高等学校教学用書

分析引論

И. М. 烏瓦連柯夫
М. З. 馬尔列尔 著

人民教育出版社

高等学校教学用書

分析引論

И. М. 烏瓦連柯夫, М. З. 馬尔列尔著
李棨湅　梁永富譯

人民教育出版社

本書系根据苏俄教育書籍出版社 (Государственное учебно-педагогическое издательство министерства просвещения рсфср) 出版的烏瓦連柯夫 (И. М. Уваренков) 与馬尔列尔 (М. З. Маллер) 所著"分析引論"(Введение в анализ) 1951 年初版譯出。原書經苏俄教育部审定为师范学院教学参考書。

本書序言、引論、第一章、第四章、練習答案諸部分系李荣凍所譯。第二章、第三章为梁永富所譯。

本书原由高等教育出版社出版。自 1960 年 4 月 1 日起，高等教育出版社奉命与人民教育出版社合并，統称"人民教育出版社"。因此本书今后用人民教育出版社名义継續印行。

分　析　引　論

И. М. 烏瓦連柯夫，М. З. 馬尔列尔著

李荣凍　梁永富譯

人民教育出版社出版 高等学校教材編輯部 北京宣武門內承恩寺 7 号

(北京市书刊出版业营业許可証出字第 2 号)

商务印书館上海厂印刷
新华书店上海发行所发行
各地新华书店經售

統一书号 13010·306　开本 850×1168 1/32　印張 8 8/16
字数 218,000　印数 12,001—16,000　定价(4) ¥ 0.85
1954 年 1 月商務初版(共印 16,300 冊)
1957 年 4 月新 1 版　1960 年 5 月上海第 7 次印刷

序 言

本書是數學分析教程的基礎部份，作者們將本書寫出來適合現行高等師範學校教學大綱的要求。在這一部份裏給出了數學分析的基本概念。

爲了使函授學校的學生也能利用這本參考書來自修，關於材料的敍述，作者們儘可能求其更容易理解，所以有時給出詳盡的說明。

作者們回憶起首先審閱本書初稿的蘇聯科學院通訊院士斯捷潘諾夫(В. В. Степанов)教授，實在深深感激，他曾對本書提供了許多有益的意見。作者們對諾維可夫(П. С. Новиков)教授和蘇俄科學院副院長馬爾庫什維奇(А. И. Маркушевич)教授也表示衷心的感謝，他們曾經審查過本書初稿並提供了許多寶貴的意見。作者們對本書校訂人可若夫肯(П. П. Коровкин)亦表示以十分銘感，因他在校訂本書的過程中，作了重大的工作。

作者們

1950 年於斯摩稜斯克城

目 錄

引論 數

§1. 有理數

數的概念乃數學分析的基本概念之一。這個概念是悠久地並且極其緩慢地成長起來的。遠在太古時代，由於計算各別物體，結果發生了數的概念，這裏所指的數乃今日所謂的正整數。全部正整數形成自然數列，即數列：

$$1, 2, 3, 4, 5, \cdots, n, \cdots,$$

此數列從 1 開始，用順次加 1 的方法可延續到任意遠。以後在自然數增加了分數❶，分數對於可分成部份的量的測定是必須的。一方面，若僅用數的這個蘊藏要從較小的數中減去較大的數是不可能的，另一方面，爲了確立解方程式的普遍方法而引起推廣減法運算的趨勢，這二者引起了須把數的概念作更進一步的推廣——引入負數。我們初次遇見負數是在公元 III—IV 世紀希臘數學家嘉凡特(Диофант)的著作中。在公元 V 世紀印度人已運用過零這個數。

一切整數，即正整數和負整數，連同零這個數與形狀爲 $\frac{p}{q}$ 的一切分數，其中 p 和 q 爲整數(且 p 不能被 q 所整除)，並且 $q \neq 0$，所有這些數統稱爲有理數。

茲指出有理數的一些性質，這都是今後常常要用到的：

1. 無論將有理數加，減，乘，除(除數爲零的情形除外)，作正整數幕的乘方，其結果仍得有理數。

---

❶ 在太古時代(四千年以前)的古物——埃及的紙草紙書和巴比倫人的楔形文表——中有一些數學的記載，使我們能判斷在那遠古時代就已經知道整數和(部份地)分數，以及關於對他們的一些運算。

2. 每兩個相異的有理數 a 和 b 中，有一個而且僅有一個大於另一個，同時，第二個小於第一個，並且，若 $a>b$ $(a<b)$ 和 $b>c$ $(b<c)$，則 $a>c$ $(a<c)$.

全體有理數的這個性質叫做它的有序性。

3. 若已知任意二相異有理數 a 和 b $(a<b)$，則一定能找到第三個有理數 c，介於前二者之間。

例如，a 和 b 二數的算術平均數：$\frac{a+b}{2}=c$ 就是這樣的一個例子。事實上，根據性質 1，數 c 爲有理數。爲了要證明它是介於 a 和 b 二數之間的數，我們來作出差 $b-c$ 和 $c-a$：

$$b-c=b-\frac{a+b}{2}=\frac{2b-a-b}{2}=\frac{b-a}{2}>0,$$

$$c-a=\frac{a+b}{2}-a=\frac{a+b-2a}{2}=\frac{b-a}{2}>0.$$

所以 $$a<c<b.$$

全體有理數的這個性質叫做它的密集性。

對於求解形狀爲 $ax+b=0$ 的任何方程式(其中 a 和 b 是整數並且 $a\neq 0$)，有理數已足夠了。但是若僅限於有理數，則如方程式 $x^2-2=0$ (或 $x^3-5=0$) 就不能解。由此得知，有理數的蘊藏對於求解某些方程式來講是不夠的，必須引入新的數(無理數)來擴充有理數。

§2. 用直線上的點來代表數的表示法

將有理數與直線的點來對照，引入新數的必要性也是顯然的。

取直線(圖 1)。在其上記出某一定點 O。稱此點爲"原點"或"零點"。規定出直線的正方向，例如從左至右。其次，取直線上的某一線段 e 並把它作爲長度單位。

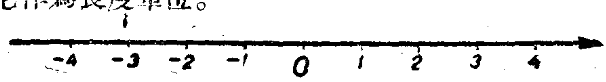

圖 1

在直線上從 O 點起向右和向左依次取單位線段的一倍,二倍,三倍,依此類推下去,我們得到直線上的許多點,我們將認為這些點是對應於 $\pm 1, \pm 2, \pm 3, \cdots, \pm n, \cdots$ 諸數的點。

這些點叫做直線上的整數點。假若現在取所選長度單位的 $\frac{1}{m}$ 部份,並從 O 點起向左右兩方取它的任意多倍,則將得到對應於形如 $\pm\frac{n}{m}$ 的數的一切點,即對應於有理分數的一切點。

因此,我們作出了直線上與原點的距離可用有理數表示的一切點。為簡便計,稱這些點為有理點。若在直線上指定了原點和正方向並沿它取定可用長度單位所量的線段並加上適當的符號,這樣的直線叫做數軸。

這樣一來,對於每一個有理數便有一個而且只有一個在直線上的點與之對應。但是,若我們反過來推想,對於直線上的每一點便有某一有理數與之對應,這就錯了,即是說推想有理數密集地充滿全直線,就錯了。我們現在來證明直線上有不與任何有理數對應的點存在。於此我們來作這個命題的證明,此命題還是屬於歐幾里得(公元前III世紀)的呢。

我們現在來研究直角邊等於長度單位的等腰直角三角形。在數軸上,從 O 點向一方,例如向右取此三角形的斜邊。我們得到數軸上的某一點 N(圖 2)。現在來證明這一點異於我們在以上所作出的有理點,就是說無任何有理數對應於它。因為 $ON^2=OC^2=1^2+1^2=2$,

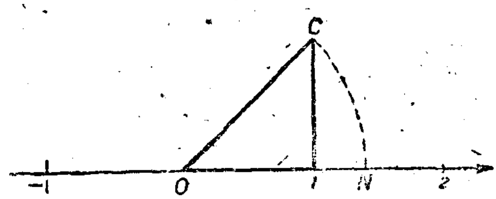

圖 2

所以要證明這一點,只須表明平方等於 2 的正有理數不存在就行了。

這樣的數在整數中是沒有的,因為 $1^2=1$,但對於 $n\geqslant 2$ 則 $n^2\geqslant 2^2>2$. 這樣的數在正分數中也是沒有的。實際上,假使存在着有一既約分數 $\frac{p}{q}$ 且 $\left(\frac{p}{q}\right)^2=2$。那麼

$$p^2 = 2q^2. \tag{1}$$

這個等式的右端能被 2 所整除，所以左端，即 p^2 也能被 2 所整除。因爲奇數 $2n-1$ 的平方仍是奇數：$4n^2-4n+1=2(2n^2-2n)+1$，所以 p 不能是奇數，卽是說 p 是偶數：$p=2m$(其中 m——整數)。將 p 的這個值代入等式(1)，得：$(2m)^2=2q^2$，或 $2m^2=q^2$，這卽是說 q^2 是偶數，隨之 q 也是偶數：$q=2n$，因之分數 $\frac{p}{q}$ 的分子和分母皆爲可用 2 約的偶數，這與原來假定分數 $\frac{p}{q}$ 是既約的相矛盾。所得的矛盾證明了平方等於 2 的既約有理正分數不存在。但是平方等於 2 的可約正分數也不存在，因爲任何可約分數，當把它化爲既約分數後，其大小並不變更，但對於既約正分數的情形定理已被證明。

這就是證明了直線上有不爲任何有理數所對應的點存在。這樣的點在直線上可以指出隨便好多。因爲，若取等腰直角三角形(其直角邊等於長度單位)斜邊 d 的有理部份 $\frac{n}{m}d$ 並在數軸上從原點起向右取這些線段，則所有這些線段的末端皆不爲任何有理數所對應，因爲若 $\frac{n}{m}d$ 能用有理數 $\frac{r}{s}$ 表示，則 d 就能用有理數 $\frac{r}{s}\cdot\frac{m}{n}$ 來表示(參看有理數的性質 1)，根據上面已證明的，得知這是不可能的事。

從以上的敘述得出下面的定理。

定理. 平方等於 2 的有理數不存在(卽是說，方程式 $x^2-2=0$ 在有理數域內不能解)。

因此，要使直線上的每一點可以有任何一個數來對應於它，有理數已不夠了。所以，如果我們希望利用數來表示直線上的任何一點，卽是說，利用所選定的長度單位量直線上的任何線段，則我們必須引入新數以充實有理數現有的蘊藏。

§3. 無理數的定義

我們現在轉論無理數的建立。取一切有理數的全體，或所謂集合

並分它爲兩類：A 類和 B 類。假若以下三條件滿足，則稱有理數的這種分類爲一分割：

1. A 類與 B 類均非空集(即是說每一類中至少含有一個數)。
2. 每一個有理數必屬於而且僅屬於 A 類或 B 類之一。
3. 屬於 A 類的每一個有理數小於屬於 B 類的每一個有理數。

A 類名爲分割的下類或左類，而 B 類名爲分割的上類或右類。用這樣的方法所定義的分割記爲：(A, B)。

從分割的定義推出：若 a 爲下類的任一數，則小於 a 的任何有理數也屬於下類，因爲反過來就與定義分割的條件 3 相違背。完全相同地，若 b 爲屬於 B 類的數，則大於 b 的任何有理數必屬於 B 類。

讓我們來證明在有理數域中這樣的分類是可能的。取任一有理數 r 並用下面的方法分一切有理數爲 A 類和 B 類：凡小於 r 的一切有理數和 r 這個數本身都歸入下類 A，而大於 r 的有理數歸入 B 類。不難證明這樣一來我們實際上已得到一分割。首先易知 A 類和 B 類均非空集。其次，我們指出任何一個數，則可按它小於 r，等於 r 或大於 r 而把它歸入 A 類或歸入 B 類，而且僅可歸入其中之一類。定義分割的第 3 條件滿足。實際上，設 a 爲 A 類中任一數，而 b 爲 B 類中任一數。因爲 A 類的數小於或等於 r，那麼 $a \leqslant r$，又因 B 類的數大於 r。由此得 $a \leqslant r < b$，所以 $a < b$。

因此，我們把有理數分爲兩類所作的分類事實上是一分割。

同時應當注意，r 爲下類 A 中一切數之最大者。事實上，第一，數 r 本身屬於 A 類(由這一類的構成法知道)；第二，根據條件，歸入 A 類之數僅爲不大於 r 者。因此，A 類中有最大的數。

同時 B 類中無最小的數。設 b_1 爲 B 類中的任一數。那麼應有 $b_1 > r$。但是在 r 與 b_1 之間還能指出一個有理數 b_2：$r < b_2 < b_1$。顯而易見，b_2 屬於上類。但因 $b_2 < b_1$，則 b_1 非 B 類中的最小數。這樣一來，對於 B 類中的任一數 b_1 均可指出同一類中小於它的數 b_2，換句

話說，在 B 類中無最小數。

現在用同樣的有理數 r 進行分有理數爲兩類的另一種分類：凡小於 r 的一切數歸入 A 類，數 r 本身以及大於 r 的一切數歸入 B 類。容易看出，這個分類也是一分割。顯而易見，於此 r 爲 B 類中最小的數：按這類本身的定義它只包含不小於 r 的一切數，故 r 屬於 B 類。但是現在下類中就沒有最大的數。設 a_1 爲下類中的任一數，所以，$a_1<r$，那麼可以指出這樣的一個有理數 a_2，它滿足 $a_1<a_2<r$，所以，a_1 非下類中的最大數。即是說，對於 A 類中的任一數 a_1 可以在同一類中指出大於它的數 a_2，換句話說，A 類中無最大數。

這樣一來，當我們用上面所講的兩種方法之一藉助於有理數 r 進行有理數的分類，則得一分割，對於這個分割下面的兩種情形必有一滿足：抑或 r 爲下類中最大的數，那麼上類中就無最小數，抑或 r 爲上類中最小的數，那麼下類中就無最大數。

自然地，下面的問題會發生：能否作一分割，使得下類中無最大數，而上類中亦無最小數。

讓我們來證明，這樣的分割是可能的。用下面的方法分一切有理數爲兩類：將一切負有理數，零和平方小於 2 的那一切正有理數歸入 A 類，但將平方大於 2 的那一切正有理數歸入 B 類。顯而易見，這是一分割。A 類和 B 類均非空集。其次，我們指出任何一個有理數，可將它或歸入 A 類，或歸入 B 類（並且只能歸入其中之一類），因爲有理數中無平方等於 2 的數（§ 2）。最後，屬於 A 類的每一個有理數小於屬於 B 類的每一個有理數。

不難證明，構成 A 類的有理數中無最大的數，而構成 B 類的有理數中無最小的數，換句話說，即該分割的兩側是開的。例如我們來證明 A 類中無最大的數。在 A 類中取任一正數 r①，於是 $r^2<2$（當 r 爲負數時，此不等式可能不成立）。現在我們來證明，在 A 類中有大於 r 的

① 這樣的數在 A 類中一定存在，例如，因爲 $1^2=1<2$。

數。選取數 $r'=r+\frac{1}{n}$，其中 n——某一暫爲任意的自然數。r' 大於 r。因此，若我能證明當適當選取 n 時，r' 爲 A 類的數(爲了這點，只要能證明 $r'^2<2$ 就行了)，則我們的論斷就被證明了。條件 $r'^2<2$ 可寫爲這樣的形狀

$$\left(r+\frac{1}{n}\right)^2<2. \tag{1}$$

這個不等式與下式完全一樣：

$$r^2+\frac{2r}{n}+\frac{1}{n^2}<2,\quad \frac{1}{n}\left(2r+\frac{1}{n}\right)<2-r^2$$

或

$$n>\frac{2r+\frac{1}{n}}{2-r^2}. \tag{2}$$

選擇滿足此不等式的數 n，我們用這樣的 n 就能滿足不等式(1)。然而這樣的 n 甚易挑選。這樣來選擇 n，使得

$$n>\frac{2r+1}{2-r^2}$$

(這是永遠能辦到的事)。那麼這個 n 更能滿足不等式(2)，(因爲 $n\geqslant 1$，$\frac{1}{n}\leqslant 1$，$2>r^2$)，而這也就能滿足(1)。因此，對於 A 類中任何的正數 r，能找到同一類中大於它的數 $r'=r+\frac{1}{n}$，所以 A 類中無論任何的正數皆不是該類中的最大數。

在證明時我們曾假定 $r>0$。任何的負數或零更不能爲 A 類中之最大數，因爲 A 類顯然包含有正數。這樣一來，實際上，A 類中無最大數。

仿此可證，B 類中無最小的數。

最後，我們來證明，在下類 A 中存在有最大的數 a_0，而同時在上類 B 中存在有最小的數 b_0 這樣的分割不能存在。假設這樣的分割存在。根據有理數的性質 3 (§1) $\frac{a_0+b_0}{2}$ 是介於 a_0 與 b_0 之間的有理數，因此

$$a_0 < \frac{a_0 + b_0}{2} < b_0.$$

因爲 a_0 是 A 類的最大數，則大於它的數 $\frac{a_0+b_0}{2}$ 不能歸入 A 類。根據類似的理由，$\frac{a_0+b_0}{2}$ 也不能歸入 B 類，即是說 $\frac{a_0+b_0}{2}$ 既不落在 A 類，也不落在 B 類，根據定義分割概念的條件 2，這是不可能的。

最後注意到，對於任何的分割在下類中不存在最小的數，而在上類中不存在最大的數。事實上，若 a 爲下類的任一數，則 $a-1$（小於 a 的數）也屬於下類。

完全相同，若 b 爲此分割的上類中的數，則 $b+1$ 也爲上類的數。

至此我們可以這樣說：分割的一切類型就限於所研究過的有理數域內這三類分割。因此，我們有：

1. 分割 (A, B) 的下類 A 中有最大的數 r，而在上類 B 中無最小的數。

2. 下類 A 中無最大的數，而在上類 B 中有最小的數 r。

3. 最後，下類中既無最大的數，上類中亦無最小的數。

前兩類的分割我們稱爲有理的。每一個有理數 r 定義出前兩類的分割，即是說某一個有理分割。我們也將說有理分割定義出這樣一個有理數 r，它或爲 A 類中的最大數，或爲 B 類中的最小數（它爲 A 類與 B 類之間的"分界"數）。

第 3 類的分割稱爲無理的。無理分割不定義出任何有理數。對於這個分割我們還沒有"分界"數，它把 A 類的數和 B 類的數分開，因爲在有理數中僅 A 類中的最大數或 B 類中的最小數能爲這樣的數。

那麼引入新數——無理數。就是，將認爲第 3 類的任一分割定義出某一無理數 α。這個數 α 可以作爲"插入"於 A 類的一切數與 B 類的一切數之間的數（作爲 A 與 B 二類之間的"境界"）。

給定一個無理數——這就是說指出了某一個第 3 類的分割。特別

是，在上面所舉第 3 類分割的例子中，定義了某一無理數。可以預知，這個無理數就是我們通常用記號 $\sqrt{2}$ 表示的數。

因此，有理數的全體由新的數——無理數充實起來了。有理數和無理數統稱做實數。

§ 4. 實數集的有序性

現在通過對實數的應用來建立大於和小於的概念。在這裏我們規定，一般以字母 $x, y, z, \cdots$ 表示實數，以字母 $\alpha, \beta, \gamma, \cdots$ 表示無理數，而以字母 $a, b, c, \cdots$ 表示有理數。再者，如果數 x 用分割 (A, B) 來定義，則我們把這件事用記號寫成：$x=(A, B)$。

取兩個實數 x 和 y。設 $x=(A, B)$, $y=(A_1, B_1)$。

1. 如果 $x=a$ 和 $y=b$，換言之，如果 x 和 y 是有理數，則由算術中已經知道如何定義它們相等和不等的概念。

2. 如果 $x=\alpha$ 和 $y=c$，換言之，如果 x 爲無理數，而 y 爲有理數，則按定義認爲它們不相等。它們之間“大於”和“小於”的關係由以下的方法來確定：如果有理數 c 屬於下類 A，則認爲無理數 α 大於有理數 c；如果有理數 c 屬於上類 B，則認爲無理數 α 小於有理數 c。這個分割 (A, B) 的情況用圖解法繪出在圖 3 和圖 4 中。

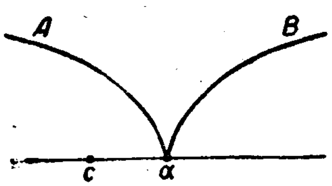

圖 3

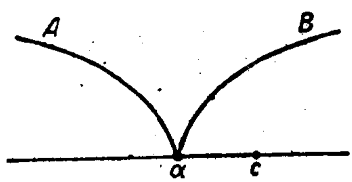

圖 4

與有理數的情形類似，如果無理數大於零（換言之，零是包含在定義此無理數的分割的下類中），我們就稱此無理數是正的，如果它小於零（換言之，零包含在分割的上類中），就稱此無理數是負的。

3. 如果 $x=\alpha$ 和 $y=\beta$, 換言之, x 和 y 皆爲無理數, 則規定在而且僅在定義它們的分割相同的情形, 才認爲二無理數 α 和 β 相等。

如果 A 類與 A_1 類相同, 隨之 B 類也和 B_1 類相同, 則在這種情況下, 我們有的並非兩個分割, 而是一個分割 $(A, B)=(A_1, B_1)$, 所以 $\alpha=\beta$。

如果 A 類不與 A_1 類相同, 則可想像有以下 3 種情形:

(a) 有屬於 A_1 類而不屬於 A 類的有理數存在;

(б) 有屬於 A 類而不屬於 A_1 類的有理數存在;

(в) 有屬於 A 類而不屬於 A_1 類的有理數存在; 同時又有屬於 A_1 類而不屬於 A 類的有理數存在。

現在我們來研究第一種情形。設 c 爲屬於 A_1 類, 但不屬於 A 類的有理數, 那麼 c 屬於 B 類。如果現有 r 爲 A 類中的任一數, 則 $r<c$, 因爲數 c 包含在 B 類中。但是 c 屬於 A_1 類, 所以, r 也屬於這一類, 換言之, A 類中的任一數 r 原來是屬於 A_1 類。在這種情況下我們說 A 類本身屬於 A_1 類(或者完全被包含於 A_1 類之中)。

其次, 顯而易見, 如果 r_1 爲 B_1 類中的任一數, 則 r_1 不能屬於 A_1 類, 所以, 也不能包含在 A 類中, 即是說 r_1 屬於 B 類。因此, B_1 類的任一數屬於 B 類, 換言之, B_1 類被包含在 B 類之中。

這樣一來, 在所研究的情形中 A 類完全被包含於 A_1 類之中, 而 B_1 類完全被包含於 B 類之中。在分割 (A, B) 和 (A_1, B_1) 的各類之間有這種關係時, 我們按定義就認爲: 用第一個分割所定義的無理數 α 小於用第二個分割所定義的無理數 β, 並寫爲:

$$\alpha<\beta.$$

如果數 α 小於數 β, 則也可以說數 β 大於數 α, 並寫爲:

$$\beta>\alpha.$$

用圖解法將這個情形繪在圖 5 中。

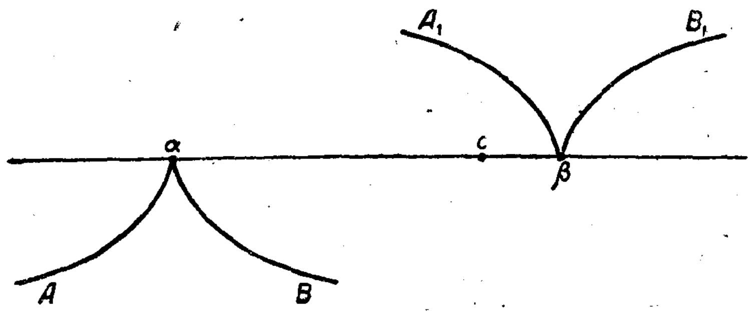

圖 5

同樣，如果（在第二種情形）發現在 A 類中有不包含在 A_1 類中的數，則利用相同的論證我們得到：A_1 類被包含在 A 類中，而 B 類被包含在 B_1 類中。在這樣的情況下，根據上面所引入的定義，我們有：數 β 小於數 α（$\beta<\alpha$）或換一說法，數 α 大於數 β（$\alpha>\beta$）。

用圖解法將此情形繪在圖 6 中。

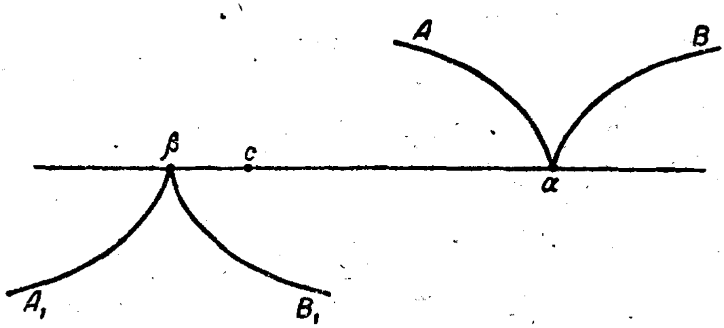

圖 6

因為在兩種情形中都顯示出了在 A 類或 A_1 類中，有只屬於其中之一類而不屬另一類之數存在，自然地引起了其中之一類是在其他一類之中所以情形(B)不能存在。

這樣一來，當兩個無理數 $\alpha=(A, B)$ 和 $\beta=(A_1, B_1)$ 相比較時，能有而且僅能有三種互相排斥的情形發生：

1. A 類與 A_1 類（隨之 B 類與 B_1 類）相同，那麼

$$\alpha=\beta.$$