

崔家骥 著

# 现代控制系统设计理论的新发展

科学出版社

# 现代控制系统 设计理论的新发展

崔家骥 著

科学出版社

## 内 容 简 介

本书介绍了作者自 80 年代,特别是 90 年代以来关于线性状态空间设计理论的研究成果.这些成果已构成了一条比较完整的设计新途径,它不仅丰富和发展了状态空间理论,而且为这一理论的广泛应用创造了有利条件.

全书共分五章和二附录.第一、二章分别对单一系统和反馈系统的性能和敏感性进行分析.第三章介绍本书提出的、能实现广义状态反馈控制的输出反馈控制器的动态部分的设计,这是本书提出的设计新途径的基础.第四章介绍产生状态反馈和广义状态反馈控制的部分,即本书的输出反馈控制器的输出部分的设计.第五章介绍了一个具体的故障检测、定位和容错控制器,它可以和第三、四章介绍的输出反馈控制器并行连接和运行.此外,每一章都有合适的例题解释,有些章节后面还有简单的练习题.附录 A 简略地介绍了和本书内容有关的线性代数和数值线性代数的一些基本知识;附录 B 列举了 8 个综合性设计题供读者练习和思考.

本书可供化工、冶金、机械、航空航天、电子工程和系统工程等领域中与自动控制有关的科研人员、研究生和本科大学生参考.

### 图书在版编目(CIP)数据

现代控制系统设计理论的新发展/崔家骥著. —北京:科学出版社,1996.9

ISBN 7-03-005058-4

I. 现… II. 崔… III. 自动控制系统-设计-理论 IV. TP273.02

中国版本图书馆 CIP 数据核字(96)第 17353 号

科学出版社出版

北京东黄城根北街 16 号

邮政编码: 100717

中国科学院印刷厂印刷

新华书店北京发行所发行 各地新华书店经售

\*

1996 年 9 月第 一 版 开本: 787×1092 1/16

1996 年 9 月第一次印刷 印张: 10

印数: 1—1600 字数: 225 000

定价: 25.80 元

# 前 言

本书汇集了自 80 年代,特别是 90 年代以来发表的关于线性系统状态空间设计理论的研究成果. 这些成果已经构成了一条比较完整的和崭新的设计途径. 这一设计途径可以在兼顾系统性能的前提下,基本解决现有结果未能解决的低敏感性问题. 性能及鲁棒性(后者即为对于系统参数变化和干扰的低敏感性)是对任何一个实际工程系统的两个既互相矛盾又不可忽视的主要要求,因此,这一新的设计途径不仅丰富和发展了状态空间设计理论,还为这一理论的广泛应用创造了必要的条件.

状态空间理论是从 60 年代发展起来的. 在现有的理论中,状态反馈控制和实现状态反馈控制的观测器是完全分开来设计的. 虽然这样设计出来的直接状态反馈系统能有某种最优的性能和低敏感性,但是在绝大多数情况下,带有实现这一最优状态反馈控制的观测器的反馈系统却没有同样的低敏感性. 本书介绍的设计新途径是把状态反馈和实现它的观测器结合起来设计,也就是根据观测器的设计结果来设计状态反馈. 这样设计出来的系统不但可以实现一种只稍带有限制的(广义的)状态反馈控制,而且可以拥有和相对于这一状态反馈控制的直接状态反馈系统完全相同的低敏感性. 这一结果对于所有输出多于输入以及所有拥有一个以上稳定传输零点的系统都有效. 对于其他的系统,该设计新途径也可以不加改变地应用,并能在维持敏感性方面达到某种最佳近似的程度.

控制理论主要由经典控制理论和状态空间(现代)控制理论所组成. 与经典控制理论相比,状态空间理论能够更加详细准确地描述单一系统的性能和敏感性,但是对于反馈系统的敏感性的描述却不清楚. 虽然本书只限于介绍状态空间理论,但是本书的分析和设计仍然能够充分地兼顾反馈系统的性能和低敏感性. 这是因为本书充分应用了经典控制理论中的一个关键的基本概念——用环路传递函数来描述反馈系统的敏感性. 当然,根据这一基本概念提出的设计要求仍然是由基于状态空间系统模型的设计来满足的.

控制理论的主要意义在于能够普遍地指导复杂控制系统的设计. 这就要求控制理论能够提出真正兼顾系统的性能和低敏感性的设计要求. 这又要求针对这些具体设计要求,控制理论能够提出真正系统的、简单的、普遍的和能充分利用设计自由度的解决方法. 本书只对这些设计方法及其理论基础作集中的介绍,而不试图对现有状态空间理论的其他众多的结果作全面的介绍. 对于一些特别是分析性质的数学结果,本书也只注重其物理意义和出处,不作详细的和严格的论述.

本书包括了下列 10 个主要的和在同类文献中尚未出现的新结果:

1. 一种可以实现(广义)状态反馈控制的输出反馈控制器的原理及设计方法. 这一控制器所在的反馈系统具有和其对应的状态反馈系统完全相同的低敏感性(第二,第三和第四章).

2. 在特征值配置设计时,充分利用所有的剩余自由度来配置特征向量. 这一结果包括数值的迭代方法和解析的解耦方法(第 4.1,4.2 节).

3. 用静态输出反馈/广义状态反馈来全面配置特征值和特征向量(第 4.1 节).

· i ·

4. 能兼顾系统模型误差以及观测噪声影响的故障检测、定位和容错控制器,及其普遍、简明的设计程序(第五章).

5. 能实现任意(无限制)状态反馈控制的最小阶观测器,及其最简化的、系统性的和普遍的设计程序(第 3.4.1 小节).

6. 矩阵方程  $TA - FT = LC$  ( $A$  和  $C$  是任意的和能观的,  $F$  的特征值是任意的)的解  $(F, T, L)$ . 这一解与现有的“Sylvester”方程  $TA - FT = C$  的解  $(F, T)$  有着根本不同. 这一解不仅不要求矩阵  $A$  和  $F$  有不同的特征值,而且还能使矩阵  $F$  的特征值完全解耦,并能使矩阵  $T$  的每一行都由其基向量来表示. 此外,这一解能使其所解的方程的剩余自由度得以充分利用,而这一方程又是状态空间设计理论中最基本的和最重要的方程(第二至第五章).

7. 从反馈控制器的状态以及系统的输出观测中直接产生所需的状态反馈控制信号(而不是先产生系统的状态以后再产生状态反馈控制信号)的设计思想. 这一基本思想将第一次被运用在本书的整个设计途径中(而不只是运用在函数观测器的设计中)(第二至第五章等).

8. 对状态空间理论中的未知输入观测器以及静态输出反馈这两个现有的基本控制结构的完全统一(第 3.4.2 小节).

9. 用新的更加普遍准确的理论公式以及每个单一特征值的敏感性,来测量和指导鲁棒稳定性的设计(第 1.3 节).

10. 用自适应状态反馈控制的概念来设计故障包容控制器(第 4.2 节).

以上 10 个结果中的前 5 个是具体的设计结果. 后 5 个是使这前 5 个结果得以产生的新理论、新基础、新方向和新概念. 因此本书中的设计新途径(第 1 个结果)是建立在一些重要的理论研究的发展和成果(第 6 个到第 8 个结果)上的. 除了第 2 和第 3 个结果以外(其中第 2 个结果中的一部分尚未公开发表),其他结果主要出自作者 10 年来发表的论文.

设计计算的可靠性也是极其实和重要的. 这是因为实际的控制设计问题是复杂的和需要大量运算的,而不可靠的计算方法在大量的计算中往往会因为初始数据误差和计算舍入误差的积累,最终使计算结果完全不可靠. 基于这一原因,本书尽量采取了可靠的设计计算程序,比如用海森堡型矩阵取代规范型矩阵,用正交线性变换取代普通线性变换,等等. 可靠的计算也是状态空间理论相对于经典控制理论的另一个重要优点,因为后者所要求的多项式计算往往是不可靠的.

因为本书提出了更高的设计要求(同时满足性能和低敏感性)和更可靠的计算要求,并且一开始就深入到多输入和多输出系统的普遍的分析 and 设计中,所以,本书要求读者具有比较扎实的线性代数的基础. 这一情况相似于经典控制论的发展要求读者具有比较扎实的复变函数的基础. 但是本书所需的数学工具没有超出简单线性代数的范围. 另外,线性代数计算的复杂性也因为数学软件的出现而在实际运用中大大简化了. 本书的设计方法完全以计算机算法程序的形式出现,而这些程序中的每一步计算都已简化到了可以用现有数学软件一步完成的程度. 为了使读者更好地掌握本书所需要的数学基础,作者在附录 A 中用尽可能简单的方式介绍了本书必需的线性代数和数值线性代数的一些基础结果.

总之,本书比较全面地涉及了状态空间理论的基本分析和设计问题,并给予了简明而深入的叙述和处理.因此本书适合作为学过一门控制理论课程的学生的教科书.本书包含的大部分内容是作者八九十年代发表的研究结果,其中有些结果是近日才发表的.因此本书也可以作为介绍最新的研究成果和研究方向的专著.本书还特别注重介绍了具体到计算问题和考虑到实际要求的设计方法.因此本书还可以供从事实际控制系统设计的工作者参考.

本书共分五章.第一和第二章分别对单一系统和反馈系统进行分析,主要集中在系统的性能和敏感性这两个方面.这一分析揭示了本书提出的新的设计途径的优越性和必要性.第三章介绍本书提出的、能实现广义状态反馈控制的输出反馈控制器的动态部分的设计.这一章是本书提出的新的设计途径的基础步骤,也是第四和第五章中介绍的设计方法的基础.第四章介绍产生状态反馈和广义状态反馈控制的部分,即本书的输出反馈控制器的输出部分的设计.该章主要介绍了特征结构配置的设计,同时也介绍了线性二次型最优控制的设计.第五章介绍了一个具体的故障检测、定位和容错控制器,它可以和第三、第四章中的输出反馈控制器并行连接和运行.此外,每一章都有充足的例题解释.除了第二章以外的每一章的后面还有简单练习题.附录A 简略地介绍了与本书内容有关的线性代数和数值线性代数的一些基本知识;附录B 列举了8个综合性的设计题目.

作者多年来一直在美国工作,对国内的研究成果了解不够.本书是作者第一本中文专著,也是作者编写的第一本书,内容又基本上是全新的,因此难免有偏漏之处.希望能够得到国内同行的包涵和指正.

在本书的写作过程中,作者得到了纽约州立大学陈启宗教授、清华大学郑大钟教授和中国科学院自动化研究所郑应平教授的帮助.作者能够撰写本书与其伯父崔耀宗博士的帮助是分不开的.本书中由计算机辅助完成的计算和作图主要由 Mr. Reza Shahriar 协助完成.“李立聪基金”为本书的出版提供了资助费用,作者在此一并向他们表示感谢.

作者

# 目 录

## 前 言

<b>第一章 单一系统的分析</b> .....	1
1.1 两类不同的数学模型 .....	1
1.1.1 两类不同数学模型的定义和形成 .....	1
1.1.2 状态空间模型的特征分解 .....	6
1.1.3 系统的阶数和能控能观性质 .....	7
1.1.4 系统的零极点 .....	12
1.2 单一系统的性能的分析 .....	14
1.3 单一系统的敏感性分析 .....	19
1.3.1 特征值的敏感性 .....	21
1.3.2 系统稳定性的敏感性 .....	24
习题 .....	27
<b>第二章 反馈控制系统的分析</b> .....	30
2.1 反馈控制系统的敏感性和环路传递函数 .....	30
2.1.1 对于受控系统的数学模型误差的敏感性 .....	31
2.1.2 对于控制输入扰动的敏感性 .....	32
2.2 状态空间理论中的反馈控制系统的敏感性 .....	35
2.2.1 状态反馈控制结构 .....	35
2.2.2 静态输出反馈控制结构 .....	36
2.2.3 观测器反馈控制结构(环路传递恢复) .....	37
2.3 观测器的基本设计概念及其所在反馈系统的性能 .....	43
2.3.1 从观测器状态和系统输出直接产生状态反馈控制信号的设计概念 .....	43
2.3.2 观测器反馈系统的性能(分离定理) .....	48
2.4 一个新的反馈控制结构——能实现状态反馈控制的动态输出 反馈控制结构 .....	50
<b>第三章 反馈控制器动态部分的设计</b> .....	54
3.1 系统能观海森堡型的计算 .....	54
3.2 矩阵方程 $TA - FT = LC$ 的解的计算 .....	59
3.3 矩阵方程 $TB = 0$ 的解的计算 .....	65
3.4 新结果的进一步分析 .....	75
3.4.1 反馈控制器的阶数 .....	75
3.4.2 对状态空间理论中现有的两个基本结构的完全统一 .....	82
习题 .....	83
<b>第四章 反馈控制器输出部分的设计</b> .....	85
4.1 特征值的选择和配置 .....	85

4.1.1	特征值(极点)的选择 .....	85
4.1.2	用状态反馈配置特征值的设计方法 .....	86
4.1.3	用广义状态反馈来配置极点的设计方法 .....	88
4.2	反馈系统特征向量的配置 .....	92
4.2.1	数值迭代方法 .....	93
4.2.2	特征向量配置的一些解析规则 .....	97
4.3	线性二次型最优控制设计 .....	103
4.3.1	状态反馈系统的二次型最优设计 .....	104
4.3.2	广义状态反馈的二次型最优设计 .....	106
4.3.3	总结 .....	108
	习题 .....	109
<b>第五章</b>	<b>故障的检测、定位和容错控制 .....</b>	<b>112</b>
5.1	故障的检测和诊断 .....	112
5.1.1	问题的分析和公式化 .....	112
5.1.2	设计程序 .....	115
5.2	故障的自适应容错控制 .....	118
5.3	系统模型误差和观测噪声的影响及其处理 .....	121
	习题 .....	127
<b>附录 A</b>	<b>线性代数和数值线性代数的基础简介 .....</b>	<b>128</b>
A.1	线性代数中的一些基本概念 .....	128
A.1.1	线性相关、线性无关、线性空间 .....	128
A.1.2	基向量、线性变换、正交线性变换 .....	131
A.2	矩阵三角化或梯形化的运算 .....	132
A.3	奇异值分解 .....	138
A.3.1	奇异值分解的存在和定义 .....	138
A.3.2	奇异值分解的性质 .....	138
A.3.3	奇异值分解的应用 .....	140
<b>附录 B</b>	<b>实际设计题目 .....</b>	<b>142</b>
	<b>参考文献 .....</b>	<b>147</b>



# 第一章 单一系统的分析

本章共分三节。第一节叙述多变量线性系统的状态空间模型和传递函数模型的形成及其相互之间的关系。这一节特别注意了用系统动态矩阵的特征结构来显示系统的能控和能观这两个重要性质,以及系统的零极点这两类重要的参数。第二节分析系统的性能,即系统的稳定性以及系统的暂态响应的速度和平稳度。从线性常系数微分方程的解析解可以明确地显示出系统的动态矩阵的特征值(或系统的极点)对于系统性能的直接的和决定性的作用。第三节分析系统对于其参数变化的敏感性,主要强调矩阵的特征值的敏感性是由其对应的特征向量所决定的。

## 1.1 两类不同的数学模型

### 1.1.1 两类不同数学模型的定义和形成

控制理论的工作一直主要集中在线性时不变系统。本书也只涉及线性时不变系统的控制问题。一个实际的线性时不变系统可以用状态空间和传递函数这两类数学模型来描述。基于状态空间模型的控制理论称为“状态空间控制理论”或“现代控制理论”。基于传递函数模型的控制理论称为“经典控制理论”。

本小节将叙述这两类数学模型的形成及它们之间的关系。

状态空间模型是由一组( $n$ 个)一阶线性常系数微分方程(1.1.a)和一组线性方程(1.1.b)所组成:

$$\dot{\mathbf{x}}(t) = \mathbf{A}\mathbf{x}(t) + \mathbf{B}\mathbf{u}(t) \quad (1.1.a)$$

$$\mathbf{y}(t) = \mathbf{C}\mathbf{x}(t) + \mathbf{D}\mathbf{u}(t) \quad (1.1.b)$$

其中,  $\mathbf{x}(t) = [x_1(t), \dots, x_n(t)]'$  是系统的状态向量(符号“ $'$ ”代表转置运算);

$\mathbf{u}(t) = [u_1(t), \dots, u_p(t)]'$  是系统的输入信号;

$\mathbf{y}(t) = [y_1(t), \dots, y_m(t)]'$  是系统的输出信号;

$\mathbf{A}, \mathbf{B}, \mathbf{C}, \mathbf{D}$  分别是一个  $n \times n, n \times p, m \times n$  和  $m \times p$  维的实常数矩阵。

在上述模型中,方程(1.1.a)称为系统的“动态方程”。这一方程描述系统的“动态部分”,即由系统的初始状态  $\mathbf{x}(0)$  和输入  $\mathbf{u}(t)$  决定系统状态  $\mathbf{x}(t)$  的部分。因此矩阵  $\mathbf{A}$  称为系统的“动态矩阵”。方程(1.1.b)则称为系统的“输出方程”。这一方程描述系统的“输出部分”,即由系统状态  $\mathbf{x}(t)$  和系统输入  $\mathbf{u}(t)$  决定系统输出  $\mathbf{y}(t)$  的部分。这一部分的信号之间的关系是瞬间的,即静态的、无记忆的。

从式(1.1)及其定义可以看到,参数  $p$  和  $m$  分别代表系统的输入和输出的数目。如果  $p > 1$ , 我们称其所在的系统为“多输入系统”。如果  $m > 1$ , 我们称其所在的系统为“多输出系统”。任何一个多输入或多输出的系统都被称为是“多变量系统”。另外,我们称单输入和单输出的系统( $p = m = 1$ )为“单变量系统”。

系统状态  $\mathbf{x}(t)$  的物理意义是其初始值  $\mathbf{x}(0)$  能充分地反映系统的初始状态或初始的能量分布。比如在只包含线性时不变元件(如电感、电阻和电容)的电路系统中,系统状态  $\mathbf{x}(t)$  是由电路中的所有独立的电容电压和电感电流所组成。这样  $\mathbf{x}(0)$  就充分地反映了电路系统的初始电荷量和磁通量的储量和分布。又比如在只包含线性时不变元件(如弹簧、阻尼器和质体)的线性运动的机械系统中,系统状态  $\mathbf{x}(t)$  是由系统中所有独立的质体速度和弹簧弹力所组成。这样  $\mathbf{x}(0)$  就充分地显示了该机械系统的初始动能和初始势能的储量和分布。因此,系统状态的数目  $n$  也代表系统内独立的能量储存元件的数目。

例 1.1 在下列电路系统中:

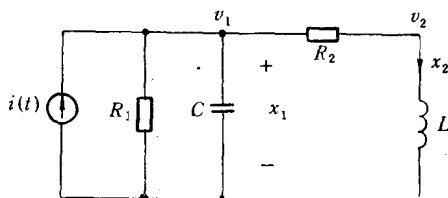


图 1.1 一个线性时不变的电路系统

设  $v_1(t), v_2(t)$  为以上电路系统中的两点电压,再设电路中的电容电压和电感电流分别为该电路系统的两个状态  $x_1(t)$  和  $x_2(t)$ , 则有

$$v_1(t) = x_1(t), \text{ 和 } v_2(t) = x_1(t) - R_2 x_2(t) \quad (1.2)$$

也就是说当知道了电路系统的状态以后,系统内的任何点电压和支电流(包括被指定为输出信号的电压或电流)都可以是系统状态和系统输入的线性组合。电路系统的输出部分的模型(1.1.b)就是这样得来的。比如当输出  $\mathbf{y}(t) = [v_1(t), v_2(t)]'$  时,式(1.1.b)内的

$$C = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 1 & -R_2 \end{bmatrix}, D = 0$$

电路系统动态部分的模型也可以从标准的电路分析中得到。平衡  $v_1$  和  $v_2$  这两点上的电流,则有

$$i(t) = C\dot{v}_1(t) + v_1(t)/R_1 + [v_1(t) - v_2(t)]/R_2 \quad (1.3.a)$$

$$0 = [v_2(t) - v_1(t)]/R_2 + \left[ \int v_2(t) dt \right] / L \quad (1.3.b)$$

将式(1.2)代入式(1.3)并经过简单运算(包括对式(1.3.b)的两边微分),就可以得到式(1.1.a)的形式,即

$$\dot{x}_1(t) = (-1/CR_1)x_1(t) + (-1/C)x_2(t) + (1/C)i(t)$$

$$\dot{x}_2(t) = 1/Lx_1(t) + (-R_2/L)x_2(t)$$

这样在式(1.1.a)中,

$$A = \begin{bmatrix} -1/CR_1 & -1/C \\ 1/L & -R_2/L \end{bmatrix}, B = \begin{bmatrix} 1/C \\ 0 \end{bmatrix}$$

例 1.2 在下列线性运动的机械系统中:

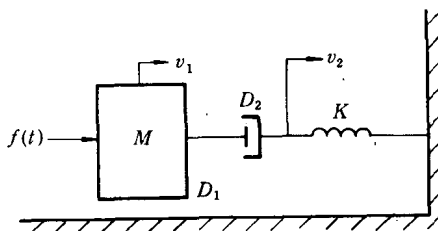


图 1.2 一个线性运动的机械系统

设  $v_1(t)$  和  $v_2(t)$  为系统内的速度, 再设系统的质体速度和弹簧弹力为系统的两个状态  $x_1(t)$  和  $x_2(t)$ , 则有

$$v_1(t) = \dot{x}_1(t), v_2(t) = \dot{x}_1(t) - (1/D_2)x_2(t) \quad (1.4)$$

也就是说当知道了机械系统的状态以后, 系统内任何一点上的速度和任何部件上的应力(包括被指定为输出信号的速度和应力)都可以是系统状态和系统输入的线性组合. 机械系统的输出部分的模型(1.1.b)就是这样得来的. 比如, 当输出  $y(t) = [v_1(t), v_2(t)]'$  时, 式(1.1.b)中

$$C = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 1 & -(1/D_2) \end{bmatrix}, \quad D = 0$$

机械系统的动态部分的模型也可以从标准的力学分析中得到. 平衡在  $v_1$  和  $v_2$  这两点上的力, 则有

$$f(t) = M\dot{v}_1(t) + D_1v_1(t) + D_2[v_1(t) - v_2(t)] \quad (1.5.a)$$

$$0 = D_2[v_2(t) - v_1(t)] + K \int v_2(t) dt \quad (1.5.b)$$

将式(1.4)代入(1.5), 并经过简单运算(包括对(1.5.b)的两边微分), 就可以得到(1.1.a)的形式, 即

$$\dot{x}_1(t) = (-D_1/M)x_1(t) + (-1/M)x_2(t) + (1/M)f(t)$$

$$\dot{x}_2(t) = Kx_1(t) + (-K/D_2)x_2(t)$$

这样在式(1.1.a)中,

$$A = \begin{bmatrix} -D_1/M & -1/M \\ K & -K/D_2 \end{bmatrix}, \quad B = \begin{bmatrix} 1/M \\ 0 \end{bmatrix}$$

从上面两个例子可以看到, 线性时不变的电路系统和机械系统的状态空间模型及其推导基本上完全类似, 而且这一推导可以系统化和标准化. 这一不同物理系统在数学模型上类似的性质, 是一个物理系统(如机械系统)的运行可以由另一个类似的物理系统(如电路系统)或由其数学模型系统的数值解来模拟的原因. 我们分别称以上这两类模拟为“物理模拟”和“数字模拟”.

这样的类似性质还可以推广到更多的线性时不变系统(如旋转运动的机械系统、热力系统和流体系统, 等等)中去. 所以控制理论, 特别是线性控制理论虽然因为基于数学模型(而不是基于具体工程系统)而比其他的工程专业抽象, 但却比它们具有更加普遍的和广泛的应用价值.

线性时不变系统的第二类数学模型——传递函数模型, 可以从系统的状态空间模型得到.

设  $X(s)$ ,  $U(s)$  和  $Y(s)$  分别为系统状态  $\mathbf{x}(t)$ 、系统输入  $u(t)$  和系统输出  $y(t)$  的拉氏变换, 再分别对式(1.1.a)和(1.1.b)的两边进行拉氏变换, 则有

$$X(s) = (sI - A)^{-1}\mathbf{x}(0) + (sI - A)^{-1}BU(s) \quad (1.6.a)$$

$$Y(s) = CX(s) + DU(s) \quad (1.6.b)$$

其中  $I$  代表一个  $n$  维的单位矩阵( $sIX(s) = sX(s)$ ).

将式(1.6.a)代入(1.6.b), 则有

$$Y(s) = C(sI - A)^{-1}\mathbf{x}(0) + [C(sI - A)^{-1}B + D]U(s) \quad (1.6.c)$$

零输入响应  $Y_{zi}(s)$                       零状态响应  $Y_{zs}(s)$

从式(1.6.c)可以看到, 系统输出(又称“系统响应”)  $Y(s)$  由系统初始状态  $\mathbf{x}(0)$  和系统输入  $U(s)$  这两个因素所决定. 如果系统输入  $U(s)$  是零, 则  $Y(s)$  等于零输入响应  $Y_{zi}(s)$ , 并由系统初始值  $\mathbf{x}(0)$  所决定. 如果系统初始值  $\mathbf{x}(0)$  是零, 则  $Y(s)$  等于零状态响应  $Y_{zs}(s)$ , 并由系统输入  $U(s)$  所决定. 这一性质被称为线性系统的“叠加性质”(superposition). 显然式(1.6)中的线性性质是由线性微分方程(1.1)和拉氏变换的线性性质所决定的.

系统的传递函数模型  $G(s)$  是根据系统的零状态响应

$$Y_{zs}(s) = G(s)U(s) \quad (1.7)$$

来定义的. 比较式(1.6.c)和(1.7),

$$G(s) = C(sI - A)^{-1}B + D \quad (1.8)$$

从以上传递函数的定义可以看出, 传递函数模型  $G(s)$  只反应系统的输出  $Y(s)$  和输入  $U(s)$  之间的关系(见式(1.7)), 并且是经过合并简化了式(1.6.a)和(1.6.b)的信息以后, 以式(1.8)为形式的关系. 传递函数模型不能直接反映系统初始值对系统输出的影响(即不能反映系统的零输入响应), 尽管这一影响是极为重要的.

**例 1.3** 在图 1.3 的 RC 电路(a)以及带质体  $M$  和摩擦阻力  $D$  的机械系统(b)中, 平

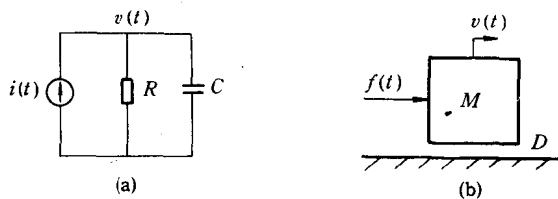


图 1.3

衡系统(a)中的电流  $i(t)$  和系统(b)中的力  $f(t)$  为

$$i(t) = C\dot{v}(t) + [v(t) - 0]/R$$

和

$$f(t) = M\dot{v}(t) + D[v(t) - 0]$$

也就是说这两个系统的状态空间模型(1.1.a)中的  $A, B$ , 分别为  $(-1/RC, 1/C)$  和  $(-D/M, 1/M)$ .

对这两个方程的两边作拉氏变换和改动, 则有

$$V(s) = \frac{1}{s - \lambda}v(0) + \frac{B}{s - \lambda}U(s)$$

这里  $V(s)$  和  $U(s)$  分别是状态  $v(t)$  和输入信号  $i(t)$  或  $f(t)$  的拉氏变换。

设  $U(s)$  为阶跃函数  $(F/s)$ , 对上述方程作反拉氏变换, 则当  $t > 0$  时

$$\begin{aligned} v(t) &= e^{\lambda t} v(0) + (-FB/\lambda)[1 - e^{\lambda t}] \\ &= v_{zI}(t) + v_{zS}(t) \end{aligned}$$

很明显,  $V(s)$  和  $v(t)$  的两项分别为系统在频域和时域的零输入响应和零状态响应。

$v(t)$  的两个项的波形图可示如下:

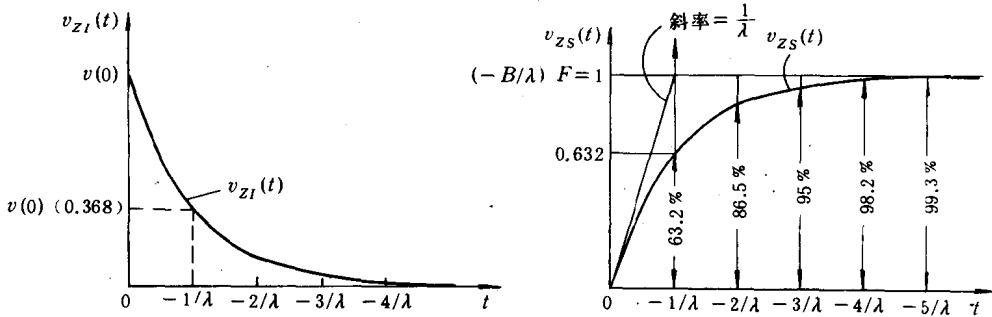


图 1.4 一阶系统的零输入响应和零状态响应(阶跃函数输入)的波形图

图 1.4 的左图显示系统的零输入响应  $v_{zI}(t)$ , 从其初始值  $v(0)$  开始, 以时间常数为  $(-1/\lambda)$  的速度衰减为 0 (当  $t = (-1/\lambda)$  时衰减到初始值的 36.8%)。

这一波形有着明显的物理意义。在电路系统里, 这一波形显示了储存于电容  $C$  内的电荷  $(=Cv(t))$ ,  $v(t)$  为电容电压) 在零输入电流的情况下, 通过电阻  $R$  以电流为  $v(t)/R$  放电的情形。这一放电过程的时间常数为  $RC$ 。也就是说这一系统内的电容  $C$  或电阻  $R$  越大, 则放电的速度就越慢。在机械系统里, 这一波形显示了质体的速度  $v(t)$  在零输入力的情况下因为摩擦阻力  $Dv(t)$  的作用减慢的情形。这一减速滑行过程的时间常数为  $M/D$ 。也就是说, 质体质量  $M$  越大, 或阻力  $D$  越小, 则速度衰减的过程也越慢。

图 1.4 的右图显示系统的零状态响应  $v_{zS}(t)$  从 0 开始, 以时间常数为  $(-1/\lambda)$  的速度达到其稳态 (对于阶跃函数输入, 当  $t = (-1/\lambda)$  时达到稳态水平  $(-FB/\lambda)$  的 100% - 36.8% = 63.2%)。

这一波形也有其明显的物理意义。在电路系统里, 这一波形显示了电容内的电荷被输入电流源  $(i(t) = F)$  充电时的情形。当电容被充满电时 (即稳态时), 其电压  $(v(t) = Ri(t) = RF = -FB/\lambda)$  等于左边输入端的电压。这一充电过程的时间常数仍然是  $RC$ 。也就是说系统的电阻  $R$  或电容  $C$  越大, 则充电的速度越慢。在机械系统里, 这一波形显示了质体的速度  $v(t)$  在输入力  $(f(t) = F)$  的作用下从静止加速到一个稳定速度  $(F/D)$  的情形。这一加速过程的时间常数仍然为  $M/D$ 。也说是说, 质体质量  $M$  越大, 则其速度越不容易加快。同时, 阻力  $D$  越小, 则可达到的稳态速度  $(F/D)$  越高, 达到这一稳态速度的 62.3% 的时间也越长。

例 1.3 的电路和机械系统具有完全类似的数学模型, 因此也具有完全类似的如图 1.4 所描述的性质。例 1.3 同时显示出系统的初始状态 (初始电荷量和初始质体速度) 对于系统的影响的重要性。这一影响即系统的零输入响应 (放电过程和减速过程)。

定义 (1.7) - (1.8) 显示出系统的传递函数模型不能直接地和详细地反映系统的零输入响应, 特别对有多个状态, 多个输入和多个输出的系统更是如此。这一性质不可避免地

影响着对于系统的暂态响应的理解和控制。这是因为系统的暂态响应即系统的初始响应,与系统的零输入响应有着密切的关系。比如例 1.3 中的暂态响应主要由时间常数所决定,而这一时间常数又与系统的零输入响应(放电过程与减速过程)有着密切的关系。暂态响应的收敛速度与平稳度是系统性能的主要标志。因此基于传递函数的经典控制理论在分析控制系统的性能方面不如状态空间理论。这一点还将在本章第二节详细分析。

最后,因为矩阵  $D$  在式(1.1.b)和(1.8)中只反映一部分独立的和静态的输入和输出之间的关系,所以这部分关系及其影响可以在设计时非常容易地改变或取消。因此在本书以后的讨论中,我们设  $D=0$ 。这样

$$G(s) = C(sI - A)^{-1}B \quad (1.9)$$

根据式(1.6.a),(1.6.b)和式(1.9)中的传递函数的关系, $G(s)$ 还可以分解为两个串联系统(见图 1.5)。

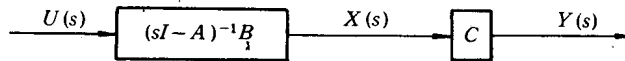


图 1.5 系统的传递函数模型的分解

### 1.1.2 状态空间模型的特征分解

为了进一步深入地分析系统的动态部分,我们设

$$A = V\Lambda V^{-1} = [V_1 \mid \cdots \mid V_q] \begin{bmatrix} \Lambda_1 & & \\ & \ddots & \\ & & \Lambda_q \end{bmatrix} \begin{bmatrix} T_1 \\ \vdots \\ T_q \end{bmatrix} = T^{-1}\Lambda T \quad (1.10.a)$$

为矩阵的特征分解。其中  $\Lambda = \text{diag}\{\Lambda_1, \dots, \Lambda_q\}$  是约当型矩阵,其对角块  $\Lambda_i (i=1, \dots, q)$  (也称“约当块”)由  $A$  的特征值  $\lambda_i (i=1, \dots, n)$  按如下规则组成:

$\Lambda_i = \lambda_i$ , 如果其对应的  $\lambda_i$  是一个不重复的实数,

$$\Lambda_i = \begin{bmatrix} \sigma & \omega \\ -\omega & \sigma \end{bmatrix}, \text{ 如果其对应的 } \lambda_i \text{ 和 } \lambda_{i+1} \text{ 是一对共轭复数 } \sigma \pm j\omega \quad (1.10.b)$$

$\Lambda_i = \text{diag}\{\Lambda_{i_1}, \dots, \Lambda_{i_{q_i}}\}$ , 如果其对应的  $\lambda_i$  是一个重复  $n_i$  次的实特征值。其中  $\Lambda_{i_j} (j=1, \dots, q_i)$  是一个维数  $n_{ij}$  的双对角矩阵 ( $n_{i_1} + \dots + n_{i_{q_i}} = n_i$ ), 其形状为

$$\Lambda_{i_j} = \begin{bmatrix} \lambda_i & 1 & & 0 \\ & & \ddots & \\ & & & 1 \\ 0 & & & \lambda_i \end{bmatrix} \quad (1.10.c)$$

很明显,所有  $q$  个对角块  $\Lambda_i$  的维数  $n_i (i=1, \dots, q)$  加起来必须等于  $n$ 。

我们称式(1.10)为矩阵  $A$  的“特征分解”。任何一个实数方阵都可以有如式(1.10)的特征分解。在式(1.10)中,因为  $AV - V\Lambda = 0$ , 所以矩阵  $V$  被称为“右特征向量矩阵”。矩阵  $V$  中的每一列  $v_i (i=1, \dots, n)$  被称为是矩阵  $A$  的、相对于矩阵  $\Lambda$  中的特征值  $\lambda_i$  的“右特征向量”。同理,因为  $TA - \Lambda T = 0 (T=V^{-1})$ , 所以矩阵  $T$  及其中的每一行  $t_i (i=1, \dots, n)$  被分别称为矩阵  $A$  的“左特征向量矩阵”和“左特征向量”。在所有相对于式(1.10.c)的特征向量中,除了第一个特征向量以外,其余的特征向量称为“广义特征向量”(generalized

eigenvector).

因为式(1.10)意味着

$$(sI - A)^{-1} = [V(sI - \Lambda)V^{-1}]^{-1} = V(sI - \Lambda)^{-1}V^{-1}$$

所以,根据式(1.9)和逆矩阵定理,

$$G(s) = CV(sI - A)^{-1}V^{-1}B \quad (1.11.a)$$

$$= \frac{CV \operatorname{adj}(sI - \Lambda)V^{-1}B}{\det(sI - \Lambda)} \quad (1.11.b)$$

$$= \frac{CV \operatorname{adj}(sI - \Lambda)V^{-1}B}{(s - \lambda_1) \cdots (s - \lambda_n)} \quad (1.11.c)$$

其中  $\det(\cdot)$  和  $\operatorname{adj}(\cdot)$  分别代表括号内的矩阵的行列式和伴随矩阵.

从式(1.11)可以看到,动态系统( $n \neq 0$ )的传递函数  $G(s)$  可以是一个有理多项式,其分母是一个  $n$  阶多项式(称为“特征多项式”). 特征多项式的  $n$  个根即为系统的动态矩阵的  $n$  个特征值.

比较式(1.9)和(1.11)可以看到,由一组三个矩阵为代表的状态空间模型  $(A, B, C)$ , 和  $(\bar{A}, V^{-1}B, CV)$ , 在  $A = V\Lambda V^{-1}$  的条件下具有同样的传递函数  $G(s)$ . 我们称这样的两个状态空间模型及其代表的两个系统为互相“相似”, 并称两个相似的状态空间模型之间的相互变换为“相似变换”. 这样的相似情况可以推广到任何一个满足  $A = Q\bar{A}Q^{-1}$  的系统  $(\bar{A}, \bar{B} = Q^{-1}B, \bar{C} = CQ)$  (其中  $Q$  为任何可逆矩阵).

相似变换的物理意义可以这样来理解. 设  $\mathbf{x}(t)$  为由矩阵  $(A, B, C)$  所代表的系统在式(1.1.a)中的状态向量. 再设  $\bar{\mathbf{x}}(t)$  为由矩阵  $(\bar{A}, \bar{B}, \bar{C})$  所代表的系统的状态向量, 于是相似于式(1.1.a)的动态方程为

$$\dot{\bar{\mathbf{x}}}(t) = \bar{A}\bar{\mathbf{x}}(t) + \bar{B}u(t) \quad (1.12.a)$$

$$= Q^{-1}AQ\bar{\mathbf{x}}(t) + Q^{-1}Bu(t) \quad (1.12.b)$$

相似于式(1.1.b)的输出方程为

$$\mathbf{y}(t) = \bar{C}\bar{\mathbf{x}}(t) = C\mathbf{x}(t) \quad (1.12.c)$$

在式(1.12.b)的两边的左边乘  $Q$  再比较式(1.1.a), 则有

$$\mathbf{x}(t) = Q\bar{\mathbf{x}}(t), \text{ 或 } \bar{\mathbf{x}}(t) = Q^{-1}\mathbf{x}(t) \quad (1.13)$$

根据第 A.1.2 小节, 式(1.13)意味着状态  $\bar{\mathbf{x}}(t)$  是原状态  $\mathbf{x}(t)$  (设其基向量矩阵为  $I$ ) 在新的基向量矩阵  $Q$  的表示. 这是从  $(A, B, C)$  到  $(\bar{A}, \bar{B}, \bar{C})$  的相似变换的几何意义.

相似变换, 特别是变成如式(1.10)的特征分解的相似变换, 是状态空间理论中用来分析系统性质的非常有效的手段. 这一点将在本章的其余部分充分显示出来.

### 1.1.3 系统的阶数和能控能观性质

**定义 1.1** 系统的阶数等于系统的传递函数  $G(s)$  的特征多项式的阶数  $n$ . 从式(1.11)可知. 系统的阶数也等于系统的状态的数目  $n$  (或微分方程的次数  $n$ ).

让我们来讨论在式(1.11.c)中  $G(s)$  的分母和分子有公因子可以相消的情况. 因为这样的情况会使  $G(s)$  的分母(即特征多项式)的阶数  $n$  减小, 所以这样的系统也被称为“非最小阶系统”, 否则为“最小阶系统”.

这一情况的物理意义可以从状态空间模型中更清晰地显示出来. 从式(1.1)中对系

统的状态空间模型和系统的状态  $x(t)$  的介绍可知, 参数  $n$  是系统内部的状态(或能量储存元件)的数目. 因此  $n$  的减小说明有一些系统内部的状态不能在系统的输入和输出之间的关系  $G(s)$  中反映出来. 根据式(1.9),  $G(s)$  可以分解成两个互相重叠的组成部分, 即从输入  $U(s)$  到状态  $X(s)$  的“控制部分”  $(sI - A)^{-1}B$  和从状态  $X(s)$  到输出  $Y(s)$  的“观测部分”  $C(sI - A)^{-1}$ . 因此在非最小阶系统中, 有一些状态将不能在这两个部分或者两个关系中的至少一个关系中反应出来. 下面我们将对这两类情况分别作出定义.

**定义 1.2** 如果有至少一个系统状态不能受系统输入的影响, 则该系统为“不能控系统”, 反之则为“能控系统”. 在众多的能控/不能控的判别式中, 最简单的是“存在一个或更多的常数  $\lambda$  使得矩阵  $[\lambda I - A \mid B]$  的秩数小于  $n$ ”. 这些常数  $\lambda$  的数目等于不能控状态的数目.

**定义 1.3** 如果有至少一个系统状态不能影响到系统输出, 则该系统为“不能观系统”, 反之则为“能观系统”. 在众多的能观/不能观的判别式中, 最简单的是“存在一个或更多的常数  $\lambda$  使得矩阵  $[\lambda I - A' \mid C']$  的秩小于  $n$ ”. 这些常数  $\lambda$  的数目等于不能观状态的数目.

由于当  $\lambda$  不等于矩阵  $A$  的特征值时, 矩阵  $(\lambda I - A)$  的秩一定是  $n$ , 所以以上两个判别可以只针对矩阵  $A$  的  $n$  个特征值来进行.

到这里, 我们已经看到了线性系统的一个很普遍的现象——对偶现象. 比如线性物理系统中的电流和电压, 力和速度, 电荷量和磁通量, 动能和势能, 电感和电容, 弹簧器和质体, 都是对偶的. 同样在反映线性系统的线性代数和数学模型中, 矩阵的列和行, 右特征向量和左特征向量, 输入和输出, 以及能控性和能观性, 也都是对偶的.

对偶现象不但可以用来增强对线性系统的理解, 而且可以用来解决线性代数和状态空间理论中的一些具体问题. 比如为了判别一组系统矩阵  $(A, B)$  是否能控, 我们可以以判别另一组系统矩阵  $(A', B')$  是否能观来达到同样的目的.

因为矩阵  $[\lambda I - \bar{A} \mid \bar{B}] = Q^{-1}[(\lambda I - A)Q \mid B]$  和矩阵  $[\lambda I - A \mid B]$  的秩数相等, 所以相似变换不改变系统的能控性质. 从物理意义上说, 相似变换只是改变了描述系统的状态的基向量, 因此不可能改变系统的能控性质. 根据对偶现象, 相似变换也不可能改变系统的能观性质. 因此对系统能控性和能观性的判别可以在对该系统进行了相似变换以后再进行.

以下四个例子将显示出系统矩阵  $(A, B, C)$  被相似变换成特殊形式时(特别是特征分解时), 系统的能控和能观性可以明确地显示出来.

#### 例 1.4 判别系统

$$(A, B, C) = \left( \begin{bmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & -2 & 0 \\ 0 & 0 & -3 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} \mathbf{b}_1 \\ \mathbf{b}_2 \\ \mathbf{b}_3 \end{bmatrix}, [\mathbf{c}_1 \mid \mathbf{c}_2 \mid \mathbf{c}_3] \right)$$

的能控性和能观性.

很明显, 如果矩阵  $B$  的任何一行  $\mathbf{b}_i$  ( $i = 1, 2, 3$ ) 等于 0, 则存在  $\lambda = -i$  使矩阵  $[-iI - A \mid B]$  的第  $i$  行等于 0, 或使该矩阵的秩等于  $2 < n = 3$ . 只有当  $B$  的每一行都不等于 0 时, 矩阵  $[\lambda I - A \mid B]$  的三个行对于任何矩阵  $A$  的特征值  $\lambda (= -1, -2, -3)$  才能都线性独立. 所以根据定义 1.2 的判别式, 以上系统能控的充分必要条件是  $B$  的每一行都不等于 0.



同理,以上系统能观的充分必要条件是  $C$  的每一列  $c_i (i=1,2,3)$  都不等于  $0$ .

根据式(1.9),系统的传递函数

$$G(s) = C(sI - A)^{-1}B \\ = \frac{c_1(s+2)(s+3)b_1 + c_2(s+1)(s+3)b_2 + c_3(s+1)(s+2)b_3}{(s+1)(s+2)(s+3)}$$

可见当任何一个  $b_i$  或  $c_i (i=1,2,3)$  等于  $0$  时,  $G(s)$  都会出现分母和分子有公因子的情况. 当然,这一情况不能反过来辨别出到底是  $B$  还是  $C$  的行或列出现  $0$ , 因此也不能反过来辨别出系统到底是不能控还是不能观. 可见根据状态空间模型可以分辨系统的能控和能观性, 而根据传递函数模型则不可能.

系统的能控能观性还可以从其方框图显示:

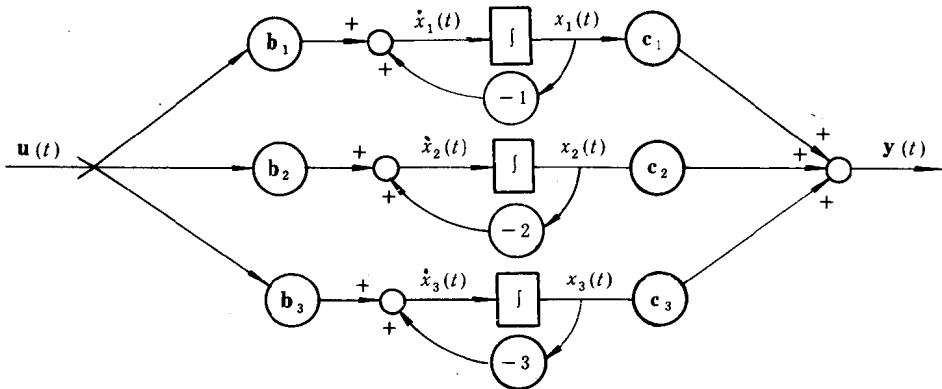


图 1.6 例 1.4 中系统的方框图

图 1.6 明显地显示出当任何一个  $B$  的行  $b_i (i=1,2,3)$  等于  $0$  时, 所对应的一个  $x_i(t)$  就因为不能被输入  $u(t)$  影响到而成为不能控的状态. 同理, 当任何一个  $c_i (i=1,2,3)$  等于  $0$  时, 其对应的一个  $x_i(t)$  就因为不能被  $y(t)$  联系到而成为不能观的状态.

例 1.5 例 1.4 是针对系统没有重复特征值的情况. 本例讨论有重复特征值的情况. 设

$$(A, B, C) = \left[ \begin{bmatrix} \lambda & 1 & 0 \\ 0 & \lambda & 1 \\ 0 & 0 & \lambda \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ b_3 \end{bmatrix}, [c_1 \mid 0 \mid 0] \right]$$

很明显, 矩阵  $[\lambda I - A \mid B]$  和  $[\lambda I' - A' \mid C']$  的秩数等于  $n$  的充分必要条件分别是  $B$  的最后一行  $b_3$  不等于零和  $C$  的第一列  $c_1$  不等于零.

让我们检查系统的方框图:

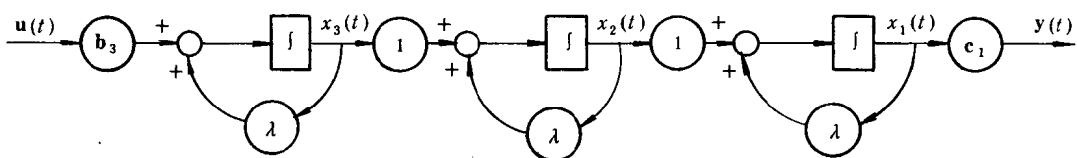


图 1.7 例 1.5 系统的方框图

图 1.7 显示出矩阵  $B$  的最后一行  $b_3$  和  $C$  的第一列  $c_1$  分别是所有三个状态与输入  $u(t)$  和输出  $y(t)$  的唯一联系. 因此它们的非零也就分别成为系统能控和能观的充分必要