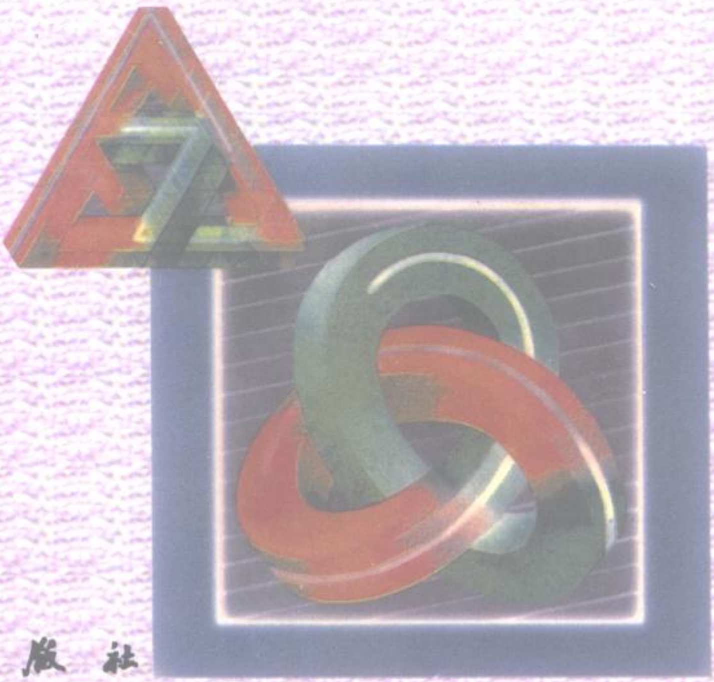
现代数学基础丛书

半群的S-系理论

●刘仲奎 著



学出版社

现代数学基础丛书

半群的 S-系理论

刘仲奎 著

科学出版社

1999

DV70/117

内容简介

本书介绍半群S-系理论的基础知识及最新研究成果. 全书共分七章：第一章是必要的概念及准备，第二、三两章分别讨论投射系和内射系，第四、五、六章讨论和平坦性有关的问题，第七章讨论正则系.

本书力求简明扼要，可作为数学专业研究生的教材，也可作为数学研究工作者的参考用书.

图书在版编目（CIP）数据

半群的S-系理论/刘仲奎著. -北京：科学出版社，1999. 2

（现代数学基础丛书/程民德主编）

ISBN 7-03-006936-6

Ⅰ. 半… Ⅱ. ①刘… Ⅲ. 半群 Ⅳ. 0152. 7

中国版本图书馆 CIP 数据核字（98）第 23369 号

科学出版社出版

北京东黄城根北街 16 号

邮政编码：100717

北京双青印刷厂印刷

新华书店北京发行所发行　各地新华书店经售

*

1999 年 2 月第 一 版　开本：850×1168 1/32

1999 年 2 月第一次印刷　印张：10 3/8

印数：1—2 000　字数：268 000

定价：21.00 元

（如有印装质量问题，我社负责调换〈环伟〉）

本书的出版和所论课题的研究工作得到以下基金的资助：

国家自然科学基金（19501007和19671063）

甘肃省自然科学基金（ZQ-86-11）

甘肃省教委重点学科基金

西北师范大学皇台学术著作出版基金

甘肃省高等学校青年教师成才奖奖励科研基金

序

与半格，半环，半模，半域诸理论之于格论，环论，模论，域论不同，半群理论，以其特有的研究对象、研究课题和研究方法，早已独立于群论之外．至于在《Mathematical Reviews》的“Mathematics Subject Classification”里，半群的分类编号 20M 属于群的分类编号 20，则是历史造成的习惯上的一种沿用．

在数学史上，“半群”的研究虽可追溯到 1904 年，但其系统的研究却始于 50 年代初，可谓是比较年轻的代数学科．但是，由于许多分析学科和代数学科中各类半群的广泛应用，以及计算机科学，非线性动力系统复杂性理论等数学外部学科对它的巨大推动，至今，已成为基础代数学的一个重要的分支学科．60 年代由 A. H. Clifford 和 G. B. Preston 合著的两卷《半群代数理论》已被公认为国际数学经典著作；70 年代创刊由德国 Springer-Verlag 出版的《Semigroup Forum》是半群理论的一个重要的国际性专门刊物；杂志《Journal of Algebra》和《Communications in Algebra》的编委里有著名半群专家 T. E. Hall 和 J. M. Howie；许多数学家在世界各地开展半群（代数的，序的和拓扑的）理论的专门研究和各层次高级人才的培养（直至博士后）；近 20 年来，几乎每年都举办半群的国际会议．这一切充分说明这样一个事实：半群研究方兴未艾．

半群的 S-系理论是半群代数理论的一个重要部分．该理论其思想部分地来自于群的群作用方法，部分地来自于环的模论方法．将半群的内部特征与由某种类型的 S-系所构

成的“外部环境”联系起来，形成了半群代数理论研究中的一个重要方法，而这一方法的深入开发自然又形成半群理论的一个重要课题．这个课题，由于大量系统的和深刻的研究成果的出现，已引起了越来越多的关注和研究．Renshaw 从 1986 年到 1991 年利用 S-系方法对半群的融合问题的出色工作，说明这一理论方法在半群代数理论中的应用领域已相当宽广．

国内从 80 年代后期就有我们自己培养的博士进入到这一有着良好发展态势与前景的领域进行研究工作．宋光天博士和刘仲奎博士在这一领域的研究中已获到了一批得到国际上该领域的权威人士认可和好评的研究成果．他们的工作已被国际同行大量引用，从而推动了国内关于该领域研究工作的进一步开展．

刘仲奎博士的专著《半群的 S-系理论》重点介绍了他本人近年的研究工作及国际上这一领域的最新研究成果．该书选题新颖，内容翔实，所述问题大多数是 80 年代后期及 90 年代该领域研究中的热点问题，是第一部关于半群 S-系理论的专著．

作为一个半群与组合半群工作者，我很高兴能为该书作序．相信该书的出版将有利于推动这一领域的研究在国内的发展．

郭聿琦

1998.4.25.

前　言

半群代数理论是本世纪 50 到 60 年代发展起来的一个崭新的代数学分支，它在自动机理论、计算机科学、组合数学、代数表示论、算子代数和概率论等方面都有广泛的应用，因此引起了越来越多的数学家的重视. 对半群的研究方法大体上可分为两种，其一为从半群的内部构件如理想、同余以及特殊元素等出发研究半群的结构与特征；其二为从半群的外部环境如同余格、S -系范畴等出发研究半群的内部特征. 把半群作用在集合上，就得到 S -系，不同的半群可得到不同的 S -系. 利用 S -系的性质把握半群的特征，是本书的主要思想.

半群的 S -系理论其思想部分来自于群的群作用方法，部分来自于环的模论方法. 众所周知，当半群是群时，半群作用即为群作用，它的重要结论之一就是经典的 Sylow 定理. 作为群作用轨道分解的推广，每个 S -系可唯一地分解为不可分 S -系的不交并. 当半群作用在特殊的集合——Abel 群上时，S -系事实上就是整数环上半群环的模. 当 S 是某个环的乘法半群时，S 作用在 Abel 群上在满足必要的条件时即成为环上的模. 半群作用的这几个层次的共同特点，就是将半群的“内部特征”和半群的由作用效果即 S -系范畴所反映的“外部环境”联系起来，即半群具有什么样的“内部特征”当且仅当它具有什么样的作用效果. 事实证明，这种方法可带来单纯的内部刻画方法无法获得的结果，正在国际上受到越来越多的重视.

著者及其一些同事从 80 年代后期在郭聿琦教授的指导

下进入这一领域开展研究工作，获得了一批得到了国际上这一领域的权威人士认可和好评的研究成果，并两次得到国家自然科学基金的资助．著者在多年的研究工作及研究生培养工作中，深感出版一本该领域专著的必要性．为了让国内数学界有更多的人投入到这一有着良好发展前景的课题的研究中，同时也为了系统介绍我们自己的研究工作，特撰写出版本书．

本书是根据著者三年来开设的研究生课程《半群的 S-系理论》的讲稿改写而成．全书共分七章．第一章是必要的概念及准备，第二、三章分别讨论 S-系的投射性与内射性，第四、五、六章讨论和平坦性相关的问题，第七章讨论 S-系的正则性．虽然我们使用和环的模理论中相同的名词如投射性、内射性、平坦性等，但和环的模理论相比，半群的 S-系理论内容更加丰富，问题更加困难．例如对应于平坦模的概念，在 S-系范畴中有平坦，强平坦，弱平坦，均衡平坦，条件（P），条件（E）等互不相同的概念．本书除介绍 S-系理论的基础知识以外，侧重于介绍著者本人的工作及国际上最新研究成果，使得读者可通过本书接触到前沿的工作．

由于时间仓促，我们十分遗憾这一领域中许多很有意义且十分优美的成果未能写入本书，例如 J. Renshaw 关于半群融合理论的工作以及 V. Gould 关于 S-系的纯性的工作．不过有了本书所讲述的基础知识，读者阅读有关文献基本上不再有困难．

本书中我们尽量使用通用记号．定理 4.3.7 表示第四章第三节中的定理 7，而定理 3.7 表示本章第三节中的定理 7.

受水平所限，书中错误难免且取材可能不当，敬请读者批评指正．

著者衷心感谢导师熊全淹教授和郭聿琦教授多年来的指导、帮助与鼓励，同时还要感谢香港中文大学的 K. P. Shum 教授、加拿大 Wilfrid Laurier 大学的 S. Bulman-

Fleming 教授和德国 Oldenburg 大学的 U. Knauer 教授对我们工作的支持与鼓励，也感谢西北师范大学数学系的马勤生先生对本书所做的精致编排和大力支持，由于他们的大力协助才使本书得以尽早面世.

刘仲奎

1997.5.8.

目　　录

第一章　基本概念

§1　S-系

设 S 是幺半群，1 为其单位元，A 是非空集合. 若有 $S\times A$ 到 A 的映射 $f:S\times A\to A$ 满足

$$f(t,f(s,a))=f(ts,a),\quad \forall\, t,s\in S,\forall\, a\in A,$$

则称 (A,f) 是左 S- 系，或称 S 左作用于 A 上. 为了方便起见，我们记 $f(s,a)=sa$，于是上式变为

$$t(sa)=(ts)a,\quad \forall\, t,s\in S,\forall\, a\in A.$$

此时，左 S- 系 (A,f) 简记为 ${}_SA$ 或 A.

如果 A 还满足

$$1a=a,\quad \forall\, a\in A,$$

则称 A 是单式左 S- 系. 我们以下除特殊声明以外，S- 系均指单式左 S- 系.

同样的方法可以定义右 S- 系.

设 A 是 S- 系，B 是 A 的非空子集合. 若对任意 $b\in B$，任意 $s\in S$，都有 $sb\in B$，则称 B 是 A 的子系，记为 $B\leqslant A$.

显然 $A\leqslant A$. 若 S 中含有零元 0，则对于任意 $a\in A$，$\{0a\}\leqslant A$.

下面的命题是不证自明的.

命题 1.1　S- 系 A 的任意多个子系的交若非空，则仍为子系.

设 M 是 S- 系 A 的非空子集合，则 A 的包含 M 的最小子系是所有包含 M 的子系之交，称为由 M 生成的子系，记为 $\langle M\rangle$，M 称为子系 $\langle M\rangle$ 的生成集. 显然有

$$\langle M\rangle = \{sm \mid s \in S, m \in M\}.$$

若我们记 $Sm = \{sm \mid s \in S\}$,则有

$$\langle M\rangle = \bigcup_{m\in M} Sm.$$

若 $M = \{m_1, \cdots, m_n\}$ 为有限集合,则称 $\langle M\rangle = Sm_1 \cup \cdots \cup Sm_n$ 为有限生成子系.特别地,由一个元素 m 生成的子系 Sm 称为循环子系.若 A 可由一个(有限个)元素生成,则称 A 是循环(有限生成)系.例如,对于任意 $s \in S$,S 的主左理想 Ss 即为 S- 系 S 的循环子系,特别地 S 为循环 S- 系.

设 λ 是 S- 系 A 上的等价关系,若 λ 满足

$$(a,b) \in \lambda \Rightarrow (sa,sb) \in \lambda, \quad \forall\, s \in S, \forall\, a,b \in A,$$

则称 λ 为 A 上的同余.在 A 关于同余 λ 的商集 A/λ 上定义左 S- 作用:

$$s(a\lambda) = (sa)\lambda, \quad \forall\, s \in S, \forall\, a \in A,$$

则容易验证 A/λ 关于上述左 S- 作用构成一个 S- 系,称为 A 关于 λ 的商系.

设 $B \leqslant A$,如下定义 A 上的关系:

$$a\lambda_B b \Leftrightarrow a = b \text{ 或 } a,b \in B.$$

容易验证 λ_B 是 A 上的同余,称其为由 B 决定的 Rees 同余,简称为 Rees 同余.称商系 A/λ_B 为 Rees 商.

类似于子系的生成集概念,我们也可以考虑同余的生成集.首先,下面的命题是明显的.

命题 1.2 S- 系 A 上的任意多个同余的交仍为同余.

设 H 为 $A \times A$ 的非空子集合,则 A 上的包含 H 的最小同余是所有包含 H 的同余之交,称为由 H 生成的同余,记为 $\lambda(H)$. H 称为同余 $\lambda(H)$ 的生成集.显然生成集是不唯一的.

命题 1.3 设 H 是 $A \times A$ 的非空子集合,$a,b \in A$,则 $a\lambda(H)b$ 当且仅当 $a = b$ 或者存在 $t_1, \cdots, t_n \in S$,使得

$$a = t_1c_1, t_1d_1 = t_2c_2, \cdots, t_{n-1}d_{n-1} = t_nc_n, t_nd_n = b,$$

其中 $(c_i,d_i) \in H$ 或 $(d_i,c_i) \in H$, $i = 1,2,\cdots,n$.

证明 在 A 上定义如下关系 σ:

$$
\begin{aligned}
a\sigma b \Leftrightarrow a = b, &\text{或者存在 } t_1,\cdots,t_n \in S,\\
&\text{使得 } a = t_1c_1, t_1d_1 = t_2c_2,\cdots,\\
&t_{n-1}d_{n-1} = t_nc_n, t_nd_n = b, \text{其中}\\
&(c_i,d_i) \in H \text{ 或} (d_i,c_i) \in H,\\
&i = 1,\cdots,n.
\end{aligned}
$$

容易验证 σ 是 A 上的同余关系，且 $H \subseteq \sigma$. 设 λ 是 A 上的同余且 $H \subseteq \lambda$，则对于任意 $(a,b) \in \sigma$，有 $a = b$，或者

$$a = t_1c_1\lambda t_1d_1 = t_2c_2\lambda t_2d_2 = \cdots\lambda t_{n-1}d_{n-1} = t_nc_n\lambda t_nd_n = b.$$

所以 $\sigma \subseteq \lambda$. 即 σ 是 A 上包含 H 的最小同余. 根据定义即有 $\sigma = \lambda(H)$. 结论得证. //

设 A,B 都是 S-系. 称映射 $f:A \to B$ 为从 A 到 B 的 S-同态，如果

$$f(sa) = sf(a), \quad \forall\, s \in S, \forall\, a \in A.$$

例如，设 λ 是 A 上的同余，令 $B = A/\lambda$，则自然的映射

$$\lambda^{\#}: A \to B,$$
$$a \mapsto a\lambda$$

即为从 A 到 B 的 S-同态.

从 A 到 B 的所有 S-同态的集合记为 $\mathrm{Hom}_S(A,B)$ 或 $\mathrm{Hom}(A,B)$. 若 S-同态 $f:A \to B$ 还是单、满映射，则称 f 为同构. 这时也说 S-系 A 和 B 同构，记为 $A \simeq B$.

设 $f:A \to B$ 是 S-同态. 称集合

$$\{(a,a') \in A \times A \mid f(a) = f(a')\}$$

为 f 的核，记为 $\mathrm{Ker}f$. 显然有

命题 1.4 任意 S-同态 $f:A \to B$ 的核 $\mathrm{Ker}f$ 是 A 上的同余. S-满同态 f 为同构当且仅当 $\mathrm{Ker}f$ 是 A 上的单位同余.

定理 1.5(同态基本定理) 设 $f:A \to B$ 是 S-同态，λ 是 A 上的同余且 $\lambda \subseteq \mathrm{Ker}f$，则存在唯一同态 $g:A/\lambda \to B$ 使得下图可换:

$$\begin{tikzcd}
A \arrow[r, "f"] \arrow[d, "\lambda^{\#}"'] & B \\
A/\lambda \arrow[ur, "g"] &
\end{tikzcd}$$

若 $\lambda = \mathrm{Ker}f$,则 g 是单同态. 若 f 还是满同态,则 g 也是满同态. 特别地当 f 是满同态时有

$$A/\mathrm{Ker}f \simeq B.$$

证明 若 $(a,a') \in \lambda$,则 $(a,a') \in \mathrm{Ker}f$,因此有 $f(a) = f(a')$. 所以我们可以如下定义映射 $g: A/\lambda \to B$:

$$g(a\lambda) = f(a), \quad \forall\, a \in A.$$

容易证明 g 还是 S- 同态,且使得上图可换.

设 $g': A/\lambda \to B$ 也满足 $g'\lambda^{\#} = f$,则对任意 $a\lambda \in A/\lambda$,$g'(a\lambda) = g'\lambda^{\#}(a) = f(a) = g\lambda^{\#}(a) = g(a\lambda)$,所以 $g' = g$.

设 $\lambda = \mathrm{Ker}f$,则 $g(a\lambda) = g(a'\lambda) \Rightarrow f(a) = f(a') \Rightarrow (a,a') \in \mathrm{Ker}f = \lambda \Rightarrow a\lambda = a'\lambda$. 即 g 是单同态.

若 f 是满同态,则显然 g 也是满同态. 从已证的结果立即可得 $A/\mathrm{Ker}f \simeq B$. //

推论 1.6 设 λ,σ 是 A 上的同余且 $\lambda \subseteq \sigma$,则有 S- 系的同构式

$$A/\lambda\big/\sigma/\lambda \simeq A/\sigma,$$

其中 $\sigma/\lambda = \{(a\lambda, b\lambda) \mid (a,b) \in \sigma\}$.

证明 定义 S- 同态 $f: A/\lambda \to A/\sigma$ 为 $f(a\lambda) = a\sigma$,则 $\mathrm{Ker}f = \sigma/\lambda$. 由定理 1.5 即得结论. //

设 S,T 都是幺半群,若 A 既是左 S- 系,又是右 T- 系,且对任意 $a \in A$,任意 $s \in S$,任意 $t \in T$,有

$$(sa)t = s(at),$$

则称 A 是左 S- 右 T- 系,记为 ${}_SA_T$. 例如 S 是左 S- 右 S- 系. 若 A 是左 S- 系,H 是 A 的自同态幺半群,则 A 是左 S- 右 H- 系(约定 $f \in H$ 作用在 $a \in A$ 上的结果为 $(a)f$).

§2 直积 余直积

所有左 S- 系以及左 S- 系之间的 S- 同态构成一个范畴，称为左 S- 系范畴，记为 S-Act. 同样，所有右 S- 系以及右 S- 系之间的 S- 同态构成一个范畴，称为右 S- 系范畴，记为 Act-S. 本节考虑范畴 S-Act 中的直积和余直积. 我们先从一般的定义开始.

设$\mathbb{C}$是范畴，$\{A_i \mid i \in I\}$ 是$\mathbb{C}$中的一簇对象. $\mathbb{C}$中的对象 A 叫做 $\{A_i \mid i \in I\}$ 的直积，如果

(1) 对任意 $i \in I$，存在态射 $\pi_i: A \to A_i$；

(2) 对任意对象 $W \in \mathbb{C}$，若存在态射 $\varphi_i: W \to A_i, i \in I$，则存在唯一态射 $\varphi: W \to A$ 使得下图可换：

$$\begin{tikzcd}
W \arrow[r, "\varphi"] \arrow[dr, "\varphi_i"'] & A \arrow[d, "\pi_i"] \\
 & A_i
\end{tikzcd}$$

对偶地可定义余直积. $\mathbb{C}$ 中的对象 C 叫做$\{A_i \mid i \in I\}$ 的余直积，如果

(1) 对任意 $i \in I$，存在态射 $\varepsilon_i: A_i \to C$；

(2) 对任意对象 $W \in \mathbb{C}$，若存在态射 $\psi_i: A_i \to W, i \in I$，则存在唯一态射 $\psi: C \to W$ 使得下图可换：

$$\begin{tikzcd}
A_i \arrow[d, "\varepsilon_i"'] \arrow[dr, "\psi_i"] & \\
C \arrow[r, "\psi"] & W
\end{tikzcd}$$

对于给定的一簇对象 $\{A_i \mid i \in I\}$，容易证明其直积和余直积