运筹学手册

〔苏〕 Ф.А.马特韦楚克 主编
程云门 译
吴洪鳌 李执中 校

新时代出版社

内容简介

本手册的内容包括：序贯分析，统计试验法，规划论，统筹法，目标搜索和机动的数学模型，计算射击效率指标，依据马尔柯夫随机过程模型的模拟方法等。每一种方法都用实例加以说明。例子大部分是军事方面的，但对于解决其它领域中的运筹学问题也有帮助。

本手册可供军事指挥员、参谋和科研人员以及从事武器装备研制的技术人员使用，亦可供与运筹学有关的人员参考。

СПРАВОЧНИК ПО
ИССЛЕДОВАНИЮ ОПЕРАЦИЙ
В. А. Абчук Ф. А. Матвейчук
Л. П. Томашевский
Воениздат. 1979

*

运筹学手册
〔苏〕 Ф. А. 马特韦楚克 主编
程云门 译
吴洪鳌 李执中 校

新时代出版社出版 新华书店北京发行所发行
廊坊日报印刷厂印刷
850×1168毫米 32开本 10.25印张 258千字
1982年12月第1版 1985年7月北京第2次印刷
印数：8,301—19,600册

统一书号：15241·12 定价：1.90元

译　序

近年来，运筹学方法已在许多军事技术和学术领域里开展起来，这说明运筹学是一门应用广泛和有发展前途的学科，是研究军事问题的有力工具之一。

本书是一部手册性的军事运筹学方面的著作，叙述了运筹学的各种常用方法及有关知识，对于研究运筹学在军事和其它领域的应用有一定参考价值。本书第一章介绍了计算工作的准备和实施，第二章讲序贯分析、统计试验法和建立数学模型的方法，第三章介绍最优化方法（线性规划、非线性规划、动态规划、对策论、网络法），第四、五章谈目标搜索和舰艇机动的理论，第六章讨论射击效率的计算，第七章是马尔柯夫过程概型的模拟（平均数动力学方法、兰切斯特方程、公用服务系统、可靠性等），并附有计算用的图表。

本书具有以下一些特点：比较简明扼要，只讲具体方法而不着重理论的推导及概念的严密性；实用性较强，每种方法都以实际例子介绍它在国防科学中如何应用；部分内容，如序贯分析、建立数学模型的方法、目标搜索及机动理论等，在我国已出版的军事运筹学方面的译著中尚少见；有些内容归纳得较好，例如把平均数动力学方法、战斗动力学方程、公用服务系统、技术可靠性都归入马尔柯夫过程概型的模型加以叙述等。

本书的缺点是，有些方法叙述得过于简单；有些例子比较勉强；文字叙述、例题、数字、公式等有不少错误；各章出于不同学者之手，风格不尽统一等。在译校过程中，我们对已发现的错误作了相应更正，对少数重要的更正加了译注，对技术编排稍作变动，并对个别篇章的名称作了更改。由于我们水平有限，难免还会有错误和缺点，恳请读者批评指正。

原　　序

在任何有组织的活动中，无论是经济、科学或军事领域，要作出有充分价值的决策，单凭定性分析、经验感受或直观判断，已变得越来越困难了。掌握运筹学方法，对于运用现代技术手段，组织具有明确目的性的集体活动的广大人员已成为必需，特别在充满冲突的形势下，组织活动更为必要。

经验表明，在运筹学方面，如同其它科学领域一样，除了教科书和理论著作外，还需要有手册性的参考书籍。

基于这一理由，作者为本手册规定了以下目的：叙述广为使用的运筹学方法的基本知识，并举例说明这些方法实际应用的可能性。例子里给出的基础数据都是假设的，用来说明手册中所叙述的方法，其目的仅是帮助读者如何在实际中掌握计算公式和运用这些公式解决其它类似任务。手册的大多数例子属于军事性质，这是因为运筹学是在解决军事问题的过程中产生和最早得到发展的，并且也是编写本手册的目的所在。但是读者不难在其它领域里找到具有共同特征和使用相似方法的例子。手册中收录有计算所需的各种图表。

编写本手册时参考了近年出版的运筹学书籍，书目见书末的参考文献。手册采用的术语和代号是苏联著作中最常用的术语和代号。

本手册是在马特韦楚克教授领导下集体完成的，他负责本书的校订，并写了第一、六、七章和附录。阿勃丘克教授编写第三、四、五章，高级研究员托马舍夫斯基编写第二章。

手册供具有运筹学基本知识和把运筹学知识应用于自身实际活动的人员使用。

目　录

第一章　计算工作的准备和实施 …… 1
§1.1　选择效率指标 …… 1
§1.2　准备计算用基础数据 …… 4
1.2.1　决定随机变量的矩（数学期望和方差） …… 5
1.2.2　决定统计估计值的精度和可靠性 …… 8
1.2.3　理论和统计分布律的适度准则 …… 12
§1.3　估计计算的误差 …… 15
1.3.1　误差的主要根源 …… 15
1.3.2　计算工作的一般规则 …… 16
1.3.3　近似数的写法 …… 17
1.3.4　函数的极限误差 …… 18
1.3.5　误差原理的逆问题 …… 20
第二章　序贯分析和统计试验法 …… 22
§2.1　序贯分析方法 …… 22
2.1.1　概述 …… 22
2.1.2　按次品率检验批产品 …… 23
2.1.3　比较两种系统的效率 …… 30
2.1.4　根据选定参数的平均值评定系统的质量 …… 36
2.1.5　根据选定参数的方差评定武器系统的质量 …… 42
§2.2　统计试验法 …… 46
2.2.1　概述 …… 46
2.2.2　获得均匀分布的随机数 …… 47
2.2.3　模拟随机事件 …… 48
2.2.4　模拟给定分布律的随机变量 …… 52
2.2.5　决定被模拟过程的数字特征 …… 60
2.2.6　为保证给定精度所需的统计模拟的实现次数 …… 65

2.2.7 关于经验分布律的假设统计检验 ……66
2.2.8 在电子数字计算机上应用统计试验法的程式 ……69
2.2.9 建立数学模型的方法 ……72

第三章 作战行动的最优化方法……78

§3.1 线性规划 ……78
3.1.1 概述 ……78
3.1.2 向运载工具分配武器的问题 ……79
3.1.3 分配同类兵力或兵器的问题 ……84
3.1.4 运输问题 ……88
3.1.5 展开兵力问题 ……92
3.1.6 使毁伤目标数达到最大值的火器的分配问题 ……93
3.1.7 根据火器保证射击的可能性，选择战斗行动时间指标的问题 ……100

§3.2 非线性规划……107
3.2.1 概述……107
3.2.2 向作战地域分配不同类兵力的问题……108
3.2.3 向目标分配不同类兵器的问题……113
3.2.4 向进行对抗的目标实施突击时不同类兵力或兵器的分配问题……117

§3.3 动态规划……121
3.3.1 概述……121
3.3.2 运输工具的最优装载问题……122
3.3.3 使目标遭受最大物质损害的分配火器问题……125
3.3.4 多阶段作战中在分队之间分配战斗兵器的问题 …… 129
3.3.5 向目标分配不同类战斗兵器的问题……132

§3.4 对策论……135
3.4.1 概述……135
3.4.2 选择武器种类的问题……139
3.4.3 选择战术方法的问题……140
3.4.4 假情报（伪装）问题……142
3.4.5 选择与敌方武器对抗的武器种类的问题……144

§3.5 网络法 …… 146
3.5.1 概述 …… 146
3.5.2 网络图的制作 …… 147
3.5.3 网络图的分析 …… 149
第四章 搜索目标 …… 155
§4.1 搜索的种类 …… 155
§4.2 检查搜索（在预定地域内搜索） …… 156
4.2.1 计算搜索的能力指标 …… 156
4.2.2 计算在给定区域内存在目标的概率 …… 157
4.2.3 计算在相对于观察员不同方向上出现目标的概率 …… 158
4.2.4 计算在相对于观察员不同距离和不同方向上出现目标的概率 …… 159
4.2.5 计算被发现目标沿某一航向运动的概率 …… 163
4.2.6 计算在给定时限发现目标的概率 …… 165
4.2.7 计算在给定时限发现目标数的数学期望 …… 168
4.2.8 计算发现目标时间的数学期望(发现的平均等待时间) …… 169
4.2.9 保证获得预定搜索效率时的计算 …… 169
4.2.10 给各观察员分配搜索地域的地段 …… 170
4.2.11 间断搜索的计算 …… 171
§4.3 应召搜索（恢复接触） …… 172
4.3.1 直线航线的平行航向搜索 …… 172
4.3.2 应急变换队形的搜索 …… 176
4.3.3 螺旋搜索 …… 179
§4.4 地线搜索 …… 180
4.4.1 往返航程的搜索（线上巡逻） …… 180
4.4.2 交叉航程的搜索（8字形搜索） …… 182
第五章 机动理论 …… 185
§5.1 改变距离的机动 …… 185
5.1.1 靠近目标(一般情况) …… 185
5.1.2 面对面运动时的靠近 …… 188
5.1.3 跟随运动时的靠近 …… 189

5.1.4 判断靠近的可能性……190
5.1.5 方位不变条件下改变距离……191
5.1.6 在最短时间内接近至预定距离……193
5.1.7 在最短时间内增大到预定距离……196
5.1.8 与高速目标接近至最短距离……198
5.1.9 判断接近至预定（最短）距离的可能性……200
§5.2 改变和保持阵位的机动……201
5.2.1 在最短时间内改变阵位（一般情况）……201
5.2.2 机动者进至预定阵位……205
5.2.3 目标方位（航向角）不变条件下改变阵位……206
5.2.4 机动者至目标的距离不变条件下改变阵位……207
5.2.5 对目标保持相对阵位……208
5.2.6 在给定时间内改变阵位……209
5.2.7 在目标前方最大可能距离上与目标航向交叉……211
5.2.8 在目标后方最小可能距离上与目标航向交叉……213
5.2.9 判断改变阵位的可能性……214
§5.3 规避对方的机动……215
5.3.1 为了避免与低速目标在给定距离内接近的规避……215
5.3.2 为了避免与高速目标在给定距离内接近的规避……217
5.3.3 为了与高速目标在最大可能距离上散开的规避……219
第六章 射击效率的评定……221
§6.1 计算命中概率……221
6.1.1 命中给定区间的概率……221
6.1.2 命中平面区域的概率……223
6.1.3 命中各边平行于散布主轴的矩形内的概率……226
6.1.4 命中小幅员两维区域的概率（近似方法）……229
6.1.5 命中各边平行于散布主轴的长方体的概率……231
6.1.6 命中母线平行于散布主轴之一的柱体的概率……232
6.1.7 命中小幅员三维区域的概率（近似方法）……232
§6.2 杀伤兵器对单个目标的效率评定……233
6.2.1 毁伤目标规律……234

6.2.2 毁伤目标的概率 ……235

§6.3 杀伤兵器对集群目标的效率评定 ……238

6.3.1 被毁伤单位目标数的数学期望 ……239

6.3.2 毁伤给定单位目标数的概率 ……241

6.3.3 毁伤不少于给定单位目标的概率 ……242

§6.4 杀伤兵器对面积目标的效率评定 ……243

6.4.1 发射一发时毁伤目标面积的数学期望 ……243

6.4.2 发射数发时毁伤目标面积的数学期望 ……245

§6.5 对抗的考虑 ……246

6.5.1 一般情况 ……246

6.5.2 与杀伤兵器的对抗 ……248

6.5.3 与武器运载工具的对抗 ……249

6.5.4 杀伤兵器和运载工具的技术可靠性的考虑 ……250

6.5.5 在突击中大量使用战斗单位时对对抗的考虑 ……251

6.5.6 双方顺次突击的概型 ……253

6.5.7 连续火力作用下两个战斗单位交战的概型 ……255

第七章 马尔柯夫随机过程概型的模拟 ……258

§7.1 马尔柯夫随机过程 ……258

7.1.1 概述 ……258

7.1.2 状态离散和时间离散的马尔柯夫过程模型（马尔柯夫链） ……258

7.1.3 状态离散和时间连续的随机过程模型（连续马尔柯夫链） ……264

7.1.4 具有波阿松事件流的连续马尔柯夫链 ……266

7.1.5 状态的极限概率 ……269

7.1.6 “生灭”过程 ……271

7.1.7 循环过程 ……273

§7.2 平均数动力学方法 ……275

7.2.1 概述 ……275

7.2.2 建立状态平均数的微分方程（平均数动力学方程）的一般规则 ……276

7.2.3 拟正规性原则 ……279
7.2.4 考虑状态数的补充 ……280
§7.3 战斗动力学方程 ……281
7.3.1 高度有组织的战斗模型 ……281
7.3.2 不转移火力的战斗模型 ……283
7.3.3 计入弹头飞行时间和转移火力迟延时间的战斗模型 ……283
§7.4 公用服务系统的模拟 ……285
7.4.1 概述 ……285
7.4.2 建立系统状态的微分方程 ……285
7.4.3 评定系统的效率 ……289
§7.5 技术系统的可靠性 ……293
7.5.1 概述 ……293
7.5.2 无储备系统的可靠性 ……295
7.5.3 有储备（“热”储备）系统的可靠性 ……296
7.5.4 “冷”和“暖”储备系统的可靠性 ……298
7.5.5 能恢复的系统的可靠性 ……301
附录 ……304
表 1 依赖于置信概率 α 和自由度 k 的相应于置信区间 $-t_\alpha < t < t_\alpha$ 的 t_α 值，其中 t 是学生氏分布 ……304
表 2 以均方差为单位的相对误差不超过给定值 q 的概率 ……306
表 3 依赖于置信概率 α 和自由度 k 的均方差 σ 的置信区间的下限 γ_1 和上限 γ_2 ……308
表 4 χ^2分布律 ……309
表 5 拉普拉斯函数（概率积分） ……310
表 6 简化的拉普拉斯函数 ……312
表 7 服从柯尔莫哥洛夫分布的概率 ……315
参考文献 ……316

第一章 计算工作的准备和实施

§1.1 选择效率指标

运筹学是一种数学方法，它能确定在工业、经济、军事范围进行的过程的合理程度，判定过程的预期效果，以及获取论证管理（指挥）这些过程的决策时所需的有关建议。

应用运筹学方法把这种或那种现象归结成数学模型时，要求准确地了解这些现象在整个管理（指挥）过程中（其中包含制定决策）的地位和作用。制定决策的一般程序为：了解任务（行动的目的），判断情况，拟定完成任务的方案，选定数学模型并进行计算，对数学模型中未考虑的因素进行定性分析，综合研究定性和定量分析的结果，最后作出决策（图 1.1.1）。

在了解任务和明确行动目的的基础上，需要确定评定的数量标准或效率指标(目标函数)。

选择效率指标的基本原则是，指标要与完成任务的结果所应达到的目的严格一致。效率指标应是评定达到行动目的和完成任务的程度的标准。

许多行动，尤其是军事性质的行动，往往伴随有许多随机因素。所有计划过的行动，其结局都是随机的，不可能事先精确地预测，甚至按一定方法严格组织的行动也是如此。因此，应取随机变量的数字表征作为效率指标。特别是，为了评定军事行动的预期效果，可以采用以下两种类型的效率指标：

第一种——事件概率。如果要达到一定的效果，也就是使敌方（或防止我方）遭受一定的损失（击沉敌舰艇，保持我方被保卫目标的战斗力，歼灭不少于给定数量的目标等)才能完成任务，

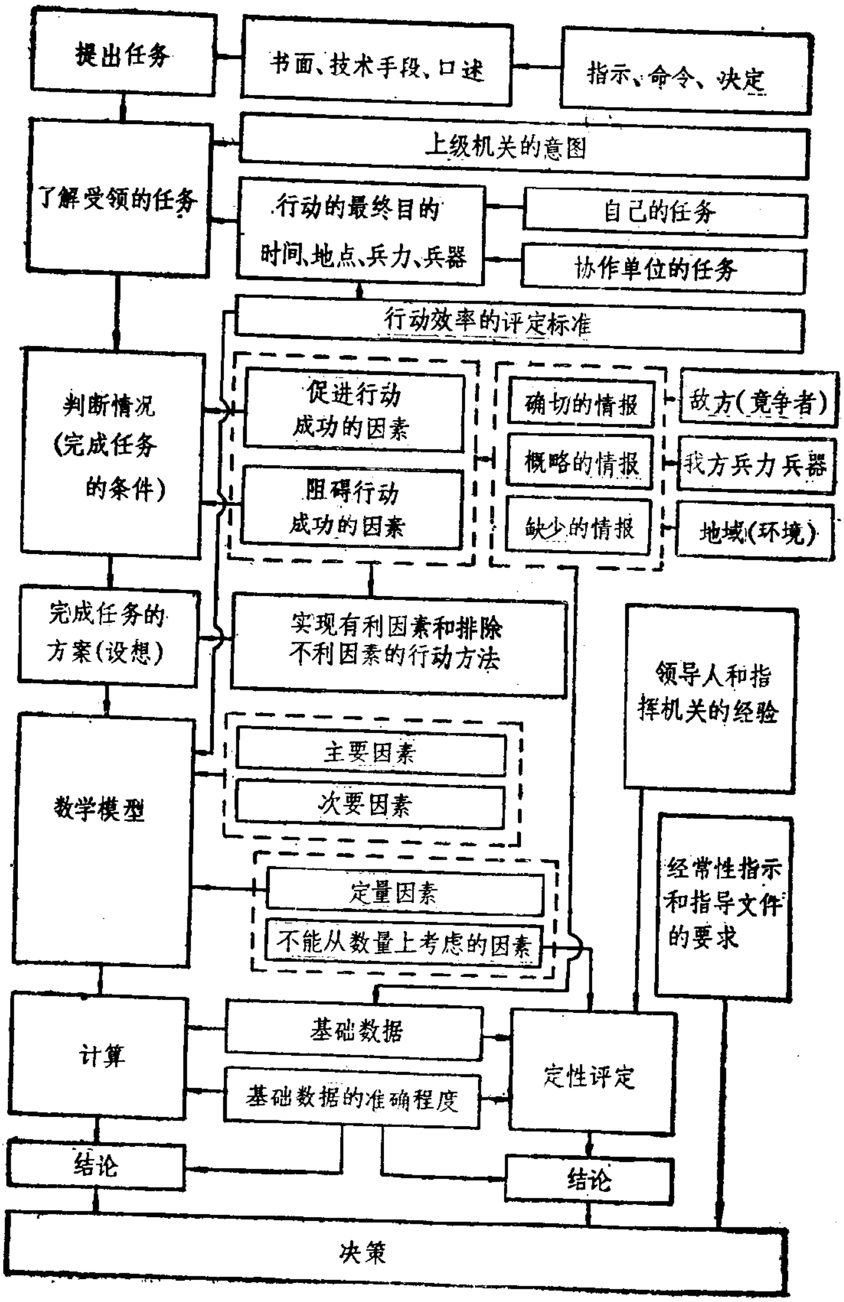
提出任务
书面、技术手段、口述
指示、命令、决定
了解受领的任务
上级机关的意图
行动的最终目的
时间、地点、兵力、兵器
自己的任务
协作单位的任务
行动效率的评定标准
判断情况
(完成任务
的条件)
促进行动
成功的因素
阻碍行动
成功的因素
确切的情报
概略的情报
缺少的情报
敌方(竞争者)
我方兵力兵器
地域(环境)
完成任务的
方案(设想)
实现有利因素和排除
不利因素的行动方法
领导人和指
挥机关的经验
数学模型
主要因素
次要因素
经常性指示
和指导文件
的要求
定量因素
不能从数量上考虑的因素
计算
基础数据
基础数据的准确程度
定性评定
结论
结论
决策

图 1.1.1

则取事件概率作为效率指标。例如，鱼雷快艇群受领歼灭（击沉）为驱逐舰护航的巡洋舰的任务，效率指标应是毁伤● 巡洋舰的概率。

第二种——数学期望（平均值）。如果任务是造成（或防止）尽可能多的损失，则取数学期望（平均值）作为效率指标。例如，鱼雷快艇群受领尽量多地歼灭敌方护航运输舰队中运输舰的任务，效率指标应是被歼灭的运输舰数的数学期望。

评定单一行动（发现目标，指示目标，判别目标性质等）的效率，取一种单一指标就够了。为了评定内容众多、物理本质复杂的现象，则需要几个效率指标。其中有一个是基本的，其余是辅助的。基本指标应符合行动的主要目的，达到这个目的就能完成受领的任务。辅助指标用来描述兵力、兵器的状态，空间、时间和其它条件或限制情况。例如，护航驱逐舰受领在炮战中歼灭一敌舰的任务。这时，基本指标是毁伤该舰的概率，辅助指标可以是保持自身战斗力的概率，完成任务时间和弹药消耗量的数学期望等。

如果复杂的行动能分成几个阶段，每个阶段可以作为解决局部的任务进行独立评定，那么在这种情况下可同时采用主要的和局部的标准。局部标准用来评定完成局部任务的效率，主要标准用以评定行动的最终结果。在计算主要标准时，照例需要预先计算局部标准。定量分析时，局部标准可用来说明单个因素对行动成功的影响。如果没有正确选定的效率指标，就不可能获得正确的决策用的建议。

正确选择（建立）用于计算的数学模型，取决于：对任务和行动目的的真正了解，正确选定效率指标，深刻理解模型化现象的性质，弄清环境因素的相互联系，分清主要和次要因素等。

数学模拟是客观现象的抽象化，不免带有某些事先约定的限

● 毁伤是歼灭、击沉等的总称。——译者

制和假定。数学模型与实际条件的符合程度取决于被模拟过程的复杂性，计算工具的完善性，所要考虑因素的多少及其重要性等。描述比较简单过程的模型，诸如实施机动、区分突击目标、决定毁伤目标所需的弹药数量和弹种等模型，可以做到与实际条件最大程度的接近。模拟整个战斗任务是比较复杂的。这里有一系列重要因素难以用数学关系来描述。这首先是指精神心理因素和属于人们创造性活动结果的那些行动。

对数学模型的要求与全面考虑各种因素是有矛盾的。一方面，模型应当足够全面地考虑对行动效率有实质影响的所有最重要因素。另一方面，为了使数学模型能够实现，又要求模型尽量简单，不要“混杂”许多微不足道的和次要的因素，这些因素只会使数学分析复杂化并使分析结果难以在所研究问题的实质方面得到结论和提出建议。

除了区分主要和次要因素外，还需要确定哪些因素由于数学工具不完善或缺少数值表征而无法在模型中考虑。

运用运筹研究结果的指挥机关（指挥员，领导人）需要了解：采用了怎样的数学模型，哪些因素已加以考虑，哪些因素（主要的和次要的）在计算中未加考虑，因而还必需作哪些定性分析。没有这种定性分析，仅根据计算中所考虑的因素而作的建议是片面的（不完全的），制定的决策也是没有充分根据的。

在计算之前要准备好基础数据。无论是事先积累的统计数据和参考数据，以及从对情况估价而得到的数据都可利用，但应知道这些基础数据本身的精度和计算结果的精度。为此，在根据计算作出的结论中应指明所得到的数值表征的可能范围，这是判断这种或那种行动方法的风险程度的基础。

§1.2　准备计算用基础数据

观测结果的统计处理，是以车贝谢夫和贝努里定理为基础的。按照车贝谢夫定理，当无限增加观测次数时，试验的观测结

果的算术平均值将依概率收敛于它的数学期望。按照贝努里定理，当无限增加观测次数时，事件的频率将收敛于事件的概率。

实际中，观测次数总是有限的，有时可能很少。因此，依据这些观测结果，只能概略判断未知的概率特征值。

统计估计应是一致的、无偏的和有效的。

如果统计估计值依概率收敛于未知值，那么这种估计是一致估计；如果对于任何容量的子样，它的统计估计值的数学期望与未知参数相等，则是无偏估计；如果从几个一致、无偏估计值中选取方差最小的估计值，则它是有效估计。

1.2.1 决定随机变量的矩（数学期望和方差）

数学期望的一致和无偏估计是算术平均值

$$\tilde{x}=\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}x_i=C+\sum_{i=1}^{n}(x_i-C), \tag{1.2.1}$$

式中 x_i——第 i 次试验的观测值；

n——试验次数（子样的容量）；

C——为了便于计算而引入的任意数（虚假零点）。

如果随机变量服从正态分布律，那么算术平均值也是数学期望的有效估计值。

对方差作统计估计时，要区分随机变量的数学期望未知或已知两种情况。

当随机变量的数学期望未知时，方差的一致和无偏估计是

$$\tilde{D}_x=\frac{1}{n-1}\sum_{i=1}^{n}(x_i-\tilde{x})^2$$

$$=\frac{1}{n-1}\sum_{i=1}^{n}(x_i-C)^2-\frac{n}{n-1}(\tilde{x}-C)^2。 \tag{1.2.2}$$

随机变量的数学期望已知时，方差的无偏估计值是

$$\widetilde{D}_x=\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}(x_i-\bar{x})^2, \qquad (1.2.3)$$

式中 $\bar{x}$——随机变量的数学期望。

若子样的容量很大，最好把观测结果按大小的顺序排列，再把统计表的元素归并成若干组（等级），列成 如 表 1.2.1 那样紧凑表格的形式。

表 1.2.1

组的编号	1	2	…	k
组的界限 $x_{i-1}-x_i$	$x_0\sim x_1$	$x_1\sim x_2$	…	$x_{k+1}\sim x_k$
组的平均值 x_i^*	x_1^*	x_2^*	…	x_k^*
频数 m_i	m_1	m_2	…	m_k
频率 $p_i^*=\frac{m_i}{n}$	p_1^*	p_2^*	…	p_k^*

这时，数学期望和方差的估计值可近似地按下式决定：

$$\tilde{x}=\sum_{i=1}^{k}x_i^*p_i^*; \qquad (1.2.4)$$

$$\widetilde{D}_x=\sum_{i=1}^{k}(x_i^*-\tilde{x})^2p_i^*。 \qquad (1.2.5)$$

若计入谢巴尔达修正量，可按下面较精确的公式决定方差：

$$\widetilde{D}_x=\sum_{i=1}^{k}(x_i^*-\tilde{x})^2p_i^*-\frac{h^2}{12}, \qquad (1.2.6)$$

式中 h——组距。

如果已知随机变量的分布是正态的，当试验次数不大时，均方差的无偏估计值为：

——数学期望未知时，

$$\tilde{\sigma}_x = k_n \sqrt{\frac{1}{n-1}\sum_{i=1}^{n}(x_i-\tilde{x})^2}$$

$$\approx \sqrt{\frac{1}{n-1.45}\sum_{i=1}^{n}(x_i-\tilde{x})^2}, \qquad (1.2.7)$$

——数学期望已知时，

$$\tilde{\sigma}_x = k_{n+1}\sqrt{\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}(x_i-\bar{x})^2}, \qquad (1.2.8)$$

式中

$$k_n = \sqrt{\frac{n-1}{2}}\,\frac{\Gamma\left(\frac{n-1}{2}\right)}{\Gamma\left(\frac{n}{2}\right)};$$

$\Gamma(z)$ 是伽玛函数。

系数 k_n 的值载于表 1.2.2。

表 1.2.2

n	k_n	n	k_n	n	k_n
3	1.1284	10	1.0280	30	1.0087
4	1.0853	12	1.0230	35	1.0072
5	1.0640	15	1.0181	40	1.0064
6	1.0506	20	1.0134	45	1.0056
7	1.0423	25	1.0104	50	1.0051

设 x_1, y_1, …, x_n, y_n 是相同条件下进行 n 次独立试验得到的随机变量 X 和 Y 的观测值，则 X 和 Y 的数学期望、方差和相关矩的一致和无偏估计值为：

$$\tilde{x} = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} x_i,\quad \tilde{y} = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} y_i; \qquad (1.2.9)$$