dots, n$ ) 的事件, 并且容易算出

$$P(A_1) = \frac{N}{M + N}, \quad P(\bar{A}_1) = \frac{M}{M + N},$$

$$P(A_1 A_2) = P(A_1)P(A_2 | A_1) = \frac{N}{M + N} \cdot \frac{N - 1}{M + N - 1},$$

$$P(\bar{A}_1 A_2) = P(\bar{A}_1)P(A_2 | \bar{A}_1) = \frac{M}{M + N} \cdot \frac{N}{M + N - 1},$$

$$P(A_2) = P(A_1 A_2) + P(\bar{A}_1 A_2) = \frac{N}{M + N},$$

所以

$$P(A_1 A_2) \neq P(A_1)P(A_2),$$



故事件  $A_1$  和  $A_2$  不相互独立,因而事件  $A_1, A_2, \dots, A_n$  不相互独立。于是,由定义 2 可知试验  $E_1, E_2, \dots, E_n$  不相互独立。

## 1.5 一个随机试验的基本事件可以有不同取法

### 有关知识

设  $A_1, A_2, \dots, A_n$  是随机试验  $E$  的  $n$  个事件,并且具有

1) 互不相容性:  $A_i \cap A_j = \emptyset (i \neq j)$ ;

2) 完全性:  $\bigcup_{i=1}^n A_i = \Omega$ ,

则可取  $A_1, A_2, \dots, A_n$  为基本事件。

**反例** 对于一个随机试验,基本事件的取法不是唯一的。

**例 1** 掷一颗均匀的骰子,若考察朝上的一面出现的点数,则基本事件可取为

$$A_i = \{\text{出现 } i \text{ 个点}\}, i = 1, 2, \dots, 6.$$

显然,  $A_i \cap A_j = \emptyset (i \neq j)$ ,  $\bigcup_{i=1}^6 A_i = \Omega$ 。

若考察出现点数的奇偶性,则基本事件也可取作

$$A_1 = \{\text{出现奇数个点}\},$$

$$A_2 = \{\text{出现偶数个点}\}.$$

显然,  $A_1 \cap A_2 = \emptyset$ ,  $A_1 \cup A_2 = \Omega$ 。

**例 2** 一个口袋里装有  $M$  个黑球和  $N$  个白球,无放回地抽取  $n$  次,每次任意取一个球。若视同色球不可辨别,则有  $C_{M+N}^n$  种不同取法。显然,这些取法是互不相容的,并且是完全的,因此可把这  $C_{M+N}^n$  种取法当作基本事件。若视同色球也是