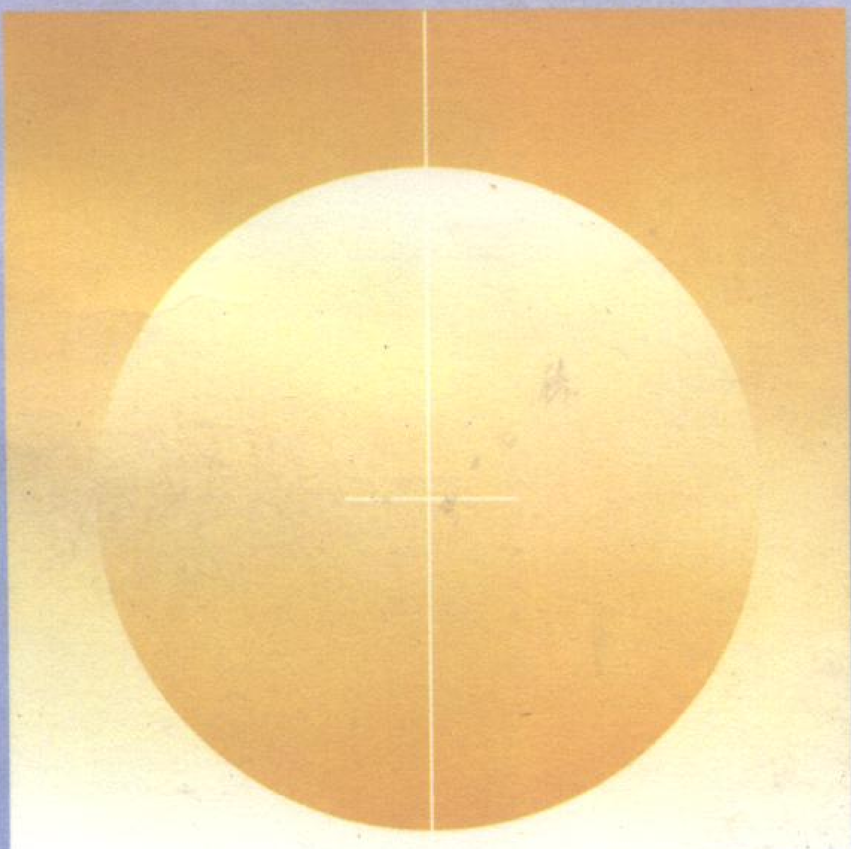
财经与管理等专业
教学与自学参考书

微积分

学习与考试指导

赵树嫄　胡显佑　陆启良　编



中国人民大学出版社

财经与管理等专业教学与自学参考书

微积分

学习与考试指导

赵树嫄　胡显佑　陆启良　编

中国人民大学出版社

图书在版编目（CIP）数据

微积分学习与考试指导/赵树嫄等编.
北京：中国人民大学出版社，1996
财经与管理等专业教学与自学参考书

ISBN 7-300-02303-7/O・35

Ⅰ.微…
Ⅱ.赵…
Ⅲ.微积分-高等学校-自学参考资料
Ⅳ.0172

中国版本图书馆 CIP 数据核字（96）第 20551 号

财经与管理等专业教学与自学参考书

微积分学习与考试指导

赵树嫄　胡显佑　陆启良　编

出版发行：中国人民大学出版社
（北京海淀路 175 号　邮码 100872）
经　　销：新华书店
印　　刷：河北省涿州市星河印刷厂

开本：1168×850 毫米 1/32　印张：17.75
1997 年 1 月第 1 版　1997 年 1 月第 1 次印刷
字数：442 000

定价：22.00 元
（图书出现印装问题，本社负责调换）

前　言

经济应用数学基础是财经、管理等专业的必修课．但该课程中某些内容，对有些读者，特别是自学的读者，有一定难度．例如对某些概念理解不透，运算技巧掌握不好等．因此不少读者要求出版学习该课程的参考书．我们就是应读者的这种要求，编写了本书．它可以给讲授该课程的教师提供“教学参考”，也可以给在校学生及参加自学考试的学员作为“学习与考试指南”，也可以为在职财经工作者自学进修或想投考财经类专业研究生的读者作“学习辅导”，也适用于社会上助学辅导班作考前复习的“串讲教材”．

本书以由中国人民大学出版社出版、赵树嫄主编的《经济应用数学基础(一)微积分》为主要教科书，同时兼顾其他类似教材的内容．所以不论使用哪本教材，均可采用本书作为参考书．

书中各章均包含四部分内容：重要概念与定理的析疑与总结，例题选讲，练习题和练习题解答．

在编写本书时，我们有以下一些考虑．

在“重要概念与定理的析疑与总结”中，强调“难点析疑”与“规律总结”，不是把全部学习的或应掌握的内容都涉及到，而是针对不易理解的概念和不易掌握的方法，即学生学习中的难点与疑点，进行分析、讲解，引导学生正确辨别、理解，使之对重要概念、方法以及疑难问题，理解得更深更透．对规律性的内容，加以总结，使读者掌握的知识更有条理性，更加巩固．

在“例题选讲”中，我们分门别类通过典型例题分析解答，然

后加以“小结”，以使读者能举一反三，触类旁通，对运算技巧掌握得更熟练，对基本概念理解得更准确.

各章的“练习题”均分为（A）（B）两部分，（A）组包括计算题、应用题和证明题等；（B）组包括填空题和选择题（至少有一个选项是正确的）. 这些“练习题”虽然也起到基本训练的作用，但主要具有“考试题”的特点，读者通过做练习题，可以检查自己对所学内容掌握的程度.

打“*”的内容，时间不富裕的读者可以略去.

全书共分九章，由赵树嫄担任主编. 参加编写的有赵树嫄（执笔一、二、三、四章），陆启良（执笔五、七章），胡显佑（执笔六、八、九章），褚永增对全书进行了审阅、整理与加工.

本书是根据编者的教学实践与经验编写的，希望能对学习《微积分》的读者有所帮助. 不妥之处，恳请读者指正.

编　者

1996年4月

目　　录

第一章　函　　数

函数是微积分学的研究对象，因此它是全书中最重要的基本概念之一．读者必须掌握函数关系的有关概念，深刻理解函数定义，特别要领会函数关系中定义域和对应规则两要素，会求函数的定义域，了解函数的几种简单性质，理解反函数和复合函数的概念，熟悉基本初等函数及其图形.

一、重要概念与定理的析疑与总结

（一）函数定义

若 D 是一个非空实数集合，设有一个对应规则 f，使每一个 $x\in D$，都有一个确定的 y 与之对应，则称这个对应规则 f 为定义在 D 上的一个函数关系．或称变量 y 是变量 x 的函数．记作

$$y=f(x),\qquad x\in D$$

为了正确理解函数定义，请注意下列几点.

1．自变量的取值范围

函数定义中自变量 $x\in D$，D 为自变量的取值范围，称为函数定义域．记作 D（f）.

定义中要求定义域是非空实数集合．例如 $y=\frac{1}{\sqrt{-x^2}}$ 这个式子不表示 y 与 x 的函数关系，因为对任何实数 x，都没有按给定规则与之对应的实数 y 值，即 x 的变化范围为空集，因此 y 与 x 不能构成一个函数关系.

2. 因变量与自变量的对应规则

定义中的 f 就是反映 y 与 x 的对应规则，即 y 与 x 的函数关系. 例如，$y=x^2$ 的对应规则是“因变量是自变量的平方”，根据这个规则，对任意的自变量 x 的值，都有一个确定的 y 值与之对应，因此 y 是 x 的函数关系.

注意，由 f 确定的 y 值（$x\in D$），必须是唯一的. 例如 $y^2=x$，对“因变量的平方等于自变量”这一规则来说，对每一个 x 值，都有 $y=\pm\sqrt{x}$ 两个值与之对应，这就不符合定义中“有一个确定的 y 值与之对应”的规定了，因此这个规则不能构成一个 y 与 x 的函数关系.

当定义域 D 与符合函数定义的对应规则 f 完全确定后，y 与 x 就构成一个函数关系 $y=f(x)$. 定义域与对应规则是构成函数关系的两大要素.

3. 因变量的变化范围

因变量 y 的变化范围是定义域中全部 x 所对应的全部函数值 y 的集合，称为函数的值域，记作 $Z(f)$.

$$Z(f)=\{y\,|\,y=f(x),x\in D\}$$

当定义域与对应规则确定后，值域也就随之而确定.

两个函数关系，只有当定义域与对应规则均相同时，才是相同的函数.

为了深入理解函数定义，考察下面几个例子.

例 1 考察 $y=3x^2+1$ 与 $s=3t^2+1$，是不是相同的函数？

这两个函数字母虽然不同，但其定义域与对应规则均相同，定义域均为（$-\infty$，$+\infty$），对应规则都是“因变量等于自变量平方的 3 倍加 1”，所以它们是相同的函数.

例 2 考察 $y=\lg x^2$ 与 $y=2\lg x$ 是不是相同的函数？

也许有的读者会认为中学代数中学过 $\lg x^2=2\lg x$，因此这两个函数是相同的函数.

事实上不然. $y=\lg x^2$ 的定义域是 $(-\infty, 0) \cup (0, +\infty)$，其图形见图 1.1. $y=2\lg x$ 的定义域是 $(0,+\infty)$，其图形见图 1.2，故 $y=\lg x^2$ 与 $y=2\lg x$ 是两个不同的函数. 如果只考察 $(0, +\infty)$，则两者是一致的.

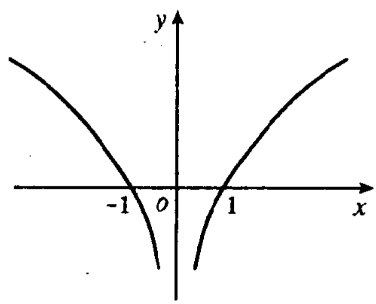


图 1.1

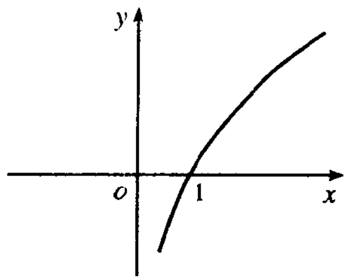


图 1.2

例 3 考察 $y=x$ 与 $y=\sqrt{x^2}$ 是不是相同的函数？

虽然这两个函数的定义域相同，均为 $(-\infty,+\infty)$，但其对应规则不同. $y=x$ 的对应规则是“不论 x 取任何值，y 与 x 的值相等”，而 $y=\sqrt{x^2}$ 的对应规则是“当 $x<0$ 时，$y=-x$，当 $x\geqslant 0$ 时，$y=x$”. 前者值域为 $(-\infty,+\infty)$，后者值域为 $[0,+\infty)$. 其图形分别是图 1.3 与图 1.4，故 $y=x$ 与 $y=\sqrt{x^2}$ 是两个不同的函数.

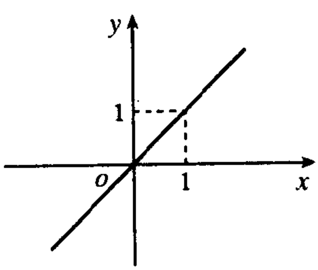


图 1.3

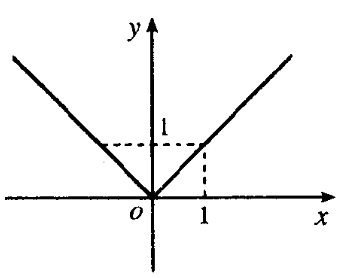


图 1.4

例 4 考察 $y=\dfrac{\sin 2x}{\cos x}$ 与 $y=2\sin x$ 是不是相同的函数？

也许有的读者认为，利用三角函数的倍角公式 $\sin 2x=$

$2\sin x\cos x$，则有

$$\frac{\sin 2x}{\cos x}=\frac{2\sin x\cos x}{\cos x}=2\sin x$$

因此两个函数是相同的函数.

作为函数关系 $y=\dfrac{\sin 2x}{\cos x}$ 的定义域要求 $\cos x\neq 0$，但 $y=2\sin x$ 的定义域却是 $(-\infty,+\infty)$，因此 $y=\dfrac{\sin 2x}{\cos x}$ 与 $y=2\sin x$ 是两个不同的函数. $y=2\sin x$ 的图形见图 1.5，$y=\dfrac{\sin 2x}{\cos x}$ 的图形见图 1.6；除点 $x=(2n+1)\dfrac{\pi}{2}(n=0,\pm 1,\cdots)$ 外，两者是一致的.

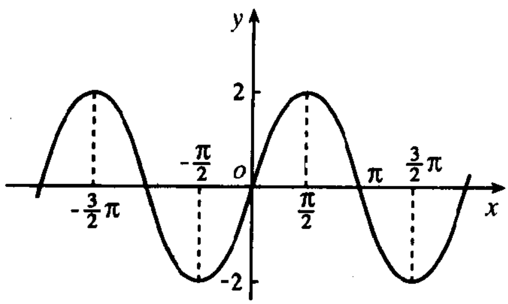


图 1.5

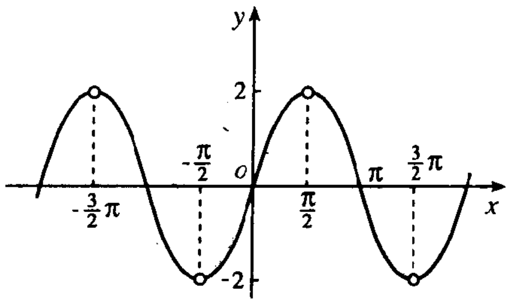


图 1.6

例 5 考察 $y=\sin^2x+\cos^2x$ 与 $y=1$ 是不是相同的函数？

$y=\sin^2x+\cos^2x$ 与 $y=1$ 的定义域均为 $(-\infty,+\infty)$，其对应规则也一样，都是“对任意的 x 值，y 均以 1 与之对应”. 因此

$y=\sin^2 x+\cos^2 x$ 与 $y=1$ 是相同的函数.

（二）函数关系的表达式与分段函数

$f(x)$中的 f 表示因变量与自变量的对应规则，这个规则的表达方式可以是分析式子，也可以是表格或是图形，甚至也可以用语句叙述. 不要将 $f(x)$理解为只是分析式子，当然我们最常使用的是用分析式子表示函数. 在一个问题里，如果有不同的函数，就要用不同的记号来表示，例如 $f(x),g(x),\varphi(x),y(x)$等.

在函数的分析式表示法中，有时会遇到对于定义域中有些点处或不同的子区间内，不能用统一的一个式子来表示函数的对应规则，需要用两个或两个以上的式子来表达，用这种方法表示的函数关系，称为分段函数. 用两个或多个式子表达函数关系时，它表达的是一个整体函数，不是多个函数.

讨论分段函数时，要注意两个问题：

（1）在不同的子区间，函数的对应规则；

（2）在分段点处，函数的取值.

例 1 设有分段函数

$$f(x)=\begin{cases}1 & x<-1\\ x & -1<x\leqslant 0\\ 2x & 0<x\leqslant 1\\ 2-x & x>1\end{cases}，作其图形.$$

解 函数 $f(x)$的定义域 $D(f)=(-\infty,-1)\cup(-1,+\infty)$，在 $x=-1$ 处无定义.

函数图形见图 1.7.

例 2 将函数 $y=|x^2-1|$用分段函数表示，并作函数图形.

解 $y=|x^2-1|$的定义域为 $(-\infty,+\infty)$. 当 $x^2-1<0$ 时，$y=-(x^2-1)=1-x^2$. 当 $x^2-1\geqslant 0$ 时，$y=x^2-1$. 即当$|x|<1$ 时，有 $y=1-x^2$.

当$|x|\geqslant 1$ 时，有 $y=x^2-1$. 于是有

$$y=\begin{cases}1-x^2 & |x|<1\\ x^2-1 & |x|\geqslant 1\end{cases}$$

函数图形见图 1.8.

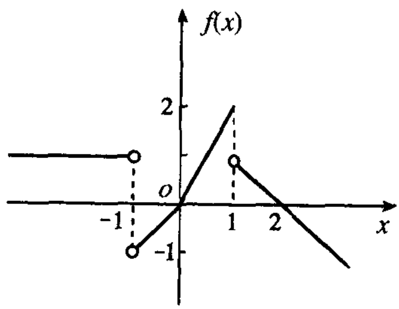


图 1.7

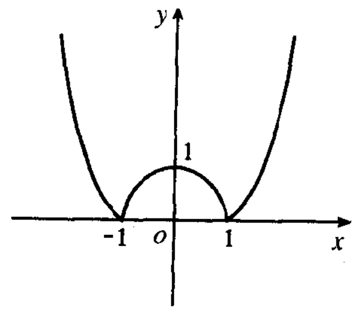


图 1.8

（三）求函数定义域

如果一个函数有其实际应用意义或几何意义，则其定义域按实际应用意义或几何意义来确定. 如果只给出了一个抽象的分析表达式，未作其他说明，即未指出其有定义的范围，那么我们约定，按给定规则，有唯一确定实数与之对应的自变量全体数值的集合，即为该函数的定义域.

考察下面几个函数的定义域.

例 1 $y=\dfrac{x}{x^2(x-1)}$

要求满足 $x\neq 0$，$x\neq 1$，所以 $D=(-\infty,0)\cup(0,1)\cup(1,+\infty)$.

例 2 $y=\sqrt{(x-1)(x+2)}$

要求满足 $(x-1)(x+2)\geqslant 0$，即

$$\begin{cases}x-1\geqslant 0\\ x+2\geqslant 0\end{cases} \quad 或 \quad \begin{cases}x-1\leqslant 0\\ x+2\leqslant 0\end{cases}$$

也就是 $x\geqslant 1$ 或 $x\leqslant -2$

所以 $D=(-\infty,-2]\cup[1,+\infty)$

例 3 $y=\lg(4-x^2)$

要求满足 $4-x^2>0$，即 $x^2<4$，$|x|<2$.

所以 $\quad D=(-2,2)$

例 4 $\quad y=\arcsin(1-x)$

要求满足 $|1-x|\leqslant 1$，即 $-1\leqslant 1-x\leqslant 1$.

那么有 $\begin{cases} x\geqslant 0 \\ x\leqslant 2 \end{cases}$

所以 $\quad D=[0,2]$

（四）记号 $f(x)$ 的进一步理解与运用

$y=f(x)$ 给出的是 y 与 x 的函数关系，规则 f 表示当给出 x 后，用什么方法得出对应的 y. 例如 $f(x)=x^2+3x+1$，这个规则 f 表示“对括号内量 x 求平方，加上括号内量 x 的 3 倍，再加上 1”，用这样的方法与步骤，可求出给定 x 所对应的 y. 如果将上述 $f(x)$ 中括号内 x 的位置处换成别的量，例如 $\varphi(x)$，即成为函数 $f[\varphi(x)]$，那么给定 x，所对应的 y，则应对括号内所换成的量 $\varphi(x)$ 施行如同 $f(x)$ 中对 x 施行的同样运算，即“对 $\varphi(x)$ 求平方，加上 $\varphi(x)$ 的 3 倍，再加上 1”来运算.

例 1 设 $f(x)=x^2+3x+1$，那么

$$f(x_0)=x_0^2+3x_0+1$$

$$\begin{aligned} f(2x+1)&=(2x+1)^2+3(2x+1)+1 \\ &=4x^2+10x+5 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} f\left(\frac{1}{\sqrt{x}}+1\right)&=\left(\frac{1}{\sqrt{x}}+1\right)^2+3\left(\frac{1}{\sqrt{x}}+1\right)+1 \quad x>0 \\ &=\frac{1}{x}+\frac{2}{\sqrt{x}}+1+\frac{3}{\sqrt{x}}+3+1 \\ &=\frac{1}{x}+\frac{5}{\sqrt{x}}+5 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} f[f(x)]&=[f(x)]^2+3f(x)+1 \\ &=(x^2+3x+1)^2+3(x^2+3x+1)+1 \\ &=x^4+6x^3+14x^2+15x+5 \end{aligned}$$

例 2 设 $f(x)=x^2, \varphi(x)=\sin x$，那么

$$f[f(x)]=(x^2)^2=x^4$$

$$\varphi[\varphi(x)]=\sin\sin x$$

$$f[\varphi(x)]=\sin^2 x$$

$$\varphi[f(x)]=\sin x^2$$

例 3 设 $f(x)=\begin{cases}2x+1 & x\leqslant 1\\ x^2-1 & x>1\end{cases}$，求 $f(x+1)$.

解 将 $f(x)$ 中所有的 x 处都换作 $(x+1)$，则有

$$f(x+1)=\begin{cases}2(x+1)+1 & x+1\leqslant 1\\ (x+1)^2-1 & x+1>1\end{cases}$$

即
$$f(x+1)=\begin{cases}2x+3 & x\leqslant 0\\ x^2+2x & x>0\end{cases}$$

例 4 如已知 $f(x+1)=\begin{cases}2x+3 & x\leqslant 0\\ x^2+2x & x>0\end{cases}$，求 $f(x)$.

解 令 $x+1=t$，那么 $x=t-1$，则有

$$f(t)=\begin{cases}2(t-1)+3 & t-1\leqslant 0\\ (t-1)^2+2(t-1) & t-1>0\end{cases}$$

即
$$f(t)=\begin{cases}2t+1 & t\leqslant 1\\ t^2-1 & t>1\end{cases}$$

将 t 换成 x，得

$$f(x)=\begin{cases}2x+1 & x\leqslant 1\\ x^2-1 & x>1\end{cases}$$

（五）反函数

关于反函数要求掌握下列几点.

(1) 给定函数 $y=f(x)$，求出 x，用 y 的关系式表示，得 $x=f^{-1}(y)$，再将 x 换成 y，y 换成 x，即得 $y=f(x)$ 的反函数 $y=f^{-1}(x)$.

(2) $f(x)$ 与 $f^{-1}(x)$ 的定义域与值域正好互换.

(3) $f(x)$ 与 $f^{-1}(x)$ 的图形对称于直线 $y=x$.

(4) 有反函数的函数必是一一对应的.

例 在 $[0, 2]$ 上，$y=x^2$ 是一一对应的函数，值域为 $[0, 4]$. 它

有反函数$y=\sqrt{x}$，定义域为$[0, 4]$，值域为$[0, 2]$. 图形如图1.9.

（六）**复合函数**

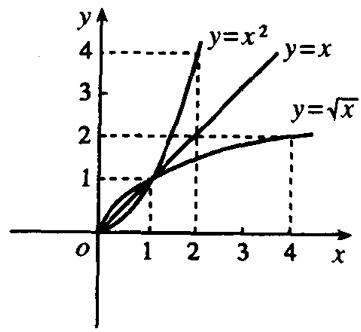


图1.9

在前面求函数定义域及函数记号中，均已用到过复合函数．这里再对复合函数定义及定义域的概念作进一步的了解.

y是u的函数$y=f(u)$，u又是x的函数$u=\varphi(x)$，如果$Z(\varphi)\cap D(f)$非空，则$y=f[\varphi(x)]$是由$y=f(u)$与$u=\varphi(x)$复合而成的复合函数.

需要注意，任意$y=f(u)$，$u=\varphi(x)$，并不一定能构成复合函数$y=f[\varphi(x)]$．构成复合函数$y=f[\varphi(x)]$要求$Z(\varphi)\cap D(f)$非空，即$u=\varphi(x)$的值域$Z(\varphi)$要全部或部分落在$y=f(u)$的定义域$D(f)$中.

$y=f[\varphi(x)]$的定义域是$D(\varphi)$中使$\varphi(x)$的值落在$D(f)$中的那些x组成.

例1 设$y=f(u)=\ln u$，$u=\varphi(x)=-1-x^2$，那么

$$D(f)=(0, +\infty), Z(\varphi)=(-\infty, -1]$$

$$Z(\varphi)\cap D(f)=\varnothing$$

这说明$Z(\varphi)$与$D(f)$不相交，即$u=\varphi(x)$的函数值全部落在$y=f(u)$的定义域之外，因此$y=f[\varphi(x)]=\ln(-1-x^2)$不能构成复合函数.

例2 考察$y=f(u)=\ln u$，$u=\varphi(x)=1-x^2$能否构成复合函数？如果不能，说明理由，如果能，求其定义域.

解 由$y=f(u)=\ln u$，得$D(f)=(0, +\infty)$

由$u=\varphi(x)=1-x^2$，得$D(\varphi)=(-\infty, +\infty)$

$$Z(\varphi)=(-\infty, 1]$$

即 $\qquad Z(\varphi)\cap D(f)=(0,1]\neq\varnothing$，非空.

所以 $y=f[\varphi(x)]=\ln(1-x^2)$ 是一个 x 的复合函数.

求其定义域：

$y=\ln u$，要求 $u>0$，即 $1-x^2>0$，$x^2<1$，$|x|<1$. 于是得出 $y=\ln(1-x^2)$的定义域为 $(-1,1)$.

从解这个例题的过程可以看出，区间 $(-1,1)$ 恰是使得 $u=\varphi(x)=1-x^2$ 的部分函数值落在 $y=\ln u$ 的定义域中那些自变量 x 的集合. 即 $(-1,1)$ 内的 x 所对应的 u 落在了 $y=\ln u$ 的定义域中，即 $(-1,1)$ 内的 x 才有唯一确定的 y 与之对应. 所以区间 $(-1,1)$ 即是复合函数 $y=\ln(1-x^2)$的定义域.

二、例题选讲

（一）集合

例 1（选择题） 设集合 $A=\{1,2,p,q\}$，$B=\{3,6,r,s\}$，当（ ）时，有 $A\cup B=\{1,2,3,4,5,6\}$，$A\cap B=\{1,3\}$，$A-B=\{2,4\}$.

(a) $p=3$，$q=4$，$r=1$，$s=5$

(b) $p=3$，$q=4$，$r=2$，$s=1$

(c) $p=5$，$q=6$，$r=1$，$s=4$

(d) $p=3$，$q=5$，$r=4$，$s=1$

解 (a) 若 $p=3$，$q=4$，$r=1$，$s=5$，则

$$A=\{1,2,3,4\},\ B=\{3,6,1,5\}$$

那么 $\qquad A\cup B=\{1,2,3,4,5,6\}$

$$A\cap B=\{1,3\},\ A-B=\{2,4\}$$

(b) 若 $p=3$，$q=4$，$r=2$，$s=1$，则

$$A=\{1,2,3,4\},\ B=\{3,6,2,1\}$$

那么 $\qquad A\cup B=\{1,2,3,4,6\}\neq\{1,2,3,4,5,6\}$