研究生高等数学入学考试指南

（修订本）

龚怀云　胡清徽
杨泽高　张可村

西安交通大学出版社

研究生高等数学入学

考试指南

（修订本）

龚怀云　胡清徽
杨泽高　张可村

西安交通大学出版社

内 容 简 介

本书是一本简明扼要、一书在手即能对高等数学课程进行系统复习的指导性书籍。内容分为五个部分：一元函数微分学；一元函数积分学；多元函数微分学；多元函数积分学及常微分方程与级数.

本书精华是大量经过精选和归类的典型例题，类型多样，各具特色，每一章均附有适当数量的习题，以利于读者练习与检查.

本书经过修订，除保持初版的优点和特色外，内容与目前全国工科类大学高等数学大纲更一致，所选例题和习题与近年来考题更接近，题型也更吻合。此外，为了让读者具体了解近年来研究生试题的要求、动向，本书在附录中收入了1991年及1992年全国攻读硕士学位研究生入学考试数学试题，并作了详细题解.

本书可供研究生报考者，大专院校学生以及有志于自学高等数学者阅读，也可供大专院校教师参考。

(陕)新登字007号

研究生高等数学入学考试指南

(修订本)

龚怀云　胡清徽

杨泽高　张可村

责任编辑　蒋　潞

*

西安交通大学出版社出版

邮政编码：710049

西安交通大学出版社印刷厂印装

陕西省新华书店经销

开本 787×1092　1/16　印张 16.75　字数：404千字

1992年6月第1版　1992年6月第1次印刷

印数：1——15000

ISBN7-5605-0483-3/O·83　定价：7.90元

初版序

随着国家日益繁荣昌盛，科技教育事业蒸蒸日上，近几年来，报考硕士研究生的人数成倍地增加. 研究生入学考试数学试题选编或题解虽屡见不鲜，但是，关于指导报考研究生复习的书籍尚付阙如. 我们一直希望能有一本简明扼要、一书在手即能进行系统复习的指导性的书籍尽快问世.

我校龚怀云、胡清徽、杨泽高、张可村等四位同志，多年讲授高等数学，教学经验丰富，教学效果良好，特别是近几年来，他们多次为报考研究生的学生进行复习辅导，收效显著，他们在辅导过程中，积累了丰富的资料，又熟悉考生存在的问题. 了解历届考题的动向，因此由他们编写这本书是适宜的，及时的. 我深信这是一项十分有意义的工作.

《研究生高等数学入学考试指南》不是一本教材，也不是一本单纯的题解. 它对高等数学的有关内容作了系统、全面的复习，其中包括基本概念、基本理论与基本运算，有利于减轻考生的负担，使他们能在较短的复习时间中掌握重点. 它的主要特色是，精选了较多数量的典型例题和部分具有较大难度和技巧性的例题，进行了详尽的分析和解算，这些例题充分反映了最近几年研究生考题的水平，颇具参考价值. 通过《指南》的学习，不仅希望读者能在解题的思路和技巧上开阔视野，有所启迪，而且能通过具体分析和运用，从根本上加深对基本概念和理论的理解，以提高分析问题和解决问题的能力. 因此，"指南"不仅有别于一般的题解，而且对高等数学教科书也是极为难得的补充.

正因为具有这些特点，我认为这本书不仅对硕士研究生的报考者是一本较好的复习指导书，而且对理工科大专院校的高年级学生和有志于自学高等数学者也很有裨益，此外，也可供大专院校从事高等数学教学的教师阅读参考.

陆庆乐

1985 年于西安交大

编者的话(初版)

为了减轻研究生报考者的学习负担,使读者能在较短时间内高效率地对高等数学进行全面复习,我们编写了这本《研究生高等数学入学考试指南》.

本书对高等数学的重要概念、基本理论与基本公式进行系统、扼要的复习,重点突出.

本书的精华是经过精选的归类的典型例题,这些例题来源于编者多年教学实践的积累和历届研究生高等数学考试中较好的试题,类型多样,各具特色.对这些例题,或在解题前分析,引导,或在解题后点出关键所在,部分题目一题多解,以开阔思路.本书在每一章均附有适当数量的习题,全部习题附有答案或提示,以利于读者练习与检查.我们认为题目不在多,而在于“精”.在于“透”,通过学习能融会贯通,举一反三,从根本上提高应考能力.

为便于读者自学,我们将例题与习题分成三类,没有特殊标记的是基本的或具有一般难度的题目;打*者是难度较大的题目;打**者是难度大并需用较高技巧的题目.

我们希望这本书,不仅对研究生的报考者,也对大专院校的学生与教师有所帮助.

本书共分五个部分,编写者为龚怀云(一元函数微分学与多元函数积分学),胡清徽(微分方程与级数),杨泽高(多元函数微分学),张可村(一元函数积分学),并由龚怀云主编.

教育部高等数学教材编审委员会主任陆庆乐教授为本书主审并作序,西安交大出版社对本书的出版大力支持,我们在此一并表示衷心的感谢.

由于时间仓促和限于编者的水平,错误和不当之处在所难免,恳请读者批评指正.

编　者 1985 年

再版前言

《研究生高等数学入学考试指南》自 1985 年问世以来，受到广大读者的欢迎和好评. 初版一再重印，累计 6 万册，均早已售罄. 近几年来，我们不断收到读者(有年青学生也有我们的同行)来信索购此书. 同时，不少专家、同行也给予此书较高评价. 特别令我们感动的是一位素昧平生的哈工大教师，不仅在来信中热情赞扬此书，对此书的优点给予充分肯定，还花费大量精力为此书作了详尽的勘误. 读者的关切与期望，使我们受到莫大的鞭策和鼓励.

近年来，报考研究生的热潮又悄然掀起，为了满足读者的需要，《指南》将修订再版，修订的原则是：

1)力求使《指南》体现目前全国工科类大学通用的高等数学大纲的要求，即按照大纲的重点与各部分内容的学时比例来安排《指南》相应的篇幅. 删去初版中超大纲或要求过高的内容和题目.

2)在深广度方面既注意有适当的拓宽，又力求使《指南》的例题、习题与当今的试题更为接近，题型更为吻合. 譬如初版中有些较难的题目本身是颇有意义的，但考虑到近年来这类试题已很少见，为了节省报考者的时间和精力，这次修订时作了一些删减，而近年来研究生试题中常出现的是非题、填空题，则在再版中都有所体现. 特别是有些例题和习题就选自近年来的考题.

3)保持初版《指南》的优点和特色. 如全面简洁的内容复习，从解题思路到技巧都细致加以分析和引导的典型例题等等.

遵循上述三个原则，经过对近年来研究生试题的仔细考证，反复精选内容，突出重点，再版《指南》的篇幅较初版压缩了三分之一.

此外，为了让读者具体了解近年来研究生试题的要求、动向和题型，本书在附录中收入了 1991 年及 1992 年全国攻读硕士学位研究生入学考试数学试题，并作了详细题解，以供学习参考.

《指南》是为报考研究生的读者提高应考能力而编写的，我们期望它真正起到《指南》的作用，同时对其他读者也是一本较好的参考书.

再版《指南》即将发行，我们希望它比初版更受读者欢迎，也希望它像初版一样受到同行专家和读者的爱护和指正.

编　者　1992 年 2 月

目　录

第四部分 多元函数积分学

第五部分 微分方程与级数

第一部分　一元函数微分学

第一章　极限、连续函数

高等数学主要是指微积分学，这是用极限概念深入地研究变量与变量之间函数关系的一门学科．不仅微积分学的主要概念，如连续、导数、定积分等的定义与运算都以极限为基础，而且，极限概念还推进了各种理论的发展，促使更多的问题得到解决．连续是函数的一种重要性质，是我们在许多自然现象的观察中所抽象出来的一种概念，连续函数的一些重要性质在微积分学的理论中起着关键作用．

值得指出的是，在近代数学的许多分支中，某些重要概念与理论，也正是极限与连续概念的推广、延拓和深化．

§1-1　极限与连续的概念

定义 1　（数列极限的 ε-N 定义）

如果一个数列 $a_n(n=1,2,\cdots)$ 与一个确定的常数 A 之间有如下的关系：任意给定一个正数 ε，它无论怎样小，相应地必有一个正整数 $N(\varepsilon)$，使得在 $n>N(\varepsilon)$ 时，不等式

$$|a_n - A| < \varepsilon$$

成立．那么常数 A 称为数列 a_n 当 $n\to\infty$ 时的极限．或者说，a_n 在 $n\to\infty$ 时收敛于 A，记作

$$\lim_{n\to\infty} a_n = A$$

或

$$\text{当 } n\to\infty \text{ 时，} a_n\to A$$

而 $a_n(n=1,2,\cdots)$ 就称为收敛数列．

定义 2　（函数极限的 ε-$\mathscr{X}$ 定义）

如果定义于 $x\geqslant a$ 的函数 $y=f(x)$ 与一个确定的常数 A 有如下关系：任意给定一个正数 ε，它无论怎样小，相应地必有另一个正数 $\mathscr{X}(\varepsilon)$，使得在 $x>\mathscr{X}(\varepsilon)$ 时，不等式

$$|f(x) - A| < \varepsilon$$

成立．那么常数 A 称为函数 $f(x)$ 在 $x\to+\infty$ 时的极限，或者说函数 $f(x)$ 在 $x\to+\infty$ 时收敛于 A，记作

$$\lim_{x\to+\infty} f(x) = A$$

或

$$\text{当 } x\to+\infty,\ f(x)\to A$$

以上讨论的是函数 $f(x)$ 在 $x\to+\infty$ 时的极限定义，我们可以同样地来定义 $f(x)$ 在 $x\to-\infty$ 及 $x\to\infty$ 时的极限，只要把上述定义中的 $x\geqslant a$ 与 $x>\mathscr{X}(\varepsilon)$ 分别改为 $x\leqslant -a$ 与 $x<-\mathscr{X}(x)$ 及 $|x|\geqslant a$ 与 $|x|>\mathscr{X}(\varepsilon)$ 即可.

定义 3 （函数极限的 ε-δ 定义）

如果定义于 ξ 的某一邻区（ξ 点本身可以是例外）的一个函数 $y=f(x)$ 与一个确定的常数 A 有如下关系：任意给定一个正数 ε，无论它怎样小，相应地必有另一个正数 $\delta(\varepsilon)$，凡是满足 $0<|x-\xi|<\delta(\varepsilon)$ 的一切 x，都使不等式

$$|f(x)-A|<\varepsilon$$

成立. 那末常数 A 称为函数 $f(x)$ 在 $x\to\xi$ 时的极限，或者说 $f(x)$ 在 $x\to\xi$ 时收敛于 A，记作

$$\lim_{x\to\xi}f(x)=A$$

或

$$\text{当 } x\to\xi \text{ 时，} f(x)\to A$$

我们把 x 从 ξ 的左侧（即 $x<\xi$）趋近 ξ 记作 $x\to\xi^-$，而把 x 从 ξ 的右侧（即 $x>\xi$）趋近 ξ 记作 $x\to\xi^+$.

在上述 ε-δ 定义中，把 $0<|x-\xi|<\delta$ 换成 ξ 的左邻区：

$$0<\xi-x<\delta \quad \text{即} \quad \xi-\delta<x<\xi$$

就变成了函数 $f(x)$ 在 $x\to\xi^-$ 时极限的定义. 这时 A 称为 $f(x)$ 在 $x\to\xi$ 的左极限，记作 $f(\xi-0)$，即

$$\lim_{x\to\xi^-}f(x)=f(\xi-0)$$

同理，在上述 ε-δ 定义中，把 $0<|x-\xi|<\delta$ 换成 ξ 的右邻区：

$$0<x-\xi<\delta \quad \text{即} \quad \xi<x<\xi+\delta$$

就变成了函数 $f(x)$ 在 $x\to\xi^+$ 时极限的定义，这时 A 称为 $f(x)$ 在 $x\to\xi$ 时的右极限，记作 $f(\xi+0)$，即

$$\lim_{x\to\xi^+}f(x)=f(\xi+0)$$

由极限与左、右极限的定义显然可以立即得出：极限存在的充要条件是左、右极限存在且相等.

定义 4

在 $x\to\xi$（或 $x\to\infty$）时收敛于零的函数 $f(x)$ 称为当 $x\to\xi$（或 $x\to\infty$）时的无穷小量，简称无穷小. 无穷小量的倒数称为无穷大量.

对于数列亦可类似地定义.

定义 5

设 $\alpha(x)$ 与 $\beta(x)$ 都是当 $x\to\xi$（或 $x\to\infty$）时的无穷小.

1） 如果 $\dfrac{\alpha(x)}{\beta(x)}\to0$，即 $\dfrac{\beta(x)}{\alpha(x)}\to\infty$，$\alpha(x)$ 称为 $\beta(x)$ 的高阶无穷小，而 $\beta(x)$ 称为 $\alpha(x)$ 的低阶无穷小；

2） 如果 $\dfrac{\alpha(x)}{\beta(x)}\to c\neq0$，$\alpha(x)$ 与 $\beta(x)$ 称为同阶无穷小；

3） 如果 $\dfrac{\alpha(x)}{\beta(\alpha)}\to1$，$\alpha(x)$ 与 $\beta(x)$ 称为等价无穷小，记作 $\alpha(x)\sim\beta(x)$.

无穷小与无穷小比较都是重要的概念，它们将在微分、微元法中得到广泛应用.

定义 6

如果函数 $y=f(x)$ 在 x_0 的某个邻区有定义，而且满足等式

$$\lim_{x\to x_0} f(x) = f(x_0)$$

则称函数 $y=f(x)$ 在 x_0 连续.

如引用极限 ε-δ 定义，则上述定义中的等式可描绘为：如果任给一个 $\varepsilon>0$，相应地有一个 $\delta(\varepsilon)>0$，使得当 $|x-x_0|<\delta$ 时，有不等式

$$|f(x) - f(x_0)| < \varepsilon$$

成立.

联系到左、右极限的概念，我们又可进一步定义：如

$$\lim_{x\to x_0^-} f(x) = f(x_0) \quad 或 \quad \lim_{x\to x_0^+} f(x) = f(x_0)$$

成立时，就分别称 $f(x)$ 在 x_0 左连续或右连续.

显然，$f(x)$ 在 x_0 连续的充要条件是 $f(x)$ 在 x_0 左、右连续.

在上述定义中，令 $x=x_0+\Delta x$，等式又可写成

$$\lim_{\Delta x\to 0}[f(x_0+\Delta x) - f(x_0)] = 0$$

其中 Δx 表示自变量从 x_0 到 x 的变化，称为自变量的增量，而 $f(x_0+\Delta x)-f(x_0)$ 是函数 $f(x)$ 当自变量取得增量 Δx 后相应地发生的变化，称为函数的增量，记作 Δy，于是上式又可写成

$$\lim_{\Delta x\to 0}\Delta y = 0$$

这是连续定义的等价表达形式，因此所谓函数在某一点连续，就是说，当自变量增量趋于零时，函数的增量是一个无穷小. 这也精确地反映了物理中的连续变化现象.

如果 $y=f(x)$ 在 x_0 不连续，就称它在 x_0 间断，或说 x_0 是它的间断点. 有各种不同的间断点，我们把它分类如下：

1） 如果在 x_0，$f(x_0-0)$，$f(x_0+0)$ 都存在，则称 x_0 为第一类间断点，它们又可分为：

i） 在 x_0，$f(x_0-0)=f(x_0+0)\neq f(x_0)$，则称 x_0 为 $f(x)$ 的可去间断点. 事实上在这种情况下，重新定义 $f(x_0)=\lim\limits_{x\to x_0}f(x)$，就可使 $f(x)$ 在 x_0 连续. 在高等数学中，碰到可去间断点，往往不加声明地认为已重新定义 $f(x_0)$ 而把它视作连续点；

ii） $f(x_0-0)\neq f(x_0+0)$，则称 x_0 为跳跃间断点.

2） 第一类间断点以外的其它间断点，称为第二类间断点，在第二类间断点处，$f(x)$ 的左、右极限至少有一个不存在. 第二类间断点常见的有：

i） 当 $x\to x_0$，$f(x)\to\infty$，则称 x_0 为 $f(x)$ 的无穷间断点；

ii） 当 $x\to x_0$，$f(x)$ 振荡发散（譬如 $f(x)=\sin\dfrac{1}{x}$ 在 $x=0$ 处），则称 x_0 为 $f(x)$ 的振荡间断点.

§ 1-2 极限运算、连续函数的定理

定理 1 单调增*（减）而上（下）有界的数列必存在极限.

这是一条数列极限存在的准则. 这准则完全依据数列本身的性质来确定极限的存在，在数学理论上具有重要的意义，譬如著名的极限

$$\lim_{n\to\infty}\left(1+\frac{1}{n}\right)^n = e$$

就是利用这个准则判断出数列$\left(1+\frac{1}{n}\right)^n$的极限存在,而将它的极限记作 e 的. 利用这个极限还可证明

$$\lim_{x\to\infty}\left(1+\frac{1}{x}\right)^x=e$$

及它的等价形式

$$\lim_{x\to 0}(1+x)^{1/x}=e$$

这些极限都有广泛的应用. 但须指出,定理 1 只是数列极限存在的充分条件而不是必要条件.

* 若 $a_n\leqslant a_{n+1}$,称 a_n 为单调增数列;若 $a_n<a_{n+1}$,称 a_n 为严格单调增数列. 相似可定义单调减.

定理 2

如果在 $x\to\xi$(或$\to\infty$)时,$f(x)\to A$,$g(x)\to B$,则

1) $f(x)\pm g(x)\to A\pm B$;

2) $f(x)g(x)\to AB$;

3) $\dfrac{f(x)}{g(x)}\to\dfrac{A}{B}\quad B\neq 0$;

4) $Kf(x)\to KA$, K 是常数;

5) $[f(x)]^m\to A^m$, m 是正整数;

6) $[f(x)]^{1/m}\to A^{1/m}$, m 是正整数(当 m 是偶数时,A 必须大于等于零).

定理 3

如果当 $x\to x_0$ 时,$u=\varphi(x)\to u_0$(但 $u\neq u_0$),而当 $u\to u_0$ 时,$y=f(u)\to A$. 则当 $x\to x_0$ 时,复合函数

$$y=f[\varphi(x)]\to A$$

定理 4

如果当 $x\to\xi$(或者当 $x\to\infty$)时,$f(x)\to A$,$g(x)\to B$,且

$$f(x)\leqslant g(x)$$

则必有

$$A\leqslant B$$

定理 5

如果在 $x\to\xi$(或者 $x\to\infty$)时,$g(x)\to A$,$h(x)\to A$,且有

$$g(x)\leqslant f(x)\leqslant h(x)$$

那末当 $x\to\xi$(或 $x\to\infty$)时,必有

$$f(x)\to A$$

定理 2,4,5 对于数列也是成立的. 这些定理在极限的理论与运算中,都极为重要,譬如说三角函数著名的极限

$$\lim_{x\to 0}\frac{\sin x}{x}=1$$

就是利用定理 5 证明的.

定理 6

1） 函数 $f(x)$在 $x\to\xi$(或 $x\to\infty$)时有极限的充要条件是当 $x\to\xi$(或 $x\to\infty$)时，$f(x)-A$ 是无穷小量；

2） 有限个无穷小的代数和也是一个无穷小；

3） 有限个无穷小的乘积还是一个无穷小；

4） 无穷小与有界量的乘积仍是无穷小.

定理 7

1） 有限个连续函数的和、差、积、商（使分母等于零的点除外）仍是连续函数；由有限个连续函数复合起来的函数仍是连续函数；

2） 任何初等函数都在它的定义区间连续.

定理 8

如果函数 $f(x)$在闭区间$[a,b]$上连续，则有：

1） [维尔斯特拉斯(K. Weierstrass)定理]$f(x)$在$[a,b]$有界且必有最大值与最小值. 即在$[a,b]$上存在 x_1 与 x_2，使得对$[a,b]$上所有的 x，有 $f(x_1)\geqslant f(x)$及 $f(x_2)\leqslant f(x)$；

2） [介值定理]$f(x)$必取得介于区间两端点的函数值之间的任何值. 即如果 $f(a)<u<f(b)$（或 $f(b)<u<f(a)$），则在区间(a,b)内至少有一点 ξ，使得 $f(\xi)=u$.

由介值定理，我们可以得到两个推论：

1） 在$[a,b]$连续的函数必取得介于最大值与最小值之间的任何值；

2） $f(x)$在$[a,b]$连续，如 $f(a)f(b)<0$，则在(a,b)内至少有一点 ξ 使 $f(\xi)=0$.

维尔斯特拉斯定理与介值定理是闭区间上连续函数具有的最基本的性质，用途极广，在下面的例题中也可看到它的应用. 需要强调指出，这两个定理在开区间上，结论都可能不成立. 以函数 $f(x)=\dfrac{1}{x}$为例，它在开区间$(0,1)$连续，但是 $f(x)$在$(0,1)$无界，更没有最大值与最小值.

§ 1-3　例题分析

例 1　用 ε-N 定义证明

$$\lim_{n\to\infty} p^n = 0 \quad (0<p<1)$$

分析　根据定义 1，这就是要证明：对于任意给定的正数 ε，可以找到正整数 $N=N(\varepsilon)$，使得当 $n>N$ 时，有

$$|p^n-0|<\varepsilon$$

这样的 N 能否找到呢？可分析如下：把不等式

$$|p^n-0|=p^n<\varepsilon$$

两端取对数，得到 $n\ln p<\ln\varepsilon$，因为 $p<1$，所以 $\ln p<0$，故只要 $n>\dfrac{\ln\varepsilon}{\ln p}$，不等式就能成立，可见应取 $N\geqslant\dfrac{\ln\varepsilon}{\ln p}$.

证　任取 $\varepsilon>0$，可取正整数 $N\geqslant\dfrac{\ln\varepsilon}{\ln p}$，则当 $n>N$ 时，有 $n>\dfrac{\ln\varepsilon}{\ln p}$，即 $n\ln p<\ln\varepsilon$，从而有

$$|p^n-0|=p^n<\varepsilon$$

这就证明了 $\lim\limits_{n\to\infty} p^n=0$.

例 2 用 ε-δ 定义证明 $\lim\limits_{x\to 1}(3x+1)=4$

证 $|f(x)-4|=|3x+1-4|=|3x-3|=3|x-1|$

由此可见，任取 $\varepsilon>0$，只要 $|x-1|<\delta(\varepsilon)=\frac{\varepsilon}{3}$，就有

$$|f(x)-4|<\varepsilon$$

由定义 3，$\lim\limits_{x\to 1}(3x+1)=4$.

例 3 用 ε-δ 定义证明 $\lim\limits_{x\to 2}x^2=4$.

分析 据定义 3，对任意给定的 $\varepsilon>0$，要找出对应的 $\delta=\delta(\varepsilon)$，使得当 $0<|x-2|<\delta$ 时，有

$$|x^2-4|<\varepsilon$$

为此，我们来分析 $|x^2-4|$，而

$$|x^2-4|=|x+2||x-2|$$

这里，除 $|x-2|$ 外，还有因子 $|x+2|$. 一种错误的作法是：由于 $x\to 2$，就贸然地写出 $|x^2-4|\leqslant 4|x-2|$ 或者 $|x^2-4|=4|x-2|$. 这是完全错误的. 由于 x 可以从 2 的右侧($x>2$)趋于 2. 上面的不等式或等式是不能成立的。由于 $x\to 2$，不妨先假定 $|x-2|<1$，即 $-1<x-2<1$，也就是 $1<x<3$，故要 $|x^2-4|=|x+2||x-2|<5|x-2|<\varepsilon$，只要选择 $\delta=\frac{\varepsilon}{5}$ 即可，但由于先假定了 $|x-2|<1$，故 δ 应选择为 $\min(1,\frac{\varepsilon}{5})$.

证 任意给定 $\varepsilon>0$，选 $\delta=\min(1,\frac{\varepsilon}{5})$，当 $0<|x-2|<\delta$ 时，既有 $|x-2|<1$，又有 $|x-2|<\frac{\varepsilon}{5}$，于是

$$|x^2-4|=|x+2||x-2|<5|x-2|<\varepsilon$$

即

$$\lim_{x\to 2}x^2=4$$

例 4 设 $a_1=\sqrt{2}$，$a_2=\sqrt{2+\sqrt{2}}$，$\cdots a_n=\underbrace{\sqrt{2+\sqrt{2+\cdots+\sqrt{2}}}}_{n\text{重根号}}$ $(n=1,2,\cdots)$

证明 $\lim\limits_{n\to\infty}a_n$ 存在，并求其值.

证 我们先证明极限存在. 显然 $a_{n+1}=\sqrt{2+a_n}$，由于 $a_1<2$，所以如果 $a_n<2$，则

$$a_{n+1}=\sqrt{2+a_n}<\sqrt{2+2}=2$$

由数学归纳法立即可知，对于 $n=1,2,\cdots$

$$0<a_n<2$$

另一方面，$a_{n+1}=\sqrt{2+a_n}>\sqrt{2a_n}>\sqrt{a_n^2}=a_n$，所以 a_n 是单调增上有界数列，由定理 1，a_n 必有极限，令

$$\lim_{n\to\infty}a_n=A$$

当然也有 $\lim\limits_{n\to\infty}a_{n+1}=A$，于是 $\lim\limits_{n\to\infty}a_{n+1}^2=A^2$，而

$$a_{n+1}^2=2+a_n$$

令 $n\to\infty$ 两端取极限，便得到 $A^2=2+A$，解得 $A_1=2, A_2=-1$，但由定理 4，极限不可能是负数，故

$$\lim_{n\to\infty} a_n = A = 2$$

这个简单的例子说明，定理 1 不仅有理论上的意义，它还常常给我们提供求极限值的新途径.

必须强调指出，上例中求极限使用的方法，只有在已知极限存在时才能使用，否则可能导致荒谬的结论. 例如，令 $a_n=n$，于是有

$$a_{n+1} = a_n + 1$$

如果在两边贸然地令 $n\to\infty$ 求极限，就有

$$\lim_{n\to\infty} a_{n+1} = \lim_{n\to\infty} a_n + 1$$

而 $\lim\limits_{n\to\infty} a_{n+1} = \lim\limits_{n\to\infty} a_n$，便会得出零等于 1 荒谬结论来. 再如令 $a_n=(-1)^n (n=1,2,\cdots)$，有

$$a_{n+1} = - a_n$$

如果不管极限是否存在便在两边求极限，会得到

$$\lim_{n\to\infty} a_{n+1} = - \lim_{n\to\infty} a_n$$

从而导致

$$\lim_{n\to\infty} a_n = 0$$

的错误结论. 以上两例错误的根源就在于数列的极限并不存在. ($a_n=n$ 是无穷大量，$a_n=(-1)^n$ 是振荡发散数列.)

例 5 设 $a_1>0$, $a_{n+1}=\dfrac{1}{2}\left(a_n+\dfrac{1}{a_n}\right)$ $(n=1,2,\cdots)$，数列极限是否存在？如存在，求 $\lim\limits_{n\to\infty} a_n$.

解 此类题要求极限，必须先证明极限存在. 现在我们用定理 1 来判断.

首先，显然有 $a_n>0 (n=1,2,\cdots)$，其次

$$a_{n+1} = \frac{1}{2}\left(a_n + \frac{1}{a_n}\right) \geqslant \frac{1}{2} \cdot 2\sqrt{a_n}\sqrt{\frac{1}{a_n}} = 1 \qquad (n = 1,2,\cdots)$$

故

$$a_{n+1} - a_n = \frac{1}{2}\left(a_n + \frac{1}{a_n}\right) - a_n = \frac{1}{2}\left(\frac{1}{a_n} - a_n\right) \leqslant 0 \quad (n = 2,3,\cdots)$$

这说明数列单调减下有界，故极限存在，令 $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = A$，在 $a_{n+1}=\dfrac{1}{2}\left(a_n+\dfrac{1}{a_n}\right)$ 两端求极限，得到

$$A = \frac{1}{2}\left(A + \frac{1}{A}\right)$$

解方程得 $A=\pm 1$，但 $a_n\geqslant 0$，极限不会是负数，故

$$\lim_{n\to\infty} a_n = 1$$

例 6 求

$$\text{i)} \quad \lim_{x\to 0} \frac{1-\cos x}{x^2}; \qquad \text{ii)} \quad \lim_{x\to 0} \frac{\ln(1+x)}{x}.$$

解

$$\text{i)} \quad \lim_{x\to 0} \frac{1-\cos x}{x^2} = \lim_{x\to 0} \frac{2\sin^2 \dfrac{x}{2}}{x^2} = \lim_{x\to 0} \frac{1}{2}\left(\frac{\sin \dfrac{x}{2}}{\dfrac{x}{2}}\right)^2 = \frac{1}{2}$$

ii) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\ln(1+x)}{x}=\lim\limits_{x\to 0}\ln(1+x)^{\frac{1}{x}}=\ln\left(\lim\limits_{x\to 0}(1+x)^{\frac{1}{x}}\right)=\ln e=1$

（对数函数是连续函数）

对不定式求极限，我们将主要放在第二章用罗必塔（G・F・L′ Hospital）法则来处理，可参阅该章有关的例题.

例 7 如 a_n 收敛，b_n 发散，则 a_n+b_n，a_nb_n 敛、散情况如何？如 a_n、b_n 同时发散，则 a_n+b_n、a_nb_n 敛散情况又如何？

解 在数学论证上，肯定的结论需证明，不能肯定的需举出反例.

i) 若 a_n 收敛，b_n 发散，a_n+b_n 必然发散. 因为若 a_n+b_n 收敛，则 $b_n=(a_n+b_n)-a_n$ 收敛，与假设矛盾.

ii) 如 $\lim\limits_{n\to\infty}a_n=A\ (A\neq 0)$，$b_n$ 发散，则 a_nb_n 必然发散. 因为如 a_nb_n 收敛，$b_n=\dfrac{a_nb_n}{a_n}$ 必收敛与假设矛盾.

但是如 $\lim\limits_{n\to\infty}a_n=0$，则情况不能肯定. 例如：

$a_n=\dfrac{1}{n}\to 0$，$b_n=n^2$，$a_nb_n=n$ 发散.

$a_n=\dfrac{1}{n^2}\to 0$，$b_n=n$，$a_nb_n=\dfrac{1}{n}\to 0$，收敛.

iii) 如 a_n、b_n 均发散，则 a_n+b_n 的情况不能肯定，例如

$a_n=b_n=n$，$a_n+b_n=2n$，发散.

$a_n=n+\dfrac{1}{n}$，$b_n=-n$ 均发散，但 $a_n+b_n=\dfrac{1}{n}\to 0$，收敛.

iv) 如 a_n，b_n 均发散，a_nb_n 的情况也不能肯定，例如

$a_n=b_n=(-1)^n$ 均发散，但 $a_nb_n=(-1)^{2n}=1$ 却收敛.

$a_n=(-1)^n$，$b_n=(-1)^n+n$ 均发散，$a_nb_n=1+(-1)^nn$ 亦发散.

例 8 求 $\lim\limits_{n\to\infty}\left(\dfrac{1}{\sqrt{n^2+1}}+\dfrac{1}{\sqrt{n^2+2}}+\cdots+\dfrac{1}{\sqrt{n^2+n}}\right)$

解 一种错误的作法是

$$\lim_{n\to\infty}\left(\frac{1}{\sqrt{n^2+1}}+\frac{1}{\sqrt{n^2+2}}+\cdots+\frac{1}{\sqrt{n^2+n}}\right)$$
$$=\lim_{n\to\infty}\frac{1}{\sqrt{n^2+1}}+\cdots+\lim_{n\to\infty}\frac{1}{\sqrt{n^2+n}}=0$$

因为随着 n 的变大，项数也在增多，不能应用极限的有理运算. 正确的作法是

$$\frac{n}{\sqrt{n^2+n}}<\frac{1}{\sqrt{n^2+1}}+\cdots+\frac{1}{\sqrt{n^2+n}}<\frac{n}{\sqrt{n^2+1}}$$

而 $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{n}{\sqrt{n^2+n}}=\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{n}{\sqrt{n^2+1}}=1$，根据定理 5，有

$$\lim_{n\to\infty}\left(\frac{1}{\sqrt{n^2+1}}+\frac{1}{\sqrt{n^2+2}}+\cdots+\frac{1}{\sqrt{n^2+n}}\right)=1$$

例 9 讨论函数

$$f(x)=\begin{cases}\dfrac{x(x+2)}{\sin\pi x} & x<0\\[2ex] \dfrac{x}{x^2-1} & x\geqslant 0\end{cases}$$

的连续性.

解 这是分段表示的函数. 对任一 $\bar{x}<0$，在 $\bar{x}$ 的某一邻区内，$f(x)$ 与 $x(x+2)/\sin\pi x$ 恒等，故 $f(x)$ 在 $\bar{x}$ 是连续还是间断与 $x(x+2)/\sin\pi x$ 在 $\bar{x}$ 的情况相同. $x(x+2)/\sin\pi x$ 是初等函数，在它的定义区间内函数是连续的，故只有当 $x=-n$（n 是正整数）时，函数才有间断点. 同样，在 $x>0$ 时，只有 $x=1$ 是间断点，而 $x=0$ 是分段函数的“衔接点”，必须从左，右趋于零分别考虑，因为

$$\lim_{x\to 0^+} f(x) = \lim_{x\to 0^+} \frac{x}{x^2-1} = 0$$

$$\lim_{x\to 0^-} f(x) = \lim_{x\to 0^-} \frac{x(x+2)}{\sin\pi x} = \lim_{x\to 0^-} \frac{1}{\pi}\frac{\pi x}{\sin\pi x}(x+2) = \frac{2}{\pi}$$

所以 $x=0$ 是 $f(x)$ 的跳跃间断点.

当 $x\to 1$ 及 $x\to -n$ $(n\neq 2)$ 时，显然有 $f(x)\to\infty$，故这些点是 $f(x)$ 的无穷间断点.

$$\lim_{x\to -2} f(x) = \lim_{x\to -2} \frac{x(x+2)}{\sin\pi x} \xlongequal{x+2=t} \lim_{t\to 0} \frac{(t-2)t}{\sin\pi(t-2)}$$

$$= \lim_{t\to 0}(t-2)\frac{t}{\sin\pi t} = -\frac{2}{\pi}$$

故 $x=-2$ 是 $f(x)$ 的可去间断点、除去 $x=0,1,-n(n=1,2,\cdots)$ 外，$f(x)$ 在其它点均连续.

例 10 设

$$f(x) = \begin{cases} e^x(\sin x + \cos x) & x > 0 \\ 2x + a & x \leqslant 0 \end{cases}$$

确定 a 的值，使 $f(x)$ 在整个数轴上连续.

解 $e^x(\sin x+\cos x)$ 在 $x>0$ 连续，而不论 a 为何值，$2x+a$ 在 $x<0$ 处连续，故 $f(x)$ 在 $x\neq 0$ 处连续. 而

$$\lim_{x\to 0^+} f(x) = \lim_{x\to 0^+} e^x(\sin x + \cos x) = 1$$

$$\lim_{x\to 0^-} f(x) = \lim_{x\to 0^-} (2x + a) = a$$

注意到 $f(0)=a$，故只要 $a=1$，$f(x)$ 就在 $x=0$ 处连续，从而 $f(x)$ 在整个数轴上连续.

例 11 证明方程 $x2^x=1$ 至少有一个小于 1 的正根，

分析 将方程改写为

$$f(x) = x2^x - 1 = 0$$

首先要明确，左端不是多项式，一般不能用代数方法求根. 要在理论上证明有小于 1 的正根存在，必须应用介值定理. 下一题及第二章中若干要求证明根存在的例题均如此.

证 $f(x)=x2^x-1$ 是初等函数，在 $[0,1]$ 连续，而 $f(0)=-1$，$f(1)=1$，由介值定理的推论 2，存在 $\xi(0<\xi<1)$，使

$$f(\xi) = 0$$

即原方程有小于 1 的正根.

例 12 证明方程 $a\sin x=x+b$ $(a>0,b<0)$ 至少有一个不超过 $a-b$ 的正根.

证 将方程改写为

$$f(x) = a\sin x - x - b = 0$$

由于 $f(x)$ 连续，且 $f(0)=-b>0$

$f(a-b)=a\sin(a-b)-(a-b)-b=a\sin(a-b)-a\leqslant 0 \quad (\sin(a-b)\leqslant 1)$