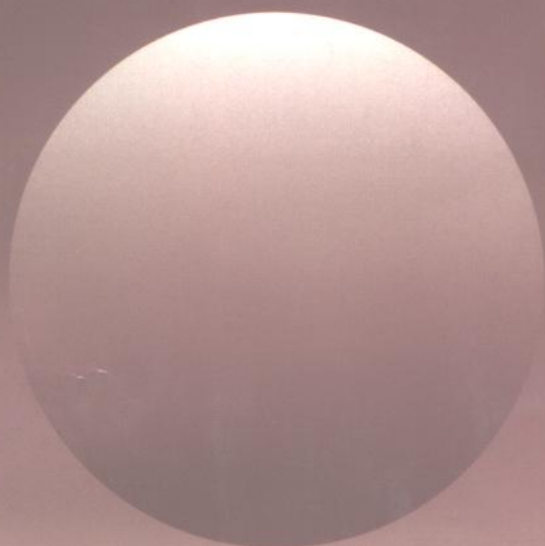


● 研 究 生 用 书 ●

A COURSE IN APPLIED
FUNCTIONAL ANALYSIS

华中理工大学出版社



李 大 华



应用泛函简明教程

0177
L21
(3)

442524

应用泛函 简明教程

李大华

华中理工大学出版社



00442524



图书在版编目(CIP)数据

应用泛函简明教程/李大华

武汉:华中理工大学出版社,1999年1月.-3版

ISBN 7-5609-0352-5

I. 应…

I. 李…

II. 泛函分析-应用-简明教程

IV. O

DY 89/24/12

· 研究生用书 ·

应用泛函简明教程

李大华

责任编辑 李立鹏

*

华中理工大学出版社出版发行

(武昌喻家山)

新华书店湖北发行所经销

华中理工大学出版社沔阳印刷厂印刷

*

开本:850×1168 1/32 印张:8.625 插页:2 字数:206 000

1999年1月第3版 1999年1月第4次印刷

印数:4 501—5 700

ISBN 7-5609-0352-5/O · 56

定价:11.60元

(本书若有印装质量问题,请向出版社发行部调换)

内 容 简 介

本书是为工科及其他非数学专业的研究生编写的教材,共分七章.开头是预备知识,简单介绍集合、映射及不等式.第一章 Lebesgue 积分初步,第二章赋范线性空间,第三章 Hilbert 空间,第四章线性泛函和对偶空间,第五章线性算子和谱,第六章广义函数与 Sobolev 空间,第七章 Banach 空间中的微分学.本书前五章配有一定数量的习题,书后附有答案与提示,便于读者自学.

本书取材适当,注重应用;写得深入浅出,通俗易懂.除作为工科研究生教材外,也可供工程技术人员和其他科技人员阅读参考.对理工科高年级大学生也是一本合适的参考书.

Abstract

The purpose of this book is to provide a basic course for postgraduates whose major is not mathematics. The book includes seven chapters. The prerequisites are some familiarity with set, mapping and inequalities. Chapter 1 introduces the elementary of Lebesgue integral, Chapter 2 Normed linear spaces, Chapter 3 Hilbert spaces, Chapter 4 Linear functions and dual spaces, Chapter 5 Linear operators and spectral, Chapter 6 Distribution and Sobolev spaces, Chapter 7 Differentiation in Banach space. The first five chapters dispose some problems, and answers and hints are given at the end of the book.

This book draws materials carefully, pays special attention to applications, explains the profound in simple terms and is easy to understand. It also serves as a suitable reference book for workers in the scientific and technological fields and senior undergraduate students of science and engineering.

“研究生用书”总序

研究生教材建设是提高研究生教学质量的重要环节,是具有战略性的基本建设。各门课程必须有高质量的教材,才能使学生学习掌握各门学科的坚实的基础理论和系统的专门知识,为从事科学研究工作或独立担负专门技术工作打下良好的基础。

我校各专业自1978年招收研究生以来,组织了一批学术水平较高,教学经验丰富的教师,先后编写了公共课、学位课所需的多种教材和教学用书。有的教材和教学用书已正式出版发行,更多则采用讲义的形式逐年印发。这些讲义经过任课教师多年教学实践,不断修改、补充、完善,已达到出书的要求。因此,我校决定出版“研究生用书”,以满足本校各专业研究生教学需要,并与校外单位交流,征求有关专家学者和读者的意见,以促进我校研究生教材建设工作,提高教学质量。

“研究生用书”以公共课和若干门学位课教材为主,还有教学参考书和学术专著,涉及的面较广,数量较多,准备在今后数年内分批出版。编写“研究生用书”总的要求是从研究生的教学需要出发,根据各门课程在教学过程中的地位和作用,在内容上求新、求深、求精,每本教材均应包括本门课程的基本内容,使学生能掌握必需的基础理论和专门知识;学位课教材还应接触该学科的发展前沿,反映国内外的最新研究成果,以适应目前科学技

术知识更新很快的形势；学术专著则应充分反映作者的科研硕果和学术水平，阐述自己的学术见解。在结构和阐述方法上，应条理清楚，论证严谨，文字简炼，符合人们的认识规律。总之，要力求使“研究生用书”具有科学性、系统性和先进性。

我们的主观愿望虽然希望“研究生用书”的质量尽可能高一些，但由于研究生的培养工作为时尚短，水平和经验都不够，其中缺点、错误在所难免，尚望校内外专家学者及读者不吝指教，我们将非常感谢。

华中理工大学研究生院院长

陈 珽 黄树槐

1989. 11.

写在 1995 年

在今天，国家之间的竞争是国家综合实力的竞争，国家综合实力的竞争关键是经济实力的竞争，而经济实力的竞争关键又在于科技（特别是高科技）的竞争，科技（特别是高科技）的竞争归根结底是人才（特别是高层次人才）的竞争，而人才（特别是高层次人才）的竞争基础又在于教育。“百年大计，教育为本；国家兴亡，人才为基。”十六个字、四句话，确是极其深刻的论断。

显然，作为高层次人才培养的研究生教育就在一个国家的方方面面的工作中，占有十分重要的战略地位。可以说，没有研究生教育，就没有威伟雄壮的科技局面，就没有国家的强大实力，就没有国家在国际上的位置，就会挨打，就会受压，就会被淘汰。

“工欲善其事，必先利其器。”教学用书是教学的重要基本工具与条件。这是所有从事教育的专家所熟知的事实。所以，正如许多专家所知，也正是原来的《“研究生用书”总序》中所指出，研究生教材建设是保证与提高研究生教学质量的重要环节，是一项具有战略性的基本建设。没有研究生的质量，就没有研究生教育的一切。

我校从 1978 年招收研究生以来，即着力从事于研究生教材与教学用书的建设。积十多年建设与实践的经验，我校从 1989 年起，正式分批出版“研究生用书”。第一任研究生院院长陈珽教授就为之写了《“研究生用书”总

序》，表达了我校编写这套用书的指导思想与具体要求，“要力求‘研究生用书’具备科学性、系统性、先进性”。第二任研究生院院长，也就是当时我校的校长黄树槐教授完全赞同这一指导思想与具体要求，从多方面对这套用书加以关心与支持。

我是十分支持出版“研究生用书”的。早在1988年我在为列入这套书中的第一本，即《机械工程测试·信息·信号分析》写“代序”时就提出：一个研究生应该博览群书，博采百家，思路开阔，有所创见。但这不等于他在一切方面均能如此，有所不为才能有所为。如果一个研究生的主要兴趣与工作不在“这一特定方面”，他也可以选择一本有关的书作为了解与学习这方面专业知识的参考；如果一个研究生的主要兴趣在“这一特定方面”，他更应选择一本有关的书作为主要学习用书，寻觅主要学习线索，并缘此展开，博览群书。这就是我赞成为研究生编写系列教学用书的原因。

目前，这套用书已出版了6批共30种，初步形成规模，逐渐为更多读者所认可。在已出版的书中，在8种分获国家级、部省级图书奖，有13种一再重印，久销不衰，有的印刷总数已近万册。采用此套书的一些兄弟院校教师纷纷来信，赞誉此书为研究生培养与学科建设作出了贡献，解决了他们的“燃眉之急”。我们感谢这些赞誉与鼓励，并将这些作为对我们的鞭策与鼓励，“衷心藏之，何日忘之？！”

现在，正是江南初春，“最是一年春好处”。华工园内，红梅怒放，迎春盛开，柳枝抽绿，梧叶含苞，松柏青翠，

樟桂换新，如同我们的国家正在迅猛发展，欣欣向荣一样，一派盎然生机。尽管春天还有乍寒时候，我们国家在前进中还有种种困难与险阻，有的还很严峻，但是，潮流是不可阻挡的，春意会越来越浓，国家发展会越来越好。我们教师所编的、所著的、所编著的这套教学用书，也会在解决前进中的种种问题中继续发展。然而，我们十分明白，这套书尽管饱含了我们教师的辛勤的长期的教学与科研工作的劳动结晶，作为教学用书百花园中的一丛鲜花正在怒放，然而总会有这种或那种的不妥、错误与不足，我衷心希望在这美好的春日，广大的专家与读者，不吝拨冗相助，对这套教学用书提出批评建议，予以指教启迪，为这丛鲜花除害灭病，抗风防寒，以进一步提高质量，提高水平，更上一层楼，我们不胜感激。我们深知，“一个篱笆三个桩”，没有专家的指导与支持，没有读者的关心与帮助，也就没有这套教学用书的今天。

诗云：“嘤其鸣矣，求其友声。”这是我们的心声。

中国科学院院士
华中理工大学校长
兼研究生院院长

杨叔子

于华工园内

1995年3月7日

初版的序

泛函分析是研究无穷维抽象空间及其上的分析的学科. 泛函分析研究函数的集合、函数空间、函数代数以及它们之间的变换——算子及算子代数等等, 其研究基础是抽象空间, 而无穷维抽象空间描述具有无穷多自由度的物理系统. 因此, 泛函分析有着丰富的实际背景, 已成为现代物理学中不可缺少的数学工具. 现在, 泛函分析不仅是数学专业学生的必修课程, 而且已成为许多工程技术专业、物理及力学等专业的研究生所渴望了解的一门数学学科.

本书是编者在几年来教学实践的基础上, 由讲义修改而成的. 本书的目的是为工科专业及物理、力学等专业的研究生提供一本泛函分析的基础教材, 同时本书也可以作为一般工程技术领域的实际工作者自修泛函分析的入门书. 一般理、工科的高年级大学生阅读本书也可以达到扩大知识面及提高数学修养水平的目的. 读者只要具备数学分析和线性代数的基本知识即可阅读本书.

考虑到本书的读者的广泛性, 我们把起点放得较低, 力求做到深入浅出, 通俗易懂. 第一章介绍了集合论的基础知识, 并简明地叙述了实分析中的极限理论及 Lebesgue 积分论的基本概念和主要结果. 这一章可视为预备知识. 第二章至第五章是泛函分析的基本内容, 其中以 Hilbert 空间为框架介绍了某些抽象空间的结构和属性, 进而对线性泛函及线性算子的基础理论进行了系统的论述. 除少数较困难、繁杂的证明被略去以外, 绝大多数定理都给出了证明. 第五章谱论简介中, 在介绍线性算子谱论中一些较为实用的结果的同时, 还论述了它们在数学物理问题(包括微分方程)中的某些应用. 第六、七两章可作为选学内容. 第一章到第五章中, 几乎每一节都配备有难度适中的习题, 其中大多数习题是为了帮助

读者加深理解基本内容,而少量习题则可视作基本内容的补充.为使读者自学方便,我们在本书的末尾给出了习题的答案与提示.

根据编者的经验,前五章大约可用 60 学时讲完.对于五、六、七这三章,也可以根据各专业的需要而灵活地选用.

本书在编写过程中,得到了厦门大学李文清教授和北京大学张恭庆教授的热情指点,特别是在全书的基本框架和写作方式上,提出了很多宝贵的指导性意见.武汉大学雷晋干教授认真、仔细地审阅了书稿的全文,提出了许多具体的、非常中肯的修改意见,华中工学院的王玉丰教授、陆传务教授审阅过本书的第一稿(即讲义),对编者给予了极大的鼓励和支持.在此,编者谨向他们表示衷心的感谢.

由于编者水平不高,经验不足,特此恳请读者对书中的错误和不足之处提出批评,指正的意见.

编者

1985.7.1.

于喻家山

前 言

泛函分析是研究无穷维抽象空间及其上的分析的学科. 泛函分析研究函数的集合、函数空间、函数代数以及它们之间的变换——算子及算子代数等等, 其研究基础是抽象空间, 而无穷维抽象空间描述具有无穷多自由度的物理系统. 因此, 泛函分析有着丰富的实际背景, 已成为现代物理中不可缺少的数学工具. 现在, 泛函分析不仅是数学专业学生的必修课程, 而且已成为许多工程技术专业、物理及力学等专业的研究生所渴望了解的一门数学学科.

本书的目的是为工科专业及物理、力学等专业的研究生提供一本泛函分析的基础教材, 同时本书也可以作为一般工程技术领域的实际工作者自修泛函分析的入门书. 一般理工科的高年级大学生阅读本书也可以达到扩大知识面及提高数学修养水平的目的. 读者只要具备数学分析和线性代数的基本知识即可阅读本书.

考虑到本书的读者的广泛性, 我们把起点放得较低, 力求做到深入浅出, 通俗易懂. 基本起点放在 Lebesgue 积分上面. 本书采用匈牙利数学家 F. Riesz 的方法引入 Lebesgue 积分的定义, 使读者能够从较熟悉的 Riemann 积分出发去理解新的积分概念. 我们只介绍 L 积分的主要理论结果而略去证明. 因此, 第一章亦可视为预备知识.

在第二、三章中, 我们较详细地介绍了赋范线性空间和 Hilbert 空间的框架结构. 围绕着完备性概念, 我们给出了压缩映射原理及其应用; 围绕着直交分解定理, 我们展开了最佳逼近问题的讨论. 第四章讲线性泛函和对偶空间, 围绕着 Hahn-Banach 定理, 我们对最小范数问题以及凸集分离问题作了较多的介绍. 第五章介绍线性算子和谱论, 我们结合某些数学物理问题阐述谱论的应用. 第六、七章可作为选学内容. 第一章到第五章, 每章都配置有

难度适中的习题,其中大多数习题是为了帮助读者加深理解基本内容,而少量习题则视为基本内容的补充。

本书的前身是1986年华中工学院出版社出版的《泛函分析教程》,当时作者曾得到厦门大学李文清教授和北京大学张恭庆教授的热情指点。本书在1989年修订再版并更名为《应用泛函简明教程》,前后两版的书稿均由武汉大学雷晋干教授审阅,并对作者提出了许多具体的、中肯的修改意见。本书在写作之初,本校的王玉丰教授、陆传务教授对作者给予了极大的支持和鼓励,陈祖诰、胡适耕等同志也给予了有力的支持和帮助。特别要提到的是四川大学的陆文端教授,他给作者提出了许多实质性的修改意见,由于他的热情指导和帮助,使得本书在目前的第二次修订中得到进一步的完善和提高。作者在此向他们表示最衷心的感谢!

最后我还要感谢华中理工大学研究生院及华中理工大学出版社,由于他们的一贯的大力支持,本书才得以顺利地出版、再版。

对于书中的错误与不足,热忱欢迎读者批评指正。

李大华

1998年3月于喻家山

目 录

第零章 预备知识	(1)
§ 1 集合与映射	(1)
§ 2 不等式	(9)
§ 3 直线上的点集	(12)
§ 4 实数基本定理	(14)
§ 5 一致连续性与一致收敛性	(21)
第一章 Lebesgue 积分初步	(27)
§ 1 阶梯函数的积分	(27)
§ 2 C_1 函数的积分	(32)
§ 3 Lebesgue 积分	(37)
§ 4 几个基本定理	(40)
§ 5 可测函数与可测集	(46)
§ 6 重积分与不定积分	(51)
习题	(53)
附录 Riemann 可积的充要条件	(54)
第二章 赋范线性空间	(57)
§ 1 线性空间	(58)
§ 2 赋范线性空间的定义和例	(62)
§ 3 开集、闭集、凸集	(67)
§ 4 连续映射	(71)
§ 5 完备性、Banach 空间	(74)
§ 6 稠密性与可分性	(80)
§ 7 紧性与泛函的极值	(83)
§ 8 压缩映射原理及其应用	(87)
习题	(93)
第三章 Hilbert 空间	(96)
§ 1 内积、Hilbert 空间	(96)
§ 2 直交与投影	(100)

§ 3	直交系与 Gram-Schmidt 直交化	(105)
§ 4	Fourier 级数与最佳逼近	(112)
§ 5	对偶逼近问题	(120)
§ 6	可分 Hilbert 空间的模型	(124)
	习题	(126)
第四章	线性泛函和对偶空间	(128)
§ 1	连续线性泛函的基本概念	(128)
§ 2	对偶空间及例	(131)
§ 3	Hilbert 空间上连续线性泛函的一般形式	(137)
§ 4	线性泛函的延拓	(140)
§ 5	二次对偶空间	(144)
§ 6	最小范数问题	(148)
§ 7	超平面与凸集分离	(154)
§ 8	弱收敛与弱*收敛	(159)
	习题	(164)
第五章	线性算子和谱	(166)
§ 1	基本概念	(167)
§ 2	线性算子的基本定理	(172)
§ 3	共轭算子、值域和零空间	(179)
§ 4	紧算子的 Riesz-Schauder 理论	(184)
§ 5	Hilbert 空间中的自共轭算子	(191)
§ 6	Hilbert-Schmidt 定理	(195)
§ 7	无界自共轭算子谱论简介	(202)
	习题	(209)
第六章	广义函数与 Sobolev 空间	(211)
§ 1	广义函数的概念	(211)
§ 2	广义函数的导数	(216)
§ 3	Sobolev 空间	(219)
§ 4	迹	(221)
§ 5	嵌入定理	(222)
§ 6	等价范数定理	(224)

第七章 Banach 空间中的微分学	(227)
§ 1 微分的概念	(227)
§ 2 微分的基本性质	(233)
§ 3 偏导数与高阶导数	(236)
§ 4 隐函数定理	(239)
§ 5 不动点定理	(241)
习题答案与提示	(244)
名词索引	(251)
参考书目	(254)

第零章 预备知识

§ 1 集合与映射

1. 逻辑符号

设 P 、 Q 表示两个命题(或条件), 符号

$$P \Rightarrow Q$$

表示如果命题 P 成立, 则命题 Q 也成立. 而符号

$$P \Leftrightarrow Q$$

则表示命题 P 与 Q 等价, 亦即“ $P \Rightarrow Q$ 且 $Q \Rightarrow P$ ”.

符号

$$\forall$$

表示任给, 比如 $\forall x, f(x) \geq a$ 的意思是对任何 x , 不等式 $f(x) \geq a$ 都成立.

符号

$$\exists$$

表示存在. 如 $\exists x$, 使得 $x > 0$ 的意思是存在实数 x , 使得 x 大于零.

2. 集合

把具有某种共同特性的并且彼此可以明确分辨的东西(东西可以是直观的对象, 也可以是思维的对象)放在一起, 把它们看成一个整体, 这个整体就称为集合. 而那些“东西”就称为集合的元素或元.

通常我们用大写字母表示集合, 用小写字母表示集合的元素. 若 A 是一个集合, 则 $x \in A$ 表示 x 是 A 的一个元素. 当 x 不是 A 的元素时, 则记为 $x \notin A$.

集合的表示法有以下两种: