高等数学引论

第一卷　第一分册

华　罗　庚

科学出版社

高等数学引论

第一卷　第一分册

华　罗　庚

科　学　出　版　社

1 9 7 9

内 容 简 介

本书内容包括实数极限理论、微分和积分及其应用、级数理论、方程的近似解等.

本书可作为高等学校教学参考用书.

高 等 数 学 引 论

第一卷 第一分册

华 罗 庚 著

*

科学出版社 出版

北京朝阳门内大街137号

朝 阳 六 六 七 厂 印 刷

新华书店北京发行所发行 各地新华书店经售

*

1963年7月第 一 版　　开本：787×1092 1/16

1979年4月第五次印刷　　印张：22

印数：精 23,081—75,230　　插页：精3，平2

平 10,931—92,080　　字数：455,000

统一书号：13031・243

本社书号：397・13—1

定价：精装本 2.80 元

平装本 2.10 元

序　言

这部书的第一卷终于交印了，它既是急就章，又是拖沓篇．1958 年匆匆上马，现想现写现印现讲，有时写稿不过三遍，仅仅经过起草、修改、誊正三道手续便拿去付印．有时候校对来不及，就不校对了，因而原讲义上错误百出，疵谬迭见，所以说这是急就章．如果能专心一志地连续地干下去，那还可能比较好些，但又经常为其它工作所打断，因而写一段停一停，改一章放一放的情况又经常出现，所以说是拖沓篇．紧紧松松，赶赶拖拖．因而详略不一，前后不贯，轻重失调，呼应不周等毛病在所难免的了．

情况是如此，虽然经过同志们的帮助和修改重写，但还可能留下不少后遗症．这样的草率工作本来不该交印的，但不少同志热情鼓励，几经踌躇终于把它出版了，希望经过读者的帮助，人多、眼多、想法多，多提意见将来可以改写得更好些．

这个课自始至终是和王元同志合开的，他对原稿的形成与改写都提了不少意见，并且有不少章节都是出诸他的手笔．在共同教学中一些心得已经吸收入我们合著的“积分的近似计算”一书中（科学出版社 1961 年初版），1961 年龚升、吴方等同志又用这讲义教了一遍，修改了不少．最后定稿又经过曾肯成、许以超、史济怀、邓诗涛、李炯生、刘碧梧等同志的细心校阅，提了不少意见．个别章节还获得了戴元本、陆汝钤、韩京清、周永佩、罗祥钰、曹传书、吴松林、江嘉禾、李培信、邵秀民、陈志华、石赫、殷慰萍等同志的帮助，有关这些我在这儿表示谢意．特别应该一提的是：在最后定稿的时候，获得了中山大学吴兹潜、林伟二同志的帮助，他们一字不苟地校阅推敲，使本书避免不少错误．这样的主动地来自其他院校的帮助只能归功于集体主义的优越性．

在写作的过程中参考过熊庆来的“高等算学分析”（1934）；苏步青的“微分几何学”（1947）；赵访熊的“高等微积分”（1949）；孙光远、孙叔平的“微积分学”（1952）；陈建功的“实函数论”（1958）；杨宗磐的“数学分析入门”（1958）；樊映川等的“高等数学讲义”（1958）；陈荩民的“高等数学教程”（1958）；关肇直的“高等数学教程（第一卷）”（1959）；江泽坚的“数学分析”（1960）；北京大学、复旦大学、南京大学及高等数学教科书编审委员会的“高等数学教程”，我在此致谢．其他作为参考的外文书籍不在此一一列举了．

在写作的过程中，曾经有过一些努力，企图能更好地体现党对教学改革的方针，但是由于自己的理论和业务水平，没有能够较好地做到，读者可能发现一些其它书上所没有的材料，也可能发现一些稍有不同的处理方法，但毕竟是太少了．在谈到这一点的时候，感到空虚，并且诚恐会错误百出．大家所公认的、辗转传抄的已经成熟的材料，错误还有时难免，何况第一次写下来的东西，那更使人耽心了，但是还是斗胆地放进书里去，作为引玉之砖，作为试矢之的．特别是一些高的内容放低了，难的内容改易了，繁的内容化简了的部分更希望大家指正．但是我个人深信，只要每本书都有些章节改进，集腋成裘，我们教学改革会汇成巨流的，辛勤的点滴劳动，可能是大丰收的预兆．

大学教书不是照本讲，因此本书也准备了一些可教可不教的材料，教师们可以灵活掌握，余下的材料可以作为学有余力的同学的课外读物．习题应当做，并且适当地要多做些．本书没有组织好习题，希望老师们自己设法组织．习题的目的首先是熟练和巩固学习了的东西；其二是初步启发大家会灵活运用，独立思考；其三是融会贯通，出些综合性的习题把不同部门的数学沟通起来．

在教学过程中深得教学相长的益处，其中不少是由于同学所提意见的影响，我把所得到的一些不成熟的看法写在下面供同志们参考．我讲书喜欢埋些伏笔，把有些重要概念、重要方法尽可能早地在具体问题中提出，并且不止一次地提出．目的在于将来进一步学习的时候会较易接受高深的方法，很可能某些高深方法就是早已有之的朴素简单的方法的抽象加工而已．（有些深化了些，有些并没有深化而仅仅是另一形式而已．）我也喜欢生书熟讲，熟书生温的方法，似乎是在温熟书，但把新东西讲进去了，这是因为一般讲来，生书比旧课，真正原则性的添加并不太多的原故．找另一条线索把旧东西重新贯穿起来，这样的温习方法容易发现我们究竟有哪些主要环节没有懂透．有时分讲合温，或合讲分温，先把一个机器的零件一一搞清，再看全局，或先看全部机器的作用和目的，再分析要造成这个机器需要哪些零件而把条件一一讲明．“数”与“形”的“分”和“合”，“抽象”与“具体”的“分”与“合”都是在反复又反复的过程中不断提高的．同学也要求讲讲“人家怎样想出来的”，因而在讲书时也曾作过尝试，主观地推测一下，这很可能并不是原来的想法，但给出一条“这一步看下步并不难，连看几步就达到目的”的途径，作为同学们的参考．

以上一些肤浅的看法在讲课时都尝试过，但绝大部分写不下来，或者写下来就走了样，因此，同是一部书，可以多样讲，讲义作参考，结合同学的实际情况能灵活掌握才好．拉杂地写了这些意见，与其说是对教师讲的，还不如说是对同学（或自学的人）讲的．

总之，由于水平的限制，虽然黾勉从事，但缺点一定不少，我诚挚地希望读者们多提意见，更希望教师们多多指教.

最后，特别需要提起的是：由于中国科学院数学研究所党组织的支持，才使我有机会讲授基础课和编写讲义；在编写过程中，自始至终得到了中国共产党中国科学技术大学委员会的鼓励、关怀与支持，还给予了具体的帮助，这是我衷心感激的．有了党的鼓励、关怀与支持，使我这几年来敢于按照自己的一些肤浅的设想来进行教学的尝试，使我这几年来有勇气把第一次写下来的东西放到课堂上去教，使我这几年来能把这项工作坚持下来．至于中国科技大学教务处、数学系与数学教研室的同事们，在我从事这项工作的时候，一直给我方便与帮助，也在此表示感谢．对科学出版社的感谢，那就更应当在此一提了，他们花了大量的劳动，在制图、编辑加工、排版印刷、校对等方面都做了细致而深入的工作.

华 罗 庚

1962年6月11日

目　　　錄

第一章　实数与复数……………………………………………………1
§1.　有理数 ……………………………………………………1
§2.　无理数的存在 ……………………………………………………2
§3.　实数的描述 ……………………………………………………3
§4.　极限 ……………………………………………………6
§5.　Bolzano-Weierstrass 定理……………………………………………………9
§6.　复数的定义和矢量 ……………………………………………………12
§7.　极坐标及复数乘法 ……………………………………………………14
§8.　De Moivre 定理 ……………………………………………………16
§9.　复数的完备性 ……………………………………………………19
§10. 四元数簡介 ……………………………………………………20
补充:
§11. 二进位計算 ……………………………………………………22
§12. 循环小数 ……………………………………………………25
§13. 有理数接近实数 ……………………………………………………26
§14. 誤差 ……………………………………………………30
§15. 三、四次方程解法……………………………………………………34
第二章　矢量代数……………………………………………………39
§1.　空間坐标系及矢量的定义 ……………………………………………………39
§2.　矢量的加法 ……………………………………………………40
§3.　矢量的分解 ……………………………………………………41
§4.　內积(无向积,数性积)……………………………………………………42
§5.　矢量积(外积) ……………………………………………………43
§6.　多重积 ……………………………………………………45
§7.　坐标的变换 ……………………………………………………47
§8.　平面 ……………………………………………………49
§9.　空間直綫方程 ……………………………………………………51
补充:
§10. 球面三角的主要公式 ……………………………………………………52

§ 11. 对偶原则 …… 54
§ 12. 直角三角形与直边三角形的計算規則 …… 55
§ 13. 力,力系,等效力系 …… 58
§ 14. 平行力的合并 …… 59
§ 15. 力矩 …… 60
§ 16. 力偶 …… 60
§ 17. 力系的标准形式 …… 62
§ 18. 平衡方程及其应用 …… 63
第三章　函数与图形 …… 67
§ 1. 变量 …… 67
§ 2. 函数 …… 67
§ 3. 隐函数 …… 68
§ 4. 函数的图表法 …… 69
§ 5. 几个初等函数 …… 70
§ 6. 函数的一些簡单特性 …… 73
§ 7. 周期函数 …… 75
§ 8. 复变数函数表示举例 …… 76
§ 9. 迴归直綫 …… 77
§ 10. Lagrange 插入公式 …… 80
§ 11. Newton, Bessel, Stirling 插入公式 …… 82
§ 12. 經驗公式 …… 84
§ 13. 曲綫族 …… 90
第四章　极限 …… 92
§ 1. 貫的趋限情况 …… 92
§ 2. 貫的不趋限情况 …… 94
§ 3. 級数 …… 96
§ 4. 条件收斂的級数 …… 101
§ 5. 祖冲之計算圓周率的方法 …… 104
§ 6. Archimedes 求抛物形面积法 …… 105
§ 7. 旁压力的計算 …… 107
§ 8. 数 e …… 107
§ 9. 連續趋限 …… 110
§ 10. 几个重要极限 …… 112
§ 11. 一些例子 …… 113
§ 12. 无穷大之阶 …… 115

§ 13. 符号～, O 与 o …… 116
§ 14. 連續函数 …… 119
§ 15. 間断种种 …… 121
§ 16. 連續函数的一些基本性質 …… 122
§ 17. Heine-Borel 定理 …… 124
第五章　微分 …… 126
§ 1. 微商概念 …… 126
§ 2. 微商的几何意义 …… 127
§ 3. 函数的和、差、积、商的微商 …… 129
§ 4. 初等函数的微商 …… 129
§ 5. 复合函数的微商 …… 131
§ 6. 双曲函数 …… 134
§ 7. 微商的公式表 …… 136
§ 8. 例題 …… 137
§ 9. 微分 …… 142
§ 10. 誤差的估計 …… 143
§ 11. 高阶微商 …… 146
§ 12. Leibnitz 公式 …… 149
§ 13. 高阶微分 …… 151
§ 14. 函数的差分 …… 154
第六章　微商的应用 …… 156
§ 1. 曲綫的上升与下降 …… 156
§ 2. 极大与极小 …… 158
§ 3. Fermat 定理 …… 164
§ 4. 中值公式 …… 165
§ 5. 凸性、凹性与扭轉点 …… 169
§ 6. 漸近綫 …… 173
§ 7. 作图要点 …… 176
§ 8. 参变表示法的曲綫描图 …… 182
§ 9. 切綫,法綫,子切綫,子法綫 …… 183
§ 10. 积分公式 …… 186
§ 11. 隐函数的微分 …… 189
§ 12. $\frac{0}{0}$ 型的不定式 …… 192
§ 13. $\frac{\infty}{\infty}$ 型的不定式 …… 193

§14. 其他型的不定式 …… 196
第七章　函数的 Taylor 展开式 …… 199
§1. 多項式的 Taylor 公式 …… 199
§2. 函数的 Taylor 展开式 …… 200
§3. Taylor 級数的余項 …… 201
§4. e^x 的展开式 …… 204
§5. $\sin x$ 与 $\cos x$ 的展开式 …… 205
§6. 二項式展开式 …… 208
§7. $\log(1+x)$ 的展开式 …… 211
§8. $\operatorname{arc\,tg} x$ 的展开式 …… 213
§9. 冪級数，收斂半径 …… 215
§10. 冪級数的四則运算 …… 217
§11. 冪級数的微分与积分 …… 219
§12. 冪級数的唯一性定理及反函数 …… 220
§13. Kummer 判别法，Gauss 判别法 …… 221
§14. 超越几何級数 …… 223
§15. 用冪級数解微分方程 …… 229
第八章　方程的近似解 …… 235
§1. 引言 …… 235
§2. 图解法 …… 235
§3. 迭代法 …… 236
§4. 插值法 …… 240
§5. Newton 法 …… 241
§6. 联合法 …… 244
§7. 賈宪法 …… 245
§8. Лобачевский 法 …… 247
补充：
§9. 实数根的几个定理 …… 250
§10. Sturm 定理 …… 251
第九章　不定积分 …… 254
§1. 換变数法則 …… 254
§2. 分部积分法 …… 256
§3. 分項积分法 …… 259
§4. 有理分式的积分 …… 261
§5. М. В. Остроградский 方法 …… 263

§ 6. 某些含有根式的函数的积分 …… 265
§ 7. 求积分 $\int R(x, \sqrt{ax^2+bx+c})dx$ …… 268
§ 8. Abel 积分 …… 270
§ 9. 一些不能用已知函数表达的积分 …… 273
§ 10. 微分方程. 分离变量法 …… 274
§ 11. 换变数法 …… 276
§ 12. 积分因子法 …… 278
§ 13. 一阶綫性方程 …… 282
§ 14. 二阶綫性方程 …… 286
§ 15. 常系数綫性方程 …… 288
第十章 定积分 …… 291
§ 1. 求面积 …… 291
§ 2. 定积分的概念 …… 293
§ 3. 可积函数的性質 …… 296
§ 4. 定积分的基本性質 …… 297
§ 5. 中值公式及积分基本定理 …… 300
§ 6. 第二中值公式 …… 302
§ 7. 例子 …… 303
§ 8. 换变数公式 …… 306
§ 9. 分部积分 …… 310
§ 10. 瑕积分 …… 313
§ 11. 定积分的一些应用 …… 315
§ 12. 求定积分的特殊方法 …… 316
§ 13. 面积原理的应用 …… 321
§ 14. Euler 求和公式及 Euler 函数 …… 325
§ 15. 梯形法，矩形法与 Simpson 法 …… 328
索引一 …… 337
索引二 …… 341

第一章　实数与复数

§1. 有　理　数

数起源于“数”，一个一个地数，因而出现了

$$1, 2, 3, 4, 5, \cdots,$$

这叫做自然数.

用自然数来数物件，看来簡单，但是却包含了一些数学中經常用到的基本原则. 例如，一一对应的概念，先后次序的概念等等. 特别值得注意的是，这是数学中第一个用抽象符号来处理具体事物的例子. 拿任何实物做标准(如手指，算珠)，都有穷尽的可能，而自然数系却可以說明一切可以数得完的客观事物的件数.

但是，如果眞的要創造出无穷个符号来表达自然数，那不仅不方便而且也不可能. 这样就产生了計数法. 这方法是用有限个数字来表达一切自然数. 我們熟悉的是十进位的表达法，即逢十进一的方法. 左边的一算作右边一位的十，这样我們就有可能用

$$0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9$$

来表达一切自然数了.

人类大都是用十进位，可能是因为人有十个指头. 开始計数时是以指头做标准的. 实质上，符号用得最少的要算二进位，只要用 0 与 1 就可以表达出一切自然数来. 二进位就是逢二进一. 用二进位表示自然数貫，可以依次写成为

$$1, 10, 11, 100, 101, 110, 111, 1000, \cdots.$$

书写时二进位較长，例如，二进位的四位数字 1000 仅代表十进位的 8. 一般講来，一个数字用二进位的位数是用十进位的位数的三倍以上(約 3.3 倍).

这里我們只提一下自然数的两个基本的重要性質：

1) 如果有一批自然数都不大于一个給定的自然数，那末其中一定有一个最大的. 术語：在有上界的自然数集合中一定有一个最大的.

2) “一个有上界的自然数集合不能和它的眞子集合建立起一一对应的关系”. 这句术語講得似乎有些玄虛，实質上就是 n 个物件不能和少于 n 个物件成立一一对应的关系. 这样簡单的結果为什么还值得一提呢？因为这是有限集合的基本性質. 任何一个非有限集合都有可能和它的子集合一一对应. 例如，自然数的集合便可以和偶自然数的集合建立起一一对应来：

$$n \longleftrightarrow 2n.$$

仅有自然数，还远远不能滿足我們的需要. 我們有时需要分，但分不尽怎么办？因而

产生了分数 $\frac{a}{b}$，称为有理数. $\frac{a}{b}$ 就是 b 个人分 a 件东西，每个人应得的正确答案.

小数只不过是有固定分母的分数的另一种表达形式，它的分母只允許是 $10, 10^2, 10^3, \cdots$ 等等. 例如，

$$0.314 = \frac{3}{10} + \frac{1}{10^2} + \frac{4}{10^3}.$$

因为分母是特殊的，所以我們並不能把任何分数都表为有限小数. 例如，

$$\frac{1}{3} = 0.333\cdots$$

就是一个无穷小数. 但是我們知道，有理数的小数表达是有特殊形式的，就是所謂循环小数. 我們也知道，凡是循环小数都能表成有理数，特别需要注意的是循环小数

$$0.999\cdots$$

实質上代表1.

仅有有理数，还是不能满足我們客观上的需要. 我們有时要减，但不够减怎么办？很自然地就产生了負数.

到了这样的阶段，我們已經得到了正、負有理数. 这些数作为一个整体来講已經达到了某种意义的完备性，这种数的全体称为有理数域. 用一句行話来說，有理数域对四則运算自封；通俗一些說，任意二有理数的和、差、积、商（除数 $\neq 0$）仍然是有理数.

一般講有理数是指所有的正、負有理数，而整数是指 $0, \pm 1, \pm 2, \pm 3, \cdots$. 正整数就是自然数 $1, 2, 3, \cdots$.

任何两个有理数之間有无穷个有理数存在. 要証明这点，先証明两个有理数之間一定有一个有理数存在. 若 $\frac{a}{b} < \frac{a'}{b'}$，則显然有

$$\frac{a}{b} < \frac{a+a'}{b+b'} < \frac{a'}{b'}.$$

既然两个中間有一个，那末 $\frac{a}{b}$，$\frac{a+a'}{b+b'}$ 中間又至少有一个，等等. 这种做法可以无限制地继續下去，所以就証明了以上所說的話.

§2. 无理数的存在

上节中我們已經說明了在某种意义下有理数域有它的完备性，但是换一个角度来看，便又显示出它的不完备之处. 例如，最簡单的二次方程

$$x^2 = 2 \tag{1}$$

就沒有有理数解. 从几何方面說，連极簡单的几何图形的长度都无法用有理数表达出来. 边是单位长的正方形的对角綫的长度 $\sqrt{2}$ 就不是有理数.

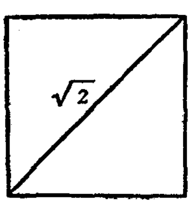

图 1

何以見得方程(1)沒有有理解？我們用反証法. 如果有一个既約

分数 $\frac{a}{b}$ 是(1)式的解，那末

$$a^2 = 2b^2.$$

右边是偶数，所以左边应当是偶数，故 a 是偶数. 令 $a = 2a'$，則得

$$2(a')^2 = b^2.$$

这又說明 b 应当是偶数. 这与 a/b 是既約分数的假定相矛盾，因此(1)式沒有有理解，也就是說 $\sqrt{2}$ 不是有理数. 虽然如此，直覚上我們对 $\sqrt{2}$ 并不是毫无所知. 首先，我們知道它是在 1 与 2 之間，計算得精确些，知道它是在 1.4 与 1.5 之間，1.41 与 1.42 之間，1.414 与 1.415 之間. 換言之，$\sqrt{2}$ 可用

$$2,\ 1.5,\ 1.42,\ 1.415,\ \cdots,\ a_n,\ \cdots,$$

$$1,\ 1.4,\ 1.41,\ 1.414,\ \cdots,\ b_n,\ \cdots$$

来无限逼近. 实际上，这样的过程也就定义了 $\sqrt{2}$，因为

$$a_n - b_n = \frac{1}{10^{n-1}},$$

也就是 $\sqrt{2}$ 与 a_n (及 b_n) 的誤差 $< \frac{1}{10^{n-1}}$. n 愈大，誤差也就愈接近于 0. 換言之，$\sqrt{2}$ 可以用 $\{a_n\}$ 从右边接近它，也可以用 $\{b_n\}$ 从左边接近它.

如果仅仅是为了 $\sqrt{2}$ 以及它对四則运算的完备性，我們可用如下的方法来解决問題. 对所有的整数 $a,\ b,\ c$，形如

$$\frac{a + b\sqrt{2}}{c}$$

的数是对四則运算自封的. 但是我們的目的在于使无限接近成为完全可能，所以我们采用其他的方法.

§3. 实数的描述

現在我們描述性地来說明实数.

我們作一条直綫，取其上一点作为原点，并取一个单位长. 依单位长一段一段地往右边接着量，便得出所有的自然数所对应的点. 由 0 点向左量，便得出負整数(图 2).

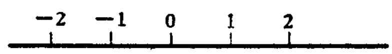

图 2

过 0 点作任一直綫(异于原直綫). 在其上取 B 点使 $0B = b$. 連单位点 A(即 $0A$ 的长是单位长)与 B，通过 $0B$ 直綫上的单位点 C 作平行于 AB 的綫交 $0A$ 于 D，則 $0D = \frac{1}{b}$ (图 3). 如此可以在直綫上表出所有的有理数.

从 0 点作一 45° 的角，取单位长得 A 点. 作 $0A$ 的垂綫交原直綫于 B. 在 x 直綫上这样作出的一段，它的长度是 $\sqrt{2}$(图 4).

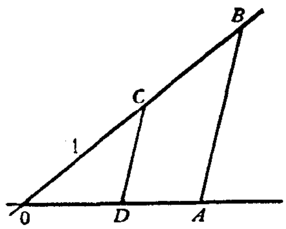

图 3

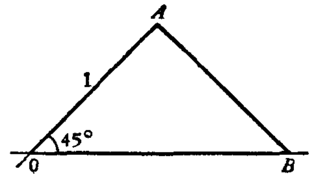

图 4

所以从几何来看，$\sqrt{2}$ 几乎是先験性地存在着的，也可以把 $\sqrt{2}$ 看作一点，它是可以用有理数点来无限接近的．說得形式化些，給出一个任意小的正数 ε，一定有一个有理数 r，使

$$|\sqrt{2}-r|<\varepsilon.$$

所有的实数都和 $\sqrt{2}$ 一样是直綫上的点；并且每一点也对应于一个实数．我們可以用以下的方法来描述一个实数 α：如果 α 所对应的点可以用有限位小数表达出来，那它是有理数．这我們已經定义好了．现在假定 α 不能用有限位小数表达出来，我們一定可以选出一个整数 $a_m\cdots a_1$，使

$$a_m\cdots a_1\leqslant\alpha<a_m\cdots a_1+1,\quad 0\leqslant a_v\leqslant 9 \tag{1}$$

（这也称为 Archimedes 公設）[1]．把区間(1)分成 10 份，α 一定落在其中之一．命

$$a_m\cdots a_1.b_1<\alpha<a_m\cdots a_1.b_1+0.1,\quad 0\leqslant b_1\leqslant 9; \tag{2}$$

再把(2)分成 10 份，α 又落在

$$a_m\cdots a_1.b_1b_2<\alpha<a_m\cdots a_1.b_1b_2+0.01,\quad 0\leqslant b_2\leqslant 9 \tag{3}$$

中．这样一步一步做下去，这手續給出有一个无穷小数

$$a_m\cdots a_1.b_1b_2\cdots b_l\cdots$$

它与实数 α 对应．

我們就用这个表达方法来定义实数．

正实数 α 是由无穷小数表示出来的：

$$\alpha=a_m\cdots a_1.b_1b_2b_3\cdots.$$

但是我們有个約定：如果 α 是有限小数，我們把最右的一个数字減 1，后面添上无穷个 9．例如，$\frac{1}{2}=0.4999\cdots$．

不同的表示代表不同的实数．

这样表示的几何意义是：α 是这样的一个数，它是由 $a_m\cdots a_1$，$a_m\cdots a_1.b_1$，$a_m\cdots a_1.b_1b_2$，$\cdots$ 等无限接近的．

正实数可以比大小．先对准小数点，小数点前位数多的就大．如果位数相等，那末我

1) Archimedes 公設是：給了两个綫段 a 与 b．如果 a 的长度比 b 的长度短，用 a 作为"尺"，量有限次一定能超过 b 的长度．

們就一个数字一个数字地从左往右比，首先出現較大数的便大．我們用 $\alpha \leqslant \beta$ 来代表 α 小于或等于 β．这样的大小概念有以下三个性質：

(i) 任給两个正实数，我們能够判断那个大那个小；

(ii) 如果 $\alpha \leqslant \beta$, $\beta \leqslant \alpha$, 則 $\alpha = \beta$;

(iii) 如果 $\alpha \leqslant \beta$, $\beta \leqslant \gamma$, 則 $\alpha \leqslant \gamma$.

我們定义两个实数的加法，就是对准了小数点一位对一位地相加，但必須注意必要的进位．說得更确切些，命这两个数各为

$$\alpha = a_m \cdots a_1 . b_1 b_2 \cdots,$$
$$\beta = a'_l \cdots a'_1 . b'_1 b'_2 \cdots.$$

如果从某一位起，两个数的尾巴每一位对应的数字加起来都是 9，卽有 N，当 $n > N$ 时，$b_n + b'_n = 9$，那末 $\alpha + \beta$ 就是 $a_m \cdots a_1 . b_1 b_2 \cdots b_N + a'_l \cdots a'_1 . b'_1 b'_2 \cdots b'_N$ 然后再添上无限个 9．不然，我們一定有无限个自然数 $n_1 < n_2 < n_3 < \cdots$，使

$$b_{n_\nu} + b'_{n_\nu} \neq 9, \quad (\nu = 1, 2, \cdots).$$

作

$$a_m \cdots a_1 . b_1 \cdots b_{n_\nu} + a'_l \cdots a'_1 . b'_1 \cdots b'_{n_\nu}.$$

取到 $n_\nu - 1$ 位小数，这就肯定了 $\alpha + \beta$ 到小数第 $n_\nu - 1$ 位． 一步一步做下去，我們可以肯定 $\alpha + \beta$ 的任何一位数字．

我們用定义逆运算的方法来定义减法，說得更确切些，假定 $\alpha > \beta$．如果从某一位开始，α 与 β 的尾巴完全相同，那就变为有限小数的减法． 如果不是如此，一定有无限个自然数 $n_1 < n_2 < n_3 < \cdots$，使

$$b_{n_\nu} \neq b'_{n_\nu}. \qquad (\nu = 1, 2, 3, \cdots)$$

作

$$a_m \cdots a_1 . b_1 \cdots b_{n_\nu} - a'_l \cdots a'_1 . b'_1 \cdots b'_{n_\nu}.$$

取到 $n_\nu - 1$ 位小数，这就肯定了 $\alpha - \beta$ 到小数第 $n_\nu - 1$ 位．一步一步做下去，我們就肯定了 $\alpha - \beta$ 的任何一位数字．由减法可以引出負实数． 極易看出 (i), (ii), (iii) 对所有的实数(不論正与負)都对．

对一实数 α 我們定义它的絕对值：

$$|\alpha| = \begin{cases} \alpha, & \text{如果 } \alpha \geqslant 0, \\ -\alpha, & \text{如果 } \alpha < 0. \end{cases}$$

不难証明我們有不等式

$$|\alpha + \beta| \leqslant |\alpha| + |\beta|.$$

在此式中用 $\beta = \gamma - \alpha$ 代之，可得

$$|\gamma| \leqslant |\alpha| + |\gamma - \alpha|.$$

所以

$$|\gamma - \alpha| \geqslant \big||\gamma| - |\alpha|\big|.$$

§4. 极　限

极限这一个概念在中学里学习循环小数时已經介紹过了．我国古代早就有了这一概念的萌芽．"一尺之棰，日取其半，万世不竭"就是极限的看法．这句話的意义是一尺长的一根木棒，第一天拿掉一半，当然还留下1/2尺；第二天取留下的一半，还留下原来的1/4；第三天剩下 $\frac{1}{8}=\frac{1}{2^3}$，…，第 n 天剩下了 $\frac{1}{2^n}$ 尺．当 n 大时，$\frac{1}{2^n}$ 虽小，但并不是0．这就是万年不竭的道理．我們用符号

$$\lim_{n\to\infty}\frac{1}{2^n}=0$$

来代表这一事实．它的讀法是：当 n 趋向无穷时，$\frac{1}{2^n}$ 接近于0．数学中也常用以下的說法：任意給一个很小的正数 $\varepsilon>0$，一定可以选择一个自然数 N，使当 $n>N$ 时，常有

$$0<\frac{1}{2^n}<\varepsilon.$$

（在現在这个情况中，N 是可以具体算出的，它就是一个大于 $\log_{10}\frac{1}{\varepsilon}\Big/\log_{10}2$ 的自然数）

現在我們一般地来定义极限．

定义． 对于一个实数貫（有时也称为叙列）

$$\alpha_1,\ \alpha_2,\ \cdots,\ \alpha_n,\ \cdots.$$

如果 α 是一个实数且有以下的性質，我們就称 α 是以上数貫的极限，或称貫 α_n 收斂于 α：任給一个正数 $\varepsilon>0$，必有一个自然数 N 存在，使当 $n>N$ 时，

$$|\alpha_n-\alpha|<\varepsilon.$$

我們用符号

$$\lim_{n\to\infty}\alpha_n=\alpha$$

来代表．

不难証明

$$\lim_{n\to\infty}(\alpha_n\pm\beta_n)=\lim_{n\to\infty}\alpha_n\pm\lim_{n\to\infty}\beta_n.$$

例1．数貫

$$0.3,\ 0.33,\ 0.333,\ \cdots$$

以 $\frac{1}{3}$ 为其极限．

例2．数貫

$$0.9,\ 0.39,\ 0.339,\ 0.3339,\ \cdots$$

也以 $\frac{1}{3}$ 为其极限．

例3．数貫

$$0.3,\ 0.9,\ 0.33,\ 0.39,\ 0.333,\ 0.339,\ \cdots$$