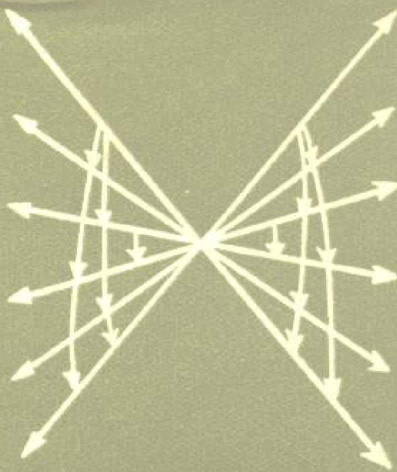
莫绍揆 著



数理逻辑初步

SHU LI LUO JI
CHU BU

数理逻辑初步

莫绍揆著

上海人民出版社

责任编辑　刘鸿钧
封面装帧　周爱卿

数理逻辑初步
莫绍揆著
上海人民出版社出版
(上海绍兴路 54 号)
新华书店上海发行所发行　浙江诸暨印刷厂印刷
开本 787×1092　1/32　印张 5.5　字数 116,000
1980 年 8 月第 1 版　1980 年 8 月第 1 次印刷
印数 1—15,000
书号 2074·366　定价 (六)0.45 元

目　　录

第一章　数理逻辑的由来

到了今天，数理逻辑可以说已经是一门成熟的科学，它的内容十分丰富，与别的许多门学科都有牵连，互相影响．要介绍它的内容，或者描绘它与别的学科有所不同的特征，都是非常困难的，最好的办法是先从它的发展过程来考察．因为一个事物，无论它所包含的内容如何丰富，它的特性如何复杂，如果能够从它的发展来看，先看它是如何产生的，如何一步步地成长，逐渐地由小而大、由简单而复杂的，这样我们便能比较容易地掌握其主要内容、找出它的基本特征．

数理逻辑也是一样．它绝不是从天而降的，而是应生产实践的需要萌发而生，再按人类的认识规律逐渐发展起来的．这是一般学科发展史的共同特征．同时，数理逻辑又有它的特殊的发展史，我们必须掌握其特殊性，才能够更深刻地理解它．

数理逻辑的兴起与发展主要是沿着两条路：其一是人们感到传统逻辑的不足，需加以改进，尤其是借助数学的方法（如使用符号、注重推理等等）而加以改进；另一条路是对数学基础的研究，产生了大量与逻辑有关的问题．从这两者便引出了数理逻辑．

§1　传统逻辑的不足

我们现在先就第一点（传统逻辑方面）立论，然后我们再从第二点（数学基础方面）讨论.

数理逻辑本身就是逻辑，是传统逻辑本身内在矛盾发展的一个必然结果. 但是有好些数理逻辑学家认为，数理逻辑与传统逻辑已经截然不同，有本质的差异，讨论数理逻辑时可以另起炉灶，不必再和传统逻辑放在一起考虑了.这种看法似乎是不够妥当的.

所谓传统逻辑主要是指亚里士多德逻辑，尤其是经过中世纪的演变一直沿用到十九世纪（乃至今天）的那种逻辑. 这种逻辑在中世纪被认为金科玉律、完美无缺，不容许有任何更改的.但到了十九世纪，大家都觉得它有很多缺点，急需改革.到底它有什么缺点呢？大家都或多或少地提出了一些，现在我们试来综结几点.

第一，传统逻辑所讨论的限于主宾式语句，再按质按量分成四种.换句话说，传统逻辑所讨论的语句限于下列四种：

全称肯定 A，即 Asp（或 sAp）：凡 s 均为 p；

全称否定 E，即 Esp（或 sEp）：凡 s 均非 p；

特称肯定 I，即 Isp（或 sIp）：有的 s 为 p；

特称否定 O，即 Osp（或 sOp）：有的 s 非 p.

然后在这四种语句之上发展了三段论.

但是人们日常所使用的语句却不限于主宾式语句.例如，“我和他争论”，“他送我一本书”等等，这些怎能表成主宾式语句呢？传统逻辑的拥护者中，便有人硬把上述两句表成主宾式

语句如下：

"我是和他争论的"；

"他是送我一本书的".

这样的表述很难说是和原句的意思相符．"和他争论的"很难说形成了一个概念，至少不是常用的概念（日常最多只使用"曾和他争论过的"这个概念)，而"我和他争论"却是经常使用的，一个常用，一个不常用，即就这一点便可知道两者不是相同的语句．事实上，绝大多数人(甚至于包括传统逻辑的拥护者在内)都认为"我和他争论"这类的语句是不能表为主宾式语句的.

如果传统逻辑只是把自己的研究对象限于主宾式语句，并没有说一切语句都可表为主宾式语句，如果研究传统逻辑的人持这个态度，当然无可指摘．但必须注意，这样一来，传统逻辑的研究范围也就很窄了，而且也很难对数学有所应用了．因为，数学中所使用的语句几乎绝大部分不是主宾式语句．例如，最基本的数学语句

a 大于 b，　　点 C 介于点 B 与 D 之间，

等等，都不是主宾式语句．因此，传统逻辑的第一个缺点是：它限于主宾式语句.

第二，传统逻辑的另一个缺点是：它限于三段论.

传统逻辑规定，每个三段论式必须有也只有三句主宾式语句，两句叫做前提，另一句叫做结论．每个三段论式必有也只有三个名词，结论句的主语叫做小词，结论句的宾语叫做大词，而只出现于两前提之中的名词叫做中词．这样的三段论式并不能包括日常所使用的各种推理式．例如，我们经常进行下列推理：

a 大于 b，b 大于 c，故 a 大于 c. (甲)

在这里，三句都不是主宾式语句，已可以肯定它不合三段论式的要求，故它不是三段论. 即使照上文那样勉强把其中三句都改成主宾式语句，即写成：

a 是大于 b 的，b 是大于 c 的，故 a 是大于 c 的.

在这里，共有四个名词：a，大于 b 的；b，大于 c 的. 这就不合三段论式的要求. 事实上，(甲)式的推理是根据"大于"这个关系的"可传性"，而不是根据三段论的要求.

利用"可传性"而作推理的例子非常多，绝不少于使用三段论的推理，我们没有理由为了重视三段论，硬把根据"可传性"而作的推理说成是根据三段论的推理（其实，说三段论式本身是根据"可传性"而作的推理，倒是有一些根据的）. 但是，迄今仍然有很多人，不但说三段论可以包括根据可传性而作的推理，还说三段论可以包括一切推理. 这里想多说几句，检查检查他们的论据.

他们认为，三段论的整个精神，或者三段论的总根据，是所谓"曲全公理"（这是严复使用的译名）. 具体地说，这条公理是："凡通例所具有的性质，特例也必具有；通例所没有的性质，特例也必没有."

他们说，我们日常的推理，不管是几何的、一般数学的或别的推理，都在使用曲全公理，都是曲全公理的特例，从而也都是三段论的特例.

例如，就上文的推理(甲)而言，他们说，日常使用的下列的推理式，即：

1 大于 0，2 大于 1，故 2 大于 0； (乙$_1$)

2 大于 0，3 大于 2，故 3 大于 0； (乙$_2$)

等等，便是有了（甲）以后，根据曲全公理而推得的；反之，当有了下列的推理式以后，

对具可传性的关系R而言，由aRb，bRc，

可得aRc.　　（丙）

根据曲全公理（因“大于关系”是具可传性的关系R的特例），人们可以推得（甲）.因此在日常推理中，人们是大量地使用曲全公理的，从而是大量地使用三段论的，三段论是可以包括一切推理的.

三段论的总论据是不是曲全公理，曲全公理是否可以代表三段论，我们对这两个问题以后有机会再作探讨，现暂时撇开这一点不谈，我们集中探讨一下，曲全公理能否包括一切推理形式？

照上面所说，由（甲）而（乙$_1$）（乙$_2$）是根据曲全公理，由（丙）而（甲）也是根据曲全公理，看来，曲全公理的确是大量使用的. 这些都是应该承认的，不容怀疑的. 但由此能不能够说：曲全公理可以包括一切推理形式？

曲全公理不外是说：特例可从通例推出. 但“通例”又从何而得呢？如果说是由更一般的通例推出，那末“更一般的通例”又从何而得呢？这样追究下去，显然，作为“始祖”的那个“通例”必不能由曲全公理得到，而只能依靠别的推理得到.就上例而言，当我们先有（乙$_1$）（乙$_2$）时，我们要问：为什么由“1大于0，2大于1”而得出“2大于0”？

如果说，它可根据曲全公理由（甲）而得到. 那末，我们又要问：为什么由“a大于b，b大于c”而得出“a大于c”？

如果说，它可根据曲全公理由（丙）而得到，那末我们仍要问：为什么当R为可传关系时，由“aRb，bRc”而得出

“aRc”?

如果说，这是根据“定义”(可传性关系的定义)，那便表明有些推理形式不是根据曲全公理而得到的(例如，这里是根据定义而得到的).

况且，根据曲全公理由(丙)推出(甲)时，除曲全公理外，还须知道：

“大于关系是可传的关系，因而是R的特例”. (丁)

但是(丁)的获得绝不是根据定义，而只是根据下列论证：“大于关系满足(甲)，故根据可传性定义知道，大于关系是可传的关系”.换句话说，人们绝对不是先知道(丁)及(丙)，再根据曲全公理由(丙)而推出(甲)，相反是由(甲)及可传性定义而推出(丁). 如果人们赞成这个说法，那末，至少可作出三点结论：

其一，(甲)的成立应该独立地得到，不应该说它可由(丙)及曲全公理推出. 因为，要由(丙)及曲全公理而推出(甲)，必先知道(丁)，而要知道(丁)非先知道(甲)不可(因为(丁)不可能先于(甲)而被知).

其二，曲全公理尽管应用广泛，但绝不应该到处乱用. 由(甲)而向前追溯到(丙)，表面看来似乎得到更一般的通例了，但人们得(甲)时绝不是由(丙)而得(甲)的，这种追溯并没有解决任何问题.

其三，我们还可以指出，由通例而特例，虽然大量应用，但它绝不是唯一的方式，也不是最重要的方式. 由特例出发，加以推广而得通例，这种办法就其使用的大量性，以及在科学发展史上的重要性而言，绝不亚于“由通例而特例”这个方法.

因此，把曲全公理说成万能，说它能包括一切推理形式是非常错误的．至于三段论，更不能包括数学中和日常思维活动中所使用的一切推理．

因此，传统逻辑限于三段论式，这是它的又一个缺点．

第三，传统逻辑还有一个缺点，那便是没有关于量词的研究．所谓量词，是指“凡”“任何”“所有”（这些叫做全称量词）以及“有”“有些”（这些叫做存在量词）这一类词．

大家或许奇怪，这不正是传统逻辑所关心的课题吗？传统逻辑把一个判断（相当于今日所说的命题）按“质”分成肯定判断和否定判断，又按“量”分成全称判断和特称判断．含有“凡”“所有”等全称量词的便是全称判断，含有“有”“有些”等存在量词的便是特称判断．传统逻辑这么注重量词，把它作为两大分类标准中的一大标准，为什么还说传统逻辑没有关于量词的研究呢？

的确，量词的作用是那么重要而显著，研究逻辑的人是不会不注意到它们的．传统逻辑对判断按“量”作出分类，的确是想据此而研究量词的性质．但可惜的是，由于传统逻辑限于主宾式语句，更由于传统逻辑没有“变元”的概念，以致量词的作用受到极大的限制．受了这种限制以后，量词的力量大减，量词成了可有可无．在这样情况之下而研究量词的性质，可以说根本抓不住量词的实质，只能得出有关量词的一些次要性质罢了．

试举一例，近代数学中经常使用的一些含有量词的语句，例如有名的关于数列 $a(n)$ 的柯西判敛准则：

任给一个自然数 m，都有一个自然数 n，使得对任何自然

数 p,q，都有 $|a(n+p)-a(n+q)|<\frac{1}{m}$.*

这种语句能够用传统逻辑的全称判断、特称判断来写出吗？显然是很难的，甚至于是根本无法写出的；如果有谁硬要借助于一些人为的约定而用传统逻辑语句把它勉强地表述出来，也是绝对不易于理解的.

在这样情况下，传统逻辑对量词的研究不是和尚未研究几乎一样的吗？

举个例子说，"猛虎在深山，百兽震恐"，虎的特性、虎的威力要在深山之中才能充分显露，才能发挥得淋漓尽致. 如果在动物园中研究"虎"，虎已被笼子困住，甚至于已经"驯化"了，这时研究所得的虎的特性、虎的威力能够是深刻的吗？这样研究不是很肤浅的吗？

因此，传统逻辑没有关于量词的研究，是它的又一个缺点.

在古代数学中，亦即在初等数学中，还很少使用含有量词的语句，但在近代数学中，亦即在高等数学中，到处充满含有量词的语句，到处充满有关量词的推导. 事实上，大家知道，近代数学以极限论为基础，而极限的定义便是含有三个量词相重叠的(类似于上述的)语句，基本概念的定义如此，那就难怪到处充满量词语句了. 因此，近代数学出现以后，传统逻辑之必须改造，便是昭然若揭的了. 可以说，数理逻辑的出现，绝不是偶然的，而是由于传统逻辑的不足，为了适应数学发展的

* 我们这里征引柯西判敛准则，只是表明在近代数学中大量使用量词，而且是在 $AEIO$ 形式之外大量使用的，但并不希望读者去研究它的内容含意，那是比较艰深的，没有学过高等数学的人，是难于理解其内容的. 以后所举的类似例子也仿此.

需要而必然产生的.

§2 数理逻辑的兴起

传统逻辑既然有各种缺点,自应进行改革,这便导致数理逻辑的兴起与发展.

现在大家都承认,数理逻辑的创始者是德国的数学家兼哲学家莱布尼茨(G. W. Leibniz).

莱氏在数学上(例如,发明微积分等等)和哲学上的贡献是大家都知道的. 此外,他在其它方面也有极大的兴趣,而且有巨大的贡献. 在逻辑方面,他有一个巨大的计划,要建立一种理想的"通用语言",利用它来进行推理. 这个理想当时并没有实现,他只留下一些零星的话语. 但就所留下的零星的话语来看,他在数理逻辑方面的贡献就很惊人. 他的遗稿现在还未曾全部整理,将来全部整理后,还可能发现他的更多的贡献.

他曾经在给一位友人的信上写道:"要是我少受搅扰,或者要是我更年青些,或有一些年青人来帮助我,我将作出一种'通用代数'(Spécieuse générale),在其中,一切推理的正确性将化归于计算. 它同时又将是通用语言,但却和目前现有的一切语言完全不同;其中的字母和字将由推理(或理性reason——中译者)来确定;除却事实的错误以外,所有的错误将只由于计算失误而来. 要创作或发明这种语言或字母将是困难的,但要学习它,即使不用字典,也是很容易的."*

* 这封信是大家常引用的,这里转引自G.T.Kneebone, Mathematical Logic and the Foundations of Mathematics. pp.151～152.

综合莱氏在各处的零零星星的话来看，他的计划大体如下：

创造两种工具，其一是通用语言(characteristica universalis)，另一种是推理演算(calculus ratiocinator). 前者的首要任务是消除现存语言的局限性（没有公共语言，任何语言都不是人人所能懂的）、不规则性（任何语言都有很多不合理的语言规则），使得新语言变成世界上人人公用的语言；此外，由于新语言使用简单明了的符号、合理的语言规则，它将极便于逻辑的分析和逻辑的综合. 后一种，即推理演算，则用作推理的工具，它将处理通用语言，规定符号的演变规则、运算规则，从而使得逻辑的演算可以依照一条明确的道路进行下去.

这两种工具当时不但未曾造出，甚至于可以说还未动手，但两种工具的功能在今天的数理逻辑中已经部分地实现了. 可以说，不管今天的数理逻辑家有没有看过莱氏的著作，知道不知道莱氏的计划，但所作的研究大体上都是沿着莱氏所期望的方向进行的. 尽管莱氏对他的计划不但未曾完成，甚至于还未打下基础，但大家一致承认他是数理逻辑的首创者.

莱氏以后，在数理逻辑的研究上出现一段较不活跃的停顿时期. 在这段期间内，逻辑学家们大体上集中精力于传统逻辑的修补工作，即在传统逻辑的基础上、在传统逻辑的框框内，对传统逻辑作些修改，以期改进. 这里主要提出两人：汉米尔顿(W. Hamilton)和德摩根(A. de Morgan).

在传统逻辑中讨论"量"化和"质"化的时候，只对主语作"量"化，只对宾语作"质"化. 即"量"方面的"凡""所有""有些"只用以修饰主语（不修饰宾语），如"凡 s 均为 p""有 s 为 p"等等，而质方面的"非"只用以修饰宾语（不修饰主语），如

“凡 s 均非p”（等于“凡 s 均为非p”），“有 s 不是p”（等于“有 s 为非p”）. 由于作了这些限制，在换质换位等问题上常常出现一些困难和麻烦. 当时逻辑学家便针对这种情形而提出意见.

汉米尔顿主张对宾语也作量化，从而把以前的四种判断改而分成八种判断（每种判断都由于宾语量化而各分为二）. 他认为这样一来，可以使得以前在换质换位问题上所遇到的困难得到解决，因为这时换位方面只有简单换位一种，不再有限制换位了. 三段论式可以不再分四格而可作共同的处理，论式由 19 种而增为 36 种，其规律亦可以大大简化. 宾语量化以后，每一判断还可表成方程，运算简便.

汉米尔顿的八个判断可列举如下（其中$A1$，$A2$ 指由 A 分出来的，余仿此）：

$A1$. 一切 s 是一切 p；　　$A2$. 一切 s 是有些 p；

$E1$. 一切 s 不是一切 p；　　$E2$. 一切 s 不是有些 p；

$I1$. 有些 s 是一切 p；　　$I2$. 有些 s 是有些 p；

$O1$. 有些 s 不是一切 p；　　$O2$. 有些 s 不是有些 p.

其详细理论这里不多说了.

德摩根则注意另一方面，他主张对主语也作“质”化，即否定词也可放在主语前面，从而将每个判断分为二个，也得八个判断如下：

A. 一切 s 是 p；　　A'. 一切非 s 是 p；

E. 一切 s 不是 p；　　E'. 一切非 s 不是 p；

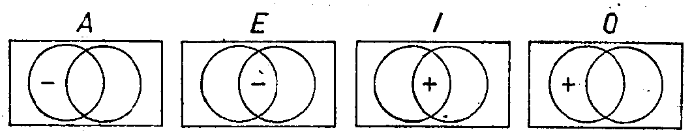
I. 有些 s 是 p；　　I'. 有些非 s 是 p；

O. 有些 s 不是p；　　O'. 有些非 s 不是 p.

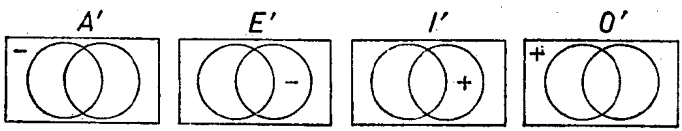
他认为即使对主语作了质化得出八种判断，也还未能给

出有关 s 和 p 之间的关系的全部信息，要得出 s 和 p 之间的关系的全部信息，须由这八个判断互相结合，作出一些复合判断才成．从理论上说，在八个判断中任意取出若干个而作复合判断，所得的复合判断的个数共有 $2^8=256$ 个，但他认为本质上只能得出七个，其余的或不可能出现或本质相同．

很早以来，人们已经把主宾式语句解释为类(集合)之间的包含关系，亦即主语所表示的类和宾语所表示的类之间的包含关系．如果我们照大数学家欧拉(L. Euler)那样，用圆表示集合，两集合之间的包含关系用两圆之间的包含关系来表示，并采用维因(J. Venn)的修正方式，那末传统的四判断可用下列四图表示(左圆表示 s，右圆表示 p，以后同)：



而德摩根所添补的四个判断则用下列四图表示：



照此表示，两圆把全集分成四部分，每部分均可填以＋，－或空白，所以看来似乎应该有 $3\cdot3\cdot3\cdot3=81$ 个可能(上面所说的 256 个可能中，除这 81 个可能外，其余都是自相矛盾，根本不应选取的)．如果容许空集和全集，那末这 81 个情况是的确可以发生的．但在传统逻辑中，一般是不讨论空集或全集的．因此 s 和 p 都不是空集，同时也非全集（故非 s 及非 p