作者 [德] H. GRAUERT
I. LIEB
译者 陈鹓

微积分学

第一卷 一元实变函数

人民教育出版社

微积分学

第一卷　一元实变函数

作者 ［德］H. Grauert　I. Lieb

译者 陈　鹮

人民教育出版社

出 版 前 言

本书为德国大学数学系和物理系一年级用的微积分学教材，详细地叙述了一元实变函数微积分学中的主要内容和严谨地证明了其主要定理．全书共分七章：实数；集与序列；无尽级数；函数；微分；特殊函数和 Taylor 定理；积分．

本书可供综合大学及师范学院数学系和物理系各专业作教学参考用书．

2008/02.06

微 积 分 学

第一卷　一元实变函数

作者　［德］H. Grauert　I. Lieb

译者　陈　鹮

*

人民教育出版社出版

新华书店北京发行所发行

黄冈报 印刷厂印装

*

开本 850×1168 1/32　印张 8　字数 180,000

1982 年 7 月第 1 版　1983 年 8 月第 1 次印刷

印数 00,001—15,000

书号 13012·0773　　定价 1.25 元

译 者 的 话

原书1966年出版，以后几次重版中曾作了一些修改，但都不属于本质的变动，这个译本是根据1975年的第四版译出的。

本书的特点是数学的严格性和证明的彻底性．它是为德国的大学（如哥廷根）数学系和物理系新生写的．目前我国大学生入学时的数学水平和本书还有不少差距，因而用它作为教材是不适宜的．但是，我们的学生以及担任微积分课的青年教师完全可以从本书得到有益的启发，从中可学到以较高的观点用严谨的方法去处理微积分和一般的数学问题。因此，在我国它是一本很有用的参考书．

在翻译中改正了一些刊误，但由于译者水平所限，很可能有许多错译或表达不好的地方，望读者不吝指正．

病后休养中的我校教师阎光耀同志曾代为检阅了译稿全文，并提出不少修正意见，谨此志谢．

南开大学　陈鹀

1980年5月

第四版序言

第四版和前几版所不同的是关于交换极限次序的几节里有一些变动.

哥廷根(Göttingen)和波恩(Bonn), H. Grauert

1975年6月 I. Lieb

第三版序言

这个新版的内容除了改正一些错误外完全和本书的第二版相同.

哥廷根和敏士特(Münster), H. Grauert

1972年11月 I. Lieb

第二版序言

在这个新版里消除了一些不清楚的地方，并且补充了关于函数序列收敛以及关于无尽多次可微函数的更多的例子.

哥廷根,1969年9月 H. Grauert

I. Lieb

第一版序言

这本关于一元实变函数的书是阐述微积分学的三卷书中的第

一卷．在以后两卷里，将论述多元函数，常微分方程和积分理论．

这套书是对开始学习数学和物理学的学生授课的成果．由于这种课堂讲授的入门性质，这书也将向一个不具备高等数学知识的读者提供机会来领会关于实变函数理论的尽可能严格而系统的结构．为此，叙述了所有证明的一切细节，而在前几节里，还特别阐明了重要的证明方法．在这样做时，我们还采用逻辑的和集合论的方法而不采用“朴素的”，亦即非公理的观点．特别是对于完全归纳法原理，从而也对于自然数和序列的概念，都采用了这种观点．

现在对本书内容作一鸟瞰．

实数概念是基本的．在第一章里，详尽地论述实数体①公理和它们的简单推论；无穷远点$+\infty$和$-\infty$也通过公理引进．

下面两章专门用于阐述邻域概念以及由此推得的关于序列和级数的极限值概念．由于我们以数轴的自然(均匀)拓扑为基础给出收敛定义，收敛于$\pm\infty$就被排除了．——我们阐述“上极限”和“下极限”概念时，注意使它们和半连续函数的定义一致起来．

实函数在第四章讨论．在连续函数之前，先定义半连续函数．这类函数对于在第七章里关于函数空间的邻域定义是重要的，从而对 Lebesgue 积分的引进也是重要的，在这本书里，Lebesgue 积分取代了不能令人满意的Riemann积分．

借助于连续性概念就可以在第五章里阐明可微函数，而不需要通过新的极限过程．用这个方法来推导微分法则可获致实质的简化；此外，这些定义可以不改变地推广到最一般的款(多元函数的全微分，拓扑向量空间的函数)．

有特别的一章专门阐述级数的展开和初等函数．Taylor公式(带 Lagrange 余项)将推广成一个广泛的内插和外插公式，它们在

① 一般译成域，今译作体(Körper)以别于以后的域(Bereich)．——译者．

关于数值积分的一节里的误差估计中得到运用. 我们特别重视对初等函数的仔细讨论. 我们认为, 用它们的幂级数展开式来引进似乎是最适当的; 说实在话, 在那里, 由于还没有掌握积分概念而还不可能有角和长的度量, 所以不能处理三角函数和几何的联系.

最后, 在第七章, 借助于梯函数, 用完全初等方法来定义积分; 这样, 我们不利用欧氏度量的完全可加性, 这定义直接推广到具有局部凸值向量空间的函数. 虽然在这套书的这一部分里我们还必须放弃积分理论里更深刻的一些定理, 但是我们能够证明关于通常讲授的 Riemann 积分中所涉及的所有定理. 关于积分计算的逼近法也讨论到了.

这本书的材料是这样安排的: 第一学期(夏季)每周五小时或第二学期(冬季)每周四小时可以授完.

作者中年长的一位在他早期的学习中曾听了 **H. Behnke** 先生讲授微积分课程, 这个课是组织得饶有兴趣而讲得又很完善的. 这本书包含许多由此得到的可贵的启发. 因此, 作者愿把他们的书献给 **H. Behnke** 先生.

哥廷根, 1966 年 12 月,

H. Grauert

I. Lieb

目　　录

第一章 实　　数

在本章里假定人人都知道实数，这一章要讨论包含实数基本性质(公理)的描述，并据之导出实数更多的性质.

§1 数和数轴

人所熟知，每个实数可以表示成一个无穷十进小数，例如表成3.1415…或2.000…，并且，倒过来，每个无穷十进小数

$$\pm a_{-n}a_{-(n-1)}\cdots a_{-1}a_0.a_1a_2a_3a_4\cdots a_\nu\cdots,$$

确定一个实数. 无论如何，用一个数可以通过不同的方法用无穷十进小数表示：例如 $0.999\cdots=1.000\cdots$；一般地，

$$\underbrace{99\cdots9}_{n\text{次}}9.99\cdots=1\underbrace{00\cdots0}_{n\text{次}}0.00\cdots$$

$$a_{-n}\cdots a_i999\cdots9.99\cdots=a_{-n}\cdots(a_i+1)000\cdots0.00\cdots,$$

其中 $a_i\neq9$. 从上述关系可以看出，这种表示法是唯一的. 如果在小数点后面全是零，那么，在小数点后面的零一般都不写：$4.00\cdots=4$. 这样简单些.

实数可以表示为一条直线上的点. 为此，选取任意一条直观的直线 L 并在 L 上取一点 P，在 P 点上面标出数 0. 在 L 上，从 P

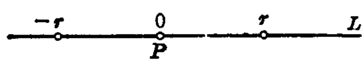


图1　数轴

点向右取长度为 r 厘米的线段，在其终点上面标出数 r. 又在 L 上从 P 点向左引同样长的线段，在其终点上面标出 $-r$. 这样一来，每个实数在 L 上就有一点和它对应(我们说：这个数就在这个

点上面)；显然

(1) 每个数在L的一点上面，而且只在一点上面.

(2) 两个不同的数总在不同点上面.

(3) 在L的每个点上面，至少有一个实数.

上述的(2)与(3)告诉我们，有一个而且只有一个数在L的每一点上面，具有这样性质的关系叫做一一对应(或双单值对应). 实数(经过上述的步骤)和直线L上的点建立了一一对应关系.

我们经常有这样的需要，来考虑实数和一条直线上的点之间用上述方法选择对应关系. 这样，每一点可以用它上面的一个数来唯一确定：因此可以读作点0(或0点)，点4等等；所有实数的总体构成一个数轴. 我们将看出，这样用直线上的点来代表实数是非常有用的.

需要证明论断(1)到(3)吗？

如果要这样做，我们必须对直线和它的性质有一个很严格的概念——但是现在只需要一个直观的概念就够了. 给一个证明实际上也没有(任何)意义的. 实数和数轴上的点的一一对应目前只是作为一个桥梁，以便用数来简化我们的工作并用来推动概念的建立；关于实数的定理总是只从下面即将给出的公理系统出发来导出，用逻辑为工具而不依赖于直观.

§2 集

个体东西(叫做对象)的总合又可以看成一个新的对象；这新对象叫做一个集(或集合)，组成集的那些东西叫做集的元(或元素). ——关于集合概念的准确解释留给逻辑去处理；对我们来说，认识特殊的集以及学会运用它们就够了.

实数的总合就是一个集；我们用$\boldsymbol{R}$表示它并且按前节的习惯一般称它为数轴. 如果不取所有的实数而只取其中一部分，同样

可以得到一个集，当对于每个实数总可确定它属于一个集M或者不属于M的时候，而且只当这个时候，一个以实数为元的集M完全被确定.

现在考虑实数集.

若M是实数集，我们引进下面各种记号：

$$“a\in M”$$

表示“a是M的元”(或“a属于M”，或“a在M内”，或“a出自M”).

$$“a\notin M”$$

表示“a不是M的元”.

$$“M=\{a, b, \cdots\}”$$

表示“M是a, b等元构成的集”.

$$“M=\{a: a \text{ 具有性质 } E\}”$$

表示“M是具性质E的一切数的集合，而且只有这些数在M内”.

集的例子

1. 自然数 1, 2, 3, …构成集$\mathbf{N}$；如果n属于$\mathbf{N}$，则$n+1$也属于$\mathbf{N}$.

用$\mathbf{Z}$表示集

$$\mathbf{Z}=\{x: x\in \mathbf{N} \text{ 或 } -x\in \mathbf{N} \text{ 或 } x=0\};$$

$\mathbf{Z}$是整数集.

实数中可以表成整数商$a/b(b\neq 0)$的集合叫做有理数集；它的标准记号是$\mathbf{Q}$，不属于$\mathbf{Q}$的实数叫做无理数.

2. 上面说过，$\mathbf{R}$自己是一个集. 我们把不含任何元素的也看成集；即所谓空集$\varnothing$，它也是一个实数集：事实上每个实数是否属于$\varnothing$是确定的(它们都不属于$\varnothing$).

3. 若a, b为任意两个实数，则或者a小于b，或者$a=b$，或者b小于a；三种关系有一种而且只有一种出现. 若“a小于b”，就

记以

$$a<b.$$

现在设 $a<b$. 集

$$I=(a, b)=\{x: a<x<b\}$$

(这里用“$a<x<b$”表示 $a<x$ 同时 $x<b$)叫做 a, b 间的开节①. 若把两个端点(或边界点)算进去,就得一个闭节

$$\bar{I}=[a, b]=\{x: a<x<b \text{ 或者 } x=a \text{ 或者 } x=b\}$$ ②

有时也考虑半开节

$$[a, b)=\{x: x=a \quad \text{或} \quad a<x<b\},$$

$$(a, b]=\{x: x=b \quad \text{或} \quad a<x<b\}.$$

在两个集之间可以建立关系,以说明它们之间的关联方式.

0. 相等

两个集 M_1, M_2, 当它们具有相同的元时叫做相等,那么 M_1 的每一个元属于 M_2, M_2 的每一个元也属于 M_1. 记号是

$$M_1=M_2.$$

1. 包含

只要 $x\in M_1$, 就必然 $x\in M_2$, 这样, 我们称 M_2 包含 M_1. 此时 M_1 也叫做 M_2 的子集,记号是

$$M_1\subset M_2.$$

“$M_1\subset M_2$”也常常记以“$M_2\supset M_1$”.

2. 交集的构成

两个集 M_1, M_2 的交(或交集)是下面所表示的集:

$$M_1\cap M_2=\{x: x\in M_1 \text{ 且 } x\in M_2\},$$

它就是那些既属于 M_1 又属于 M_2 的数所组成,如果没有上述那样的元,则 $M_1\cap M_2=\varnothing$.

---

① Intervall 多数编者称为“区间”,这里采用译名“节”——译者.

② 单一点的集合 $I=\{a\}$ 也看作是闭节.

3. 并集的构成

两个集M_1, M_2的并(或并集)是如下的集:

$$M_1 \cup M_2 = \{x: x \in M_1 \text{ 或 } x \in M_2\},$$

因而它就是那些至少属于M_1, M_2中一个的数所组成的集(可能有的数同时属于这两个集).

4. 差集的构成

两个集M_1, M_2的差(或差集)是如下的集:

$$M_1 - M_2 = \{x: x \in M_1 \text{ 且 } x \notin M_2\}.$$

$M_1 - M_2$可以是空集(试问何时是空的?).

为了弄清楚集合理论的关系和运算,我们要用到"且","或","若…则","不"等词句.这些词句在一般习惯用语中其意义不唯一,所以需要下面的"逻辑连词".

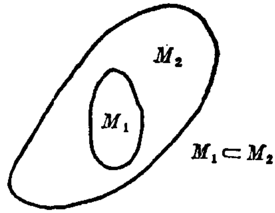
1. "不","且".这两个词在数学里和在习惯用语中一样用法.

2. "或".设"p","q"为两个论断,则当"p"与"q"二者都是假(或称错)的论断时,而且只当此时,论断"p 或 q"是假的.要紧的是,当"p"以及"q"都是真的(或称正确的)时,"p 或 q"是真的(这里的"或"不含排它的意思;不象在习惯用语中"或"含有非此即彼的意义).

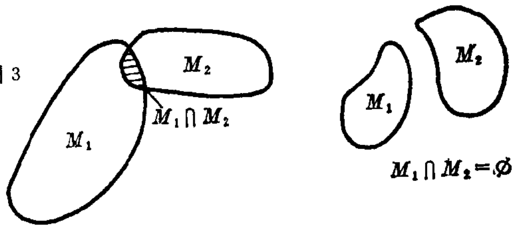
3. "若…则".这个词句在日常生活用语中有很多意义.在数学上则按如下规定来用:设"p"与"q"为两个论断,那么,当若"p"真,但"q"假的时候,而且只当这个时候,论断"若 p,则 q"是假;在其它情形就是"若 p,则 q"是真的(参看法则 I.1 的证明),"若 p,则 q"也用"由 p,得 q"代替.

迄今为止,我们已为有关集合$\boldsymbol{R}$的子集的集合理论的关联方式奠定了基础;对于平面上定义的点集这些运算也是自然的.集的运算用平面上点集作为例子特别直观.

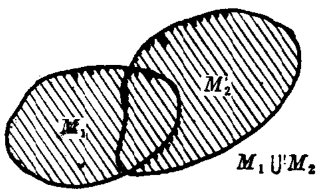
1. 包含　　图 2



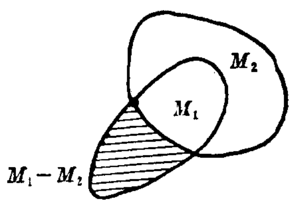
2. 交集　　图 3



3. 并集　　图 4



4. 差集　　图 5



在下面例子里，我们构造数集M_1和M_2的并集，其中M_2虽然是抽象的但是完全确定的对象.

设$-\infty$和$+\infty$是两个彼此不同的东西，它们又都不是实数. 取集$M_1 = \boldsymbol{R}$和$M_2 = \{-\infty, +\infty\}$的并:

$$\overline{\boldsymbol{R}} = \boldsymbol{R} \cup \{-\infty, +\infty\},$$

并作定义：设当$r \in \boldsymbol{R}$时，$-\infty < r < +\infty$；此外$-\infty < +\infty$.

定义 2.1 称 $\overline{R}$ 为闭数轴，$-\infty$和$+\infty$是 $\overline{R}$ 的两个无穷远点.

(我们不把$-\infty$和$+\infty$当作数来描述，因为我们并没有对实数和$\pm\infty$之间的诸如加法、乘法等关联关系给以定义.)在数轴上，若 r 在 s 之左，则 $r<s$. 因此$-\infty$可以看作在数轴上所有的点左边的一个点("在无穷远处")，相应地$+\infty$在右边("无穷远点")．这种表示法只能用在直观上．问题是，$-\infty$和$+\infty$是何物，在数学上是不重要的．在数学上，我们所认识的 $\overline{R}$ 全是从它的定义（以及从我们对R的知识）得来的．我们所考虑的只是$-\infty$和$+\infty$彼此之间的关系以及它们在数学上和R里的点的关系而不涉及有赖于无穷远点本质的"知识".

集 的 运 算

下面所遇到的集是 $\overline{R}$ 的子集；我们借助于点集阐述一些运算法则.

I. 包含的性质

1. 若M是一个集，则$\varnothing\subset M$.

证明 我们必须证明：若 $x\in\varnothing$，则 $x\in M$. 但 $x\in\varnothing$ 总是假的，所以全部论断正确.

2. $M\subset M$，即每个集包含在自己内(包含的自反性).

证明 M内每个元自然含在M内.

3. 设 M_1, M_2 为两个这样的集：$M_1\subset M_2$ 且 $M_2\subset M_1$，则 $M_1=M_2$(恒等定律).

证明 若 $x\in M_1$，则 $x\in M_2$，因为 M_1 包含在 M_2 内．倒过来，若 $x\in M_2$，则 $x\in M_1$，因为 $M_2\subset M_1$．因此，M_1 与M_2 具有相同的元，所以它们相等.

4. 设有三个集M_1, M_2, M_3: $M_1 \subset M_2$, $M_2 \subset M_3$, 则$M_1 \subset M_3$（包含的传递性）.

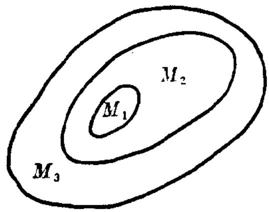


图 6

证明 求证的是：若x属于M_1，则也属于M_3. 因为若设 $x \in M_1$，则因 $M_1 \subset M_2$，所以 $x \in M_2$，又因 M_2 为 M_3 的子集，所以 $x \in M_3$.

II. 关于并集构成和交集构成的法则

设$M_1, M_2, \cdots, M_n$ 为集合. 则它们的并

$$M_1 \cup M_2 \cup \cdots \cup M_n = \{x: x \in M_1 \text{ 或 } x \in M_2 \cdots \text{或 } x \in M_n\},$$

即含一切这样数的集：每个数至少属于M_ν 中的一个.

相应地，有尽多个集$M_1, \cdots, M_n$ 的交是含所有这样的元素的集，这元素属于所有的集$M_\nu (\nu = 1, \cdots, n)$：

$$M_1 \cap M_2 \cap \cdots \cap M_n = \{x: \text{对于所有的 } \nu, x \in M_\nu\}.$$

为简化起见，用记号

$$M_1 \cup \cdots \cup M_n = \bigcup_{\nu=1}^{n} M_\nu,$$

$$M_1 \cap \cdots \cap M_n = \bigcap_{\nu=1}^{n} M_\nu.$$

1. $M_1 \cup (M_2 \cup M_3) = (M_1 \cup M_2) \cup M_3 = M_1 \cup M_2 \cup M_3$.

证明 设 $x \in (M_1 \cup M_2) \cup M_3$，即

$$x \in M_1 \cup M_2 \text{ 或 } x \in M_3.$$

也就是说