



中央电视台电视讲座教材

中国标准出版社

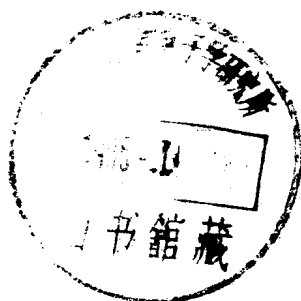
数理逻辑

51.3
386

中央电视台电视讲座教材

数理逻辑

胡耀鼎 张清宇 著



中国标准出版社

1985

8510403

DUL/12/12

内 容 简 介

本书是为中央电视台举办的《数理逻辑》电视讲座而撰写的。它系统地介绍了数理逻辑的基础知识，重点介绍了自然推理系统。

本书共分五章：第一章至第三章讲命题逻辑，并对数理逻辑的性质、逻辑演算的大概内容及学习本书所需要的预备知识作了说明；第四章、第五章讲一阶（谓词）逻辑。本书章节安排由浅入深，且分别独立成篇。

本书可供大专院校各理工科专业的学生、计算机工作者、有关工程技术人员、经营管理人员、社会科学工作者以及具有高中以上文化水平的读者学习。

中央电视台电视讲座教材

数 理 逻 辑

胡耀鼎 张清宇 著

中国标准出版社出版
(北京复外三里河)

北京市通县台湖印刷厂印刷

新华书店北京发行所发行 各地新华书店经售

开本 787×1092 1/32 印张 9 字数 189,000

1985年3月第一版 1985年3月第一次印刷

印数 1—50,000

书号：15169·3-347 定价 2.10 元

标 目 18-1

6040127

作 者 的 话

当前科学技术飞速发展，世界上出现了新的技术革命高潮，生产体系组织结构和经济结构都发生了深刻的变化，产生了新的飞跃。新技术革命的形势，对于正进行四个现代化建设的我国来说，确实是一场严重的挑战。目前我国现行管理体制比较落后，劳动生产率也较低，必须经受住这场挑战，克服困难，从根本上改变目前我国比较落后的状况。这样才能加快我国实现四化的步伐。面对这场挑战，主要困难是我们知识的不足，是我们缺乏现代科学技术知识，缺乏现代管理技能。所以党中央特别强调要学习，只有通过学习才能掌握现代科学技术知识，掌握现代管理技能。

中央电视台就是为了适应这一新的学习形势而举办《数理逻辑》电视讲座的。当我们接到承担这一讲座的邀请时，万分高兴。高兴能有机会在这新的学习浪潮中尽自己一份微薄的力量，为四个现代化的早日实现出一点力。

在科学技术飞速发展的形势下，相继崛起了许多新的技术和产业。在这些新技术中居于前位的就是信息技术。随着1946年第一台电子计算机的诞生，产生了具有一定智力功能的电脑。这以后几十年间，电子技术飞速发展。电子计算机的更新换代，不断完善，使信息技术成为当代技术革命中最活跃的领域。

电子计算机在当前技术革命中的重大作用是毋庸置疑的。它已经渗透到社会生活的每一个领域，在生产、经营、管理

等各方面都有广泛的应用。一个现代化企业若不使用电子计算机（电脑）是不可想象的。

数理逻辑是一门基础理论科学，它不仅作为基础理论在现代计算机科学中发挥作用，而且它的许多理论研究中的成果也不断为人工智能所吸取而在实践领域中被采用。《数理逻辑》电视讲座是讲授数理逻辑的基础知识，它当然不为专业逻辑工作者的研究服务，不是探讨数理逻辑在基础科学方面的重大意义与作用。它的目的只是向从事与计算机有关的工作的同志介绍一些基本知识；对其它学科的自然科学工作者、工程技术人员、经营管理人员、社会科学（哲学、语言、经济、法律等）工作者及对数理逻辑有兴趣的人提供学习数理逻辑基本知识的机会。

阅读本书不需要具有特定的基础知识，不具备高等数学知识的中等文化水平的读者也可阅读。本书章节安排由浅入深，且分别独立成篇。仅阅读第一章也可获得一些通俗（非严格理论）的知识。第二章、第三章讲命题逻辑，第四章、第五章讲一阶（谓词）逻辑，可独立阅读。为了独立成篇，本书由编者两人分别执笔写成。考虑到读者的方便，部分内容略有重复。

本书虽然是基本知识讲座读本，但我们也考虑到理论上的完整与严密，给读者以一个完整的两个演算（命题演算、谓词演算）的内容。对于有意在逻辑领域作进一步深入探讨与研究的读者也不失为一个人门书。考虑到使初学者便于掌握，我们重点介绍了自然推理系统，对于公理系统未作全面深入的讨论，但给出了两个系统等价的证明。对于理论结果无兴趣的读者，关于系统等价、系统可靠性、完全性的详细论证是可以先略去不读的。

电视播讲的内容是从本书中选取的一部分易懂的内容，并着重于命题逻辑，略去较难及较长的论证，以便于学员重点理解。其它内容可阅读本书。

由于任务急迫，编写时间仓促，对书中的错误、不当、遗漏之处，望学者、专家及广大读者批评指正。

引 言

什么是数理逻辑？让我们从传统逻辑的局限性及数理逻辑的特征这两个方面来对这个问题作一个简略的说明。

1. 传统逻辑的局限性

传统逻辑是一门古老的科学，是研究概念、判断和推理形式，特别是推理形式的一门科学。它由古希腊哲学家亚里士多德所创立，至今已有两千多年的历史。它有许多缺陷和不足，由于是使用自然语言来表述的，因而有许多不精确之处，这就使它具有很大的局限性。下面我们列举一些主要的不足之处。

(1) 传统逻辑讨论概念外延间的关系时，是把包含关系和交叉关系并列的。实际上，它们是有区别的。包含关系，譬如A包含B，说明了凡是类B的分子都是类A的分子。例如医生包含内科医生，因为凡是内科医生的人都是医生。而交叉关系实际上是确定了类的一种运算，由这个运算（称之为交运算）确定了一个新的类。譬如A与B是交叉关系，那么由A和B就确定了一个新的类，称为A与B的交，它是由既属于B又属于A的分子所组成的类。例如医生与妇女是交叉关系，由它们就确立了一个新的类，称为医生这个类与妇女这个类的交，它是由所有既是医生又是妇女的人所组成的类，即女医生。包含关系与交叉关系的区别由上可见。但在传统逻辑

中是不加区别而予以并列的，这当然是很不精确的。

(2) 传统逻辑中不讨论空类，即不包含任何分子的类。它所得出的结论，在有空类时，可能是不成立的。如对SAP、SEP、SIP和SOP四种直言命题的讨论，都假定了S和P是非空类。在这样的假定下，这四种命题间的对当关系是正确的。但当S是空类时，SAP和SOP都为假，也就是它们之间矛盾关系不成立。例如“所有永动机都是机器”和“有的永动机不是机器”。因为根本就没有永动机，‘永动机’是一个空类，所以，这两个命题同为假。

又如直接推理中，SEP由换位推出PES，必须在P是非空类的前提下才成立。如果P是空类，那么也就不能从SEP推出PES。例如从“所有机器都不是永动机”推不出“所有永动机都不是机器”。因为“永动机”（即P）是一个空类。

(3) 传统逻辑使用的是自然语言，因而常有歧义。自然语言含义极为丰富，但却因而常由于一词多义而产生歧义，这对于逻辑的陈述来说是极为不精确的。譬如对直言命题中联项“是”的使用就有如下几种不同含义，例如：

(a) 曹雪芹是《红楼梦》的作者。

(b) 曹雪芹是小说家。

(c) 小说家是文学家。

上面三个命题中的联项“是”的使用含义是完全不同的。命题(a)中的“是”表示等同，“是”前后的两个词项可以互换位置，也可以说“《红楼梦》的作者是曹雪芹”。命题(b)中的“是”表示的是分子与类之间的从属关系，曹雪芹是小说家这个类中的一个分子。命题(c)中的“是”又完全不同于前两个命题中“是”的使用，它表示的是两个类之间的关系（包含关系）。“文学家”这个类包含“小说家”这个类。

由上所述可看出，上述三个命题中使用“是”的不同含义是三种完全不同的关系。表示等同的“是”可以把前后词项互换位置，而表示从属关系和包含关系的“是”，我们绝不可互换“是”前后词项的位置，而说成“小说家是曹雪芹”或“文学家是小说家”。传统逻辑对这三种情况不加区别，也就混淆了这三种不同的命题，当然也就得不出关于这三类命题的不同的正确逻辑规律。

譬如包含关系是传递的（即如果A包含B，又B包含C，那么A包含C），但从属关系不同于包含关系，它是不传递的（即A属于B，B属于C，不一定有A属于C）。例如“狂人日记”是“鲁迅著作”这个类的一个分子，又“鲁迅著作”是“一天读不完的书籍”这个类的一个分子，但“狂人日记”却不是“一天读不完的书籍”这个类的一个分子。因而如下形式的推理是错误的：

狂人日记是鲁迅的著作，

鲁迅的著作是一天读不完的，

所以，狂人日记是一天读不完的。

（4）传统逻辑对量词没有讨论，因而对许多正确的推理就不可能作充分的研究。例如对下列两个命题：

（d）展览会上的所有展品都有人赞赏。

（e）有人赞赏展览会上的所有展品。

由（d）真得不出（e）真（因为虽然所有展品都有人赞赏，但可能这个人赞赏这几幅，那个人赞赏那几幅，而没有一个人是赞赏所有展品的），但由（e）真可得（d）必真（每幅展品至少有一个人赞赏）。由（e）得（d）是一个正确的推理，而这个推理的正确性在传统逻辑中是得不到说明的。只有把命题进一步分析为主项、谓项和量项的结构，才能对这

种推理的正确性进行讨论。

又如下面两个推理：

(f) 如果一个数的各位数字之和是9的倍数，那么它也是9的倍数。

198的各位数字之和是9的倍数，

所以，198是9的倍数。

(g) 如果198的各位数字之和是9的倍数，那么198是9的倍数，

198的各位数字之和是9的倍数，

所以，198是9的倍数。

传统逻辑中，这两个推理都被认为是肯定前件的充分条件假言推理。实际上，这两个推理是很不相同的。(f)这个推理中的第一个前提说的是，一个数，如果它的各位数字之和是9的倍数，那么它也是9的倍数，这里涉及到了量项“所有”。因而这个推理就远较(g)为复杂。详细的推理步骤应该是先由前提“任何数，如果它的各位数字之和是9的倍数，那么它也是9的倍数”得出“如果198的各位数字之和是9的倍数，那么198是9的倍数”。再加上前提“198的各位数字之和是9的倍数”，从而才得出“198是9的倍数”的结论。而

(g)这个推理的前提不涉及量词，严格地说，(g)才是肯定前件的充分条件假言推理。

传统逻辑对这两个推理是不加区别的，没有对它们作严格精确的分析。逻辑主要就是研究推理的，就这一点而言，传统逻辑是非常不足的。

综上所述，我们就可以知道，传统逻辑是不足的。一方面它不能包括一些明显正确的推理形式。另一方面，由于它使用自然语言，产生歧义、含混，因而不能对一些正确的推

理进行充分的研究，并混淆一些不同的命题与推理。要使逻辑得到进一步的充分发展，就必须突破传统逻辑的框框，使用特定的不会引起歧义和含混的形式语言。对构成复合命题的联结词作科学的抽象，从而对复合命题的逻辑规律作深入全面的研究；对量项作深入研究，从而掌握关于包含量项的命题的逻辑规律。对逻辑发展的这种新的要求，就促使了一门新的逻辑——数理逻辑的诞生。

2. 数理逻辑的兴起，它的一般特征

数理逻辑的创始人是十七世纪的德国数学家和哲学家莱布尼兹 (G·Leibniz, 1646—1716)。他力图建立一种精确的普遍语言，并寻求一种推理演算，以使用计算来解决论辩和争论的问题。在早期数理逻辑的发展上作出贡献的有布尔 (G·Boole, 1815—1864)，德摩根 (A·De Morgan, 1806—1876)，施罗德 (E·Schröder, 1841—1902) 等。他们用数学方法研究和处理形式 (传统) 逻辑，建立了逻辑代数和关系逻辑。

十九世纪中叶以后数学的发展，在数学中出现了两个新的研究方向，即分析基础 (数学中要求精确化的基础) 与公理化方法的研究，从而提出了数学思想方法和数学基础问题研究的必要性。这就大大推动了数理逻辑的发展。

从1879年弗雷格 (G·Frege 1848—1925) 发表《计算概念》一书开始，皮亚诺 (G·Peano 1838—1932) 及其合作者于1894年出版《数学公式》一书，把各部门数学都表达于逻辑演算之中，直至1910—1913年罗素 (B·Russell, 1870—1970) 与怀德海 (A·N·Whitehead, 1861—1947) 三大卷数学原理

(*Principia Mathematica*) 的出版,建立了古典逻辑演算的完整体系——命题演算与谓词演算,突破了传统逻辑的局限性,使数理逻辑成长为一门新的学科。

这一时期数理逻辑的发展是和数学密切相关的,或者说数理逻辑适应数学发展的需要,联系数学实际,才使数理逻辑得到了飞速的发展。由于康托($G \cdot Cantor$, 1845—1918)、希尔伯特($D \cdot Hilbert$, 1862—1943)、哥德尔($K \cdot Gödel$, 1906—1978)这些杰出数学家的工作使数理逻辑建立起了集合论、递归论、模型论、证明论这样一些分支,使数理逻辑成长为一门内容十分丰富的学科,并成为数学的一个成熟的分支。

这一时期希尔伯特关于公理方法的研究具有十分重要的意义,他的一些计划设想推动了二十年代以后的数理逻辑的发展。1930年哥德尔证明了狭谓词演算的完全性定理,1931年又发表了不完全性定理。这样到本世纪三十年代末数理逻辑已完全臻于成熟。

四十年代以后,数理逻辑又和电子计算机的发明和发展发生了紧密的联系,成为计算机科学的基础理论之一。近年来,除了古典的逻辑演算外,又发展了非古典逻辑,发展了各种应用逻辑体系及一些纯逻辑理论。后者如多值逻辑、严格意义下的模态逻辑等,前者范围极广,诸如认知逻辑、道义逻辑、问句逻辑、知道逻辑、时态逻辑等等,其中有些已经在人工智能的研究中得到了应用。

通常认为数理逻辑包含如下几个分支,即逻辑演算、公理化集合论、递归论、模型论、证明论。近年来非古典逻辑的研究内容可以称之为哲学逻辑,是一个新的分支。

数理逻辑有狭义与广义两种理解,狭义的是指用数学方

法研究数学思维、数学性质及数学基础问题的学科；广义的泛指一切用符号和数学方法处理和研究演绎方法的学问，故又称之为符号逻辑。

数理逻辑的特征：

(1) 数理逻辑是研究演绎方法的科学，它研究推理和证明是只从形式结构方面来考虑的，而根本不管它的内容。这样的研究具有普遍性，即推理形式的正确与否只看形式结构是否正确，而与内容完全无关。例如，考虑推理

(a) 每个 s 是 t

(b) r 不是 t

(c) r 不是 s

(c) 是由 (a) 和 (b) 推出来的，不管 (a)、(b) 和 (c) 是否为真，这个推理总是正确的。这里根本不用顾及 t 、 s 和 r 的具体含义，它们的变化不影响推理的正确性。但“每个”和“不是(非)”这两个词是不能随意改变的，它们的改变将影响推理的正确性，它们是包含在所说的推理形式之内的，我们称它们为逻辑词。不影响推理正确性的那些词则称为非逻辑词。

上述推理是有效的(即正确的)，称 (c) 是 (a) 和 (b) 的逻辑后承。如果 (a) 和 (b) 为真，那么 (c) 必真。 t 、 s 和 r 不论用什么词代入都不影响这个推理的有效性。

从上所述，可以知道，数理逻辑研究推理和证明是只从形式结构方面来考虑的，是把形式与内容分离开来研究的，因而所得到的结果就形式结构来说具有普遍性。

(2) 为了研究推理，需要把形式与内容分离，而自然语言是不可能做到这一点的。因为自然语言不精确，有歧义，会产生含糊、混淆，这恰是逻辑所最不能允许的。逻辑要求

精确，不能有丝毫含糊不清之处，要求一词一意。要达到这一目的，自然语言是不能胜任的，必须借助于另外的人工语言。

数理逻辑所使用的是一种特定的形式语言，其中的符号是表意的，一个符号表达一个意思。这就使得形式语言完全精确，没有歧义。譬如用“ $\rightarrow$ ”表示“如果…那么…”，用“ $\neg$ ”表示“非”等等。而“ $\rightarrow$ ”与“ $\neg$ ”这些符号的含义是完全明确规定了的。不会出现使用“如果…那么…”时的混淆。

(3) 数理逻辑使用公理方法。两千多年前欧几里得在他的《几何原本》一书中就应用了公理方法。他把一些较为自明的基本性质作为公理或公设，以此为出发点，严格地论证出一系列的定理。欧氏在《几何原本》中所使用的公理方法有很大的缺点，不够严密，有的定义也不恰当，并且作为公理的性质都显然是自明的。公理方法的研究到了上世纪末有了很大的发展。希尔伯特《几何基础》一书的问世(1899年)标志着现代形式公理方法的产生。现代的公理方法较之古典的公理方法远为严格，如要求具备独立性和无矛盾性等。独立性指任一条公理都不能从其他的公理推出，无矛盾性指不会从公理推出矛盾来。选择作为公理的命题并不要求一定是自明的，而是从所要构筑的系统出发考虑的，只要能充分刻画并处理系统中对象的特征。从公理出发的证明是绝对严格的，即只能以公理为依据，按照规定的推理规则进行，绝对不能在证明中附加其他前提或运用其它规则(已经证明的定理和规则除外)。选作系统的公理实际上只是系统的初始命题。对于同一系统可以选择不同的命题作为系统的公理。

(4) 数理逻辑已成长为一门成熟的数学分支，它愈来愈

愈多地运用了不同的数学方法。数理逻辑是一门数学，这从下面的意义上可以看出。首先数理逻辑使用的形式语言可以用来表达数学的某些内容。形式语言中的符号经过适当的解释后，可以用来表达诸如算术、几何这样一些数学分支中的命题。对于这些表达式的含义及形式的研究可以弄清楚数学中所使用的逻辑，并且能揭示出给定数学分支中命题间的逻辑关系。另外，数理逻辑中对于形式语言的研究（它的含义及形式）是按照数学方式进行的。在证明形式语言及其表达式的事实时所用的方式与证明数学中某些分支的事实时所用的方式是完全相同的。

（5）数理逻辑是现代的形式逻辑。形式逻辑的传统内容包括三段论和假言推理等。历史上使用形式逻辑一词只限于演绎方法而不包括归纳方法，是从形式结构来研究演绎方法的科学。数理逻辑正是这一研究的现代发展，使用精确的科学的完全形式的语言来对演绎方法进行研究，建立起逻辑的各种形式系统。

数理逻辑包括下面几个分支：

逻辑演算 包括古典的两个演算（命题演算和一阶谓词演算），包括非古典的构造性逻辑、多值逻辑等，还包括并非由数学的需要而发展起来的内涵逻辑、模态逻辑和规范逻辑等。这部分主要是属于逻辑的。

公理化集合论 关于概念外延的逻辑理论，各个数学分支都使用了集合的概念及集合论中一切重要的结果。微积分的发展要求为之建立严格的理论基础，这就导致集合论研究的不断深入发展。这一研究对于数学无疑是十分重要的，它涉及数学基础的问题。这方面的研究对于逻辑来说也具有十分重要的意义。

证明论 又称元数学,是关于数学证明的理论,是希尔伯特为证明理论的无矛盾性而建立起来的。

模型论 如果找到一些事物并确定它们之间的一些关系,使得这些事物及其间关系能满足某个公理系统,那么我们就称这些事物及其关系是该公理系统的一个模型。对于一个有模型的公理系统来说,它就是不矛盾的。为了探讨各种系统的无矛盾性,就要构造各种模型,模型论也随之产生,并逐步发展成一门内容丰富的新兴学科。

递归论 是涉及可能行计算的理论,即可一步步地逐步做出,它和计算机有着密切的联系。

数理逻辑自六十年代以来发展迅速,与各门科学产生了广泛的联系,除与计算机科学、人工智能等有深入的联系外,其他应用范围众多,产生了众多不同的应用逻辑,诸如认知逻辑、道义逻辑、时态逻辑、知道逻辑等等。在包括社会科学的不同领域中都产生了不同程度的影响和作用。

目 录

引言	(1)
1. 传统逻辑的局限性	(1)
2. 数理逻辑的兴起, 它的一般特征	(5)
第一章 命题及命题形式	(1)
第一节 逻辑联结词	(2)
1.1 复合命题及其真假	(2)
1.2 真值联结词	(3)
1.3 初始联结词	(6)
第二节 命题形式 推理的形式结构	(9)
2.1 命题形式	(9)
2.2 真值表	(12)
2.3 真值函项	(14)
2.4 重言式	(17)
2.5 推理的形式结构	(18)
2.6 判定一个蕴涵式是否重言式的方法	(21)
第三节 等值 范式	(25)
3.1 等值	(25)
3.2 范式	(30)
3.3 优范式	(36)
3.4 范式的作用	(42)
3.5 几个应用实例	(46)
第二章 命题逻辑	(57)