

1102

5009

U661.4

IV 93

論平面板架失穩時纵桁的 附連翼板

吳 士 冲

九 〇 八 部 队

中 国 人 民 解 放 軍 总 字 908 部 队

1964.8.



論平面板架失穩時縱桁的附連翼板

提 要

在船舶上常遇到有縱桁加強的甲板板架。在現有的這類板架的穩性計算方法〔3〕中，它被看作交叉樑系（各帶自身附連翼板的橫樑，縱樑和縱桁），但縱桁的附連翼板問題尚未得到解決，這使對這類板架的穩定性的正確計算發生困難。

本文把板架拆開為面板（甲板板）和樑材（不帶附連翼板）來研究。建立了面板和樑材的共同彎曲方程和求得了板架穩定性的精確解。文中又在忽略某些物理量的基礎上制定了近似解法，把有縱桁加強的板架穩定問題歸結為有彈性防撓材加強的正交異性板的穩定問題，然後又進一步把這問題化成交叉樑系的穩定問題，並得出根據給定板架和其各物件的尺度確定縱桁附連翼板和縱桁（帶附連翼板）剖面慣性矩的公式。用精確解和近似解計算了一系列板架，結果証實了後者的足夠精確性。

文中最後給出了二種重要類型板架縱桁（帶附連翼板）剖面慣性矩計算公式和相應的圖表。公式形式簡單，使用方便。

（一）緒 言

甲板一般承受不大的橫荷重，但作為船樑的上翼板要受到很大的縱向壓縮荷重，因而保證穩定性是甲板結構設計中最主要問題之一。

為了提高穩定性，中型以上軍艦的甲板一般都採取縱骨架式，並且常設置加強縱樑（縱桁）；在大型民用船舶上，近年來這種結構形式亦得到廣泛的應用。

甲板是由板和加強樑材組成的結構，即為板架。在制定板架的穩定

0244/52

性計算方法時，一般都把它看作交叉樑系。И. Г. 布勃諾夫〔1〕和И. Ф. 伯潑考維奇〔2〕，А. А. 庫爾求莫夫研究了同方向彎一樣時的交叉樑系的穩定性。А. А. 庫爾求莫夫〔3〕還研究了有加強縱樑（縱桁）的情況。

為了把板架作為交叉樑系來計算，就必須解決樑的附連翼板問題。

И. Ф. 伯潑考維奇〔4〕詳細地研究了彎曲問題中樑的附連翼板。J. M. 克里切夫〔5〕和И. Я. 列士尼茲基〔6〕把И. Ф. 伯潑考維奇的解推廣到穩定問題。但這些研究只限於單獨的樑和作筒形彎曲的板架。А. А. 庫爾求莫夫〔7〕提出了板架的周界比有限和受不同樑材加强的情況下的附連翼板問題。他把板架拆為面板和樑材，分別列出描述它們工作的方程，然後用聯結條件把它們聯繫起來。這種較精確的處理方法為研究板和樑的共同工作提供了基礎。

縱桁的附連翼板問題是А. А. 庫爾求莫夫〔3〕首先提出的，但他僅提出了一個確定縱桁慣性矩的暫用方法*，而沒有加以分析和解決。這方法的唯一依據是，當縱桁和縱樑尺度相同時用此法計算不會得到矛盾的結果，而用於實際結構（縱桁總是大于縱樑）是缺乏根據的。

*取縱桁附連翼板寬度等於縱桁間距，但不得大于失穩半波長的四分之一。縱桁慣性矩 I_K 由下面公式決定：

$$I_K = I_K^0 - \sum I_1$$

式中 I_K^0 — 帶上述翼板（包含縱樑）的剖面的慣性矩；

$\sum I_1$ — 翼板內縱樑（帶本身附連翼板）慣性矩之和。

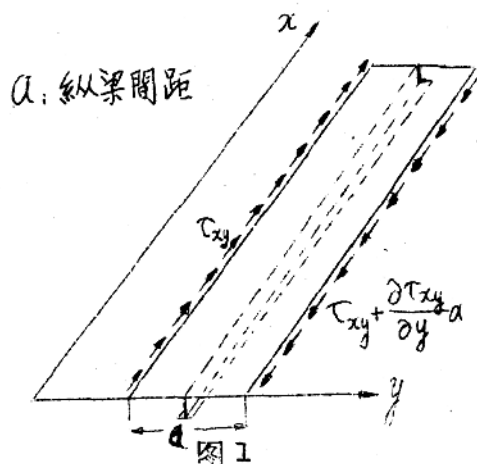


图 1

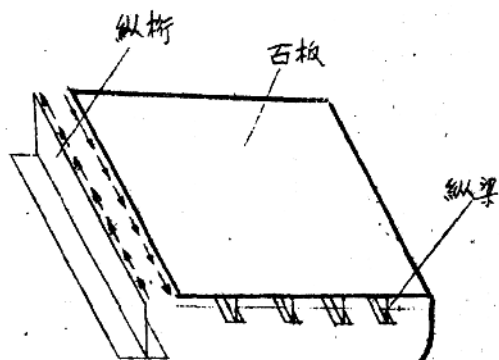


图 2

在把板架看作交叉樑系时，假想沿着纵樑间距中点作剖面，並假設沿着此剖面的切力可以忽略不計。而实际上由于在板架失穩时沿着纵桁腹板和板架面板相接的边发生切力，必定会引起纵樑間的上述剖面內的切力，引起了纵樑的复杂弯曲（图 1），从而导致整个板架的复杂弯曲。对此现象也可作如下解釋：由于沿着纵桁腹板和板架面板相接的边的切力不在板架横剖面的中和軸平面內（图 2），从而要引起板架的复杂弯曲。在考虑这一因素时就不能把板架看作交叉樑系了。因此必須弄清楚这因素对板架稳定性的影响。

和纵桁腹板相連的板架面板与纵樑联在一起，它同时既是纵桁的翼板，又是纵樑的翼板。完全不清楚，纵桁和纵樑怎样相互作用，以及在确定纵桁的断面惯性矩时应如何考虑纵樑。

在實踐中可能設置若干加强纵樑（纵桁）来代替加大所有纵樑的措施。这些加强纵樑（纵桁）的尺度和普通纵樑尺度相比时並不非常大。由于沒有纵桁附連翼板問題的解不可能判断这种結構措施的合理性。

本文的任务就是研究纵桁附連翼板問題，並力求得到便于实用的解答。

(二) 板架失稳时面板和樑材共同弯曲方程的建立及其精确解

在本节 1 中利用緒言中提到的 A. A 庫尔求莫夫方法导出面板和樑材共同弯曲的方程。这些方程是足够精确的。在 2 和 3 中对此方程进行了积分，并使一般解满足相应的边界条件，得到计算板架稳定性所需的全部公式，在应用这些公式时不需附連翼板概念。本节中得到的精确解将被用来校核下一节中簡化的近似解。

1. 面板和樑材的共同弯曲方程

研究受均匀分佈压缩力作用的板架的稳定。設板架內同一方向的樑一样，且数目很多（图 3）。

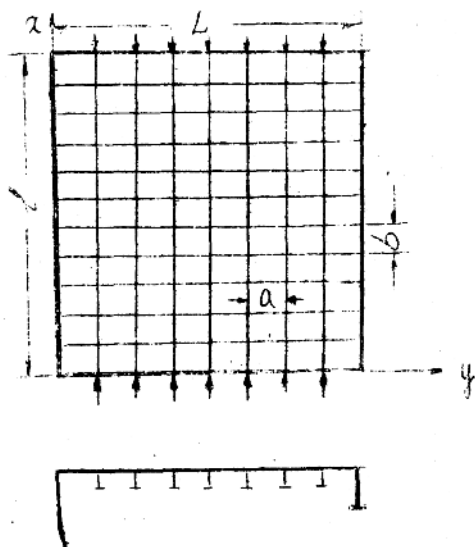


图 3

把板架拆开为面板和樑材（不带附連翼板）

假設：

(1) 面板沒有初撓度，並且不在樑材間喪失穩定性；

(2) 面板适用平板的綫性弯曲理論和平面应力状态方程，即面板弯曲

和面板中面应力間的相互影响可以忽略（我們所研究的是板架穩定，而不是失穩后的工作情况。在穩定性問題中要分析的是小撓度屈曲，因而沒有必要考虑这影响）；

(3) 对梁材（不帶附連翼板）适用平断面假設；

(4) 梁材的扭轉剛度可以忽略（已有的研究〔8〕，〔9〕表明，对于一般甲板板架來說梁材扭轉剛度对板架穩定性的影响是极小的）。

在梁材的数目很多时可以认为梁材（不帶附連翼板）和板架面板的相互作用力沿着板架的整个平面是連續分佈的。面板的复杂弯曲方程式可以写成下面的形式：

$$D \nabla^2 \nabla^2 w + \sigma h \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} = \frac{-r_1}{a} - \frac{r_2}{b} \quad (1)$$

式中

w —— 面板的撓度，即板架的撓度；

D —— 面板的筒形剛度；

σ —— 压应力；

h —— 面板厚度；

r_1 —— 面板和縱樑間法向作用力的强度（力/长度）

r_2 —— 面板和橫樑間法向作用力的强度（力/长度）

由縱、橫樑的复杂弯曲方程得到：

$$r_1 = E i_1 \frac{\partial^4 w}{\partial x^4} + \sigma f_1 \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} - \frac{\partial q_1}{\partial x} e_1 \quad (2)$$

$$r_2 = E i_2 \frac{\partial^4 w}{\partial y^4} - \frac{\partial q_2}{\partial y} e_2, \quad (3)$$

式中

q_1 —— 縱樑和面板間切向作用力的強度 (力/長度)

q_2 —— 橫樑和面板間切向作用力的強度 (力/長度)

f_1, i_1, e_1 —— 相應為縱樑 (不帶附連翼板) 的斷面面積, 斷面慣性矩和斷面重心到面板中面的距離;

i_2, e_2 —— 相應為橫樑 (不帶附連翼板) 的斷面慣性矩和斷面重心到面板中面的距離。

E —— 拉壓彈性模數。

把(2), (3)代入(1)后得到:

$$E i_1 b \frac{\partial^4 w}{\partial x^4} + E i_2 a \frac{\partial^4 w}{\partial y^4} + a b \nabla^2 \nabla^2 w +$$

$$+ 6 b (f_1 + a h) \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} = \frac{\partial q_1}{\partial x} e_1 b + \frac{\partial q_2}{\partial y} e_2 a \quad (4)$$

以体积力 $X = \frac{q_1}{a h}$, $Y = \frac{q_2}{b h}$ 来代替切力 q_1, q_2 的作用。面板中

面的应力状态平衡方程式可以写成下面的形式:

$$\left. \begin{aligned} \frac{\partial \sigma_x}{\partial x} + \frac{\partial \tau_{xy}}{\partial y} + \frac{1}{a h} \frac{\partial Q_1}{\partial x} &= 0; \\ \frac{\partial \tau_{xy}}{\partial x} + \frac{\partial \sigma_y}{\partial y} + \frac{1}{b h} \frac{\partial Q_2}{\partial y} &= 0, \end{aligned} \right\} \quad (5)$$

式中

$$Q_1 = \int_0^x q_1 dx;$$

$$Q_2 = \int_0^y q_2 dy ;$$

$\sigma_x, \sigma_y, \tau_{xy}$ —— 面板中面內由于板架喪失穩定性而产生的法向和切向附加应力。

方程組(5)的解可以表示为下列形式：

$$\left. \begin{aligned} \sigma_x &= \frac{\partial^2 \varphi}{\partial y^2} - \frac{Q_1}{ah} ; \\ \sigma_y &= \frac{\partial^2 \varphi}{\partial x^2} - \frac{Q_2}{bh} ; \\ \tau_{xy} &= -\frac{\partial^2 \varphi}{\partial x \partial y} \end{aligned} \right\} \quad (6)$$

式中 φ —— 应力函数，由面板中面的变形連續条件来决定。应用平面应力状态下的虎克定律及关系式(6)可以把这一条件写成下面的形式：

$$\nabla^2 \nabla^2 \varphi = \frac{1}{ah} \left(\frac{\partial^2 Q_1}{\partial y^2} - \mu \frac{\partial^2 Q_1}{\partial x^2} \right) + \frac{1}{bh} \left(\frac{\partial^2 Q_2}{\partial x^2} - \mu \frac{\partial^2 Q_2}{\partial y^2} \right) \quad (7)$$

μ —— 泊松系数。

面板下表面的变形 $\varepsilon_1, \varepsilon_2$ 由下列公式决定：

$$\begin{aligned}\varepsilon_1 = & \frac{1}{E}(\sigma_x - \mu\sigma_y) - \frac{1}{2} \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} h = \frac{1}{E} \left(\frac{\partial^2 \varphi}{\partial y^2} - \mu \frac{\partial^2 \varphi}{\partial x^2} \right) + \\ & + \frac{1}{E} \left(\mu \frac{Q_2}{bh} - \frac{Q_1}{ah} \right) - \frac{1}{2} \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} h ; \dots\dots(8)\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\varepsilon_2 = & \frac{1}{E}(\sigma_y - \mu\sigma_x) - \frac{1}{2} \frac{\partial^2 w}{\partial y^2} h = \\ & = \frac{1}{E} \left(\frac{\partial^2 \varphi}{\partial x^2} - \mu \frac{\partial^2 \varphi}{\partial y^2} \right) + \frac{1}{E} \left(\mu \frac{Q_1}{ah} - \frac{Q_2}{bh} \right) - \\ & - \frac{1}{2} \frac{\partial^2 w}{\partial y^2} h , \dots\dots\dots(9)\end{aligned}$$

縱，橫樑腹板上緣的變形由下列公式決定：

$$\varepsilon_1 = \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} e'_1 + \frac{Q_1}{E f_1} ;$$

$$\varepsilon_2 = \frac{\partial^2 w}{\partial y^2} e'_2 + \frac{Q_2}{E f_2} ,$$

式中 e'_1 — 縱樑（不帶附連翼板）斷面重心離面板下表面的距離；

f_2, e'_2 — 橫樑（不帶附連翼板）斷面面積和斷面重心到面板下表面的距離。

根据面板下表面的变形等于樑材腹板上緣的变形这一条件可以得到：

$$\left. \begin{aligned} Q_1 &= a_{11} \frac{\partial^2 \varphi}{\partial y^2} - \mu a_{12} \frac{\partial^2 \varphi}{\partial x^2} - a_{13} \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} - a_{14} \mu \frac{\partial^2 w}{\partial y^2} \\ Q_2 &= -\mu a_{21} \frac{\partial^2 \varphi}{\partial y^2} + a_{22} \frac{\partial^2 \varphi}{\partial x^2} - \mu a_{23} \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} - a_{24} \frac{\partial^2 w}{\partial y^2} \end{aligned} \right\} (10)$$

这裡

$$\left. \begin{aligned} a_{11} &= \frac{f_1}{\Delta} \nu_2 ; & a_{12} &= \frac{f_1}{\Delta} ; \\ a_{13} &= \frac{f_1}{\Delta} e_1 E \frac{1}{1-\rho_2} ; & a_{14} &= \frac{f_1}{\Delta} E e_2 \frac{\rho_2}{1-\rho_2} \\ a_{21} &= \frac{f_2}{\Delta} ; & a_{22} &= \frac{f_2}{\Delta} \nu_1 ; \\ a_{23} &= \frac{f_2}{\Delta} E e_1 \frac{\rho_1}{1-\rho_1} ; & a_{24} &= \frac{f_2}{\Delta} e_2 E \frac{1}{1-\rho_1} \end{aligned} \right\} (11)$$

引入下列符号：

$$\Delta = \frac{\nu_1 \nu_2 - \mu^2}{1 - \mu^2} ;$$

$$\rho_1 = \frac{f_1}{f_1 + a h} ;$$

$$\rho_2 = \frac{f_2}{f_2 + bh} ; \quad (12)$$

$$v_1 = \frac{1 - \mu^2 \rho_1}{1 - \rho_1}$$

$$v_2 = \frac{1 - \mu^2 \rho_2}{1 - \rho_2}$$

方程(4), (7)是板架稳定性的基本方程, 其中的 Q_1, Q_2 则由式(10)决定。

把式(10)代入(4), (7)后得到:

$$\begin{aligned} a_1 \frac{\partial^4 w}{\partial x^4} + a_2 \frac{\partial^4 w}{\partial x^2 \partial y^2} + a_3 \frac{\partial^4 w}{\partial y^4} + a_0 \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} = \\ = a_4 \frac{\partial^4 \varphi}{\partial x^4} + a_5 \frac{\partial^4 \varphi}{\partial x^2 \partial y^2} + a_6 \frac{\partial^4 \varphi}{\partial y^4} \end{aligned} \quad (13)$$

$$\begin{aligned} \beta_1 \frac{\partial^4 \varphi}{\partial x^4} + \beta_2 \frac{\partial^4 \varphi}{\partial x^2 \partial y^2} + \beta_3 \frac{\partial^4 \varphi}{\partial y^4} = \beta_4 \frac{\partial^4 w}{\partial x^4} + \beta_5 \frac{\partial^4 w}{\partial x^2 \partial y^2} \\ + \beta_6 \frac{\partial^4 w}{\partial y^4}, \quad \dots\dots\dots (14) \end{aligned}$$

式中：

$$\alpha_1 = \frac{E i_1}{a} + \frac{e_1}{a} a_{13} + D \quad ;$$

$$\alpha_2 = \frac{e_1}{a} a_{14} \mu + \frac{e_2}{b} \mu a_{23} + 2D \quad ;$$

$$\alpha_3 = \frac{E i_2}{b} + \frac{e_2}{b} a_{24} + D \quad ;$$

$$\alpha_0 = \frac{f_1}{a} + h \quad ;$$

$$\alpha_4 = - \frac{e_1}{a} \mu a_{12} \quad ;$$

$$\alpha_5 = \frac{e_1}{a} a_{11} + \frac{e_2}{b} a_{22} \quad ;$$

$$\alpha_6 = - \frac{e_2}{b} a_{21} \mu \quad ;$$

$$\beta_1 = v_1$$

$$\beta_2 = 2 \frac{v_1 v_2 - \mu}{1 - \mu}$$

$$\beta_3 = v_2 \quad ;$$

$$\beta_4 = \Delta \mu \left(\frac{a_{13}}{a h} - \frac{a_{23}}{b h} \right) \quad ;$$

$$\beta_5 = \Delta \left(\frac{-a_{13}}{a h} + \frac{\mu^2 a_{14}}{a h} - \frac{a_{24}}{b h} + \frac{\mu^2 a_{23}}{b h} \right) \quad ;$$

(15)

(16)

$$\beta_6 = \Delta\mu \left(-\frac{a_{14}}{a h} + \frac{a_{24}}{b h} \right)$$

这样板架稳定性问题就归结为积分方程组(23), (24), 并满足相应的边界条件。

2. 四边自由支持在刚性周界上的板架(图4)

设板架的各边处在菲侖(Filon)条件下。

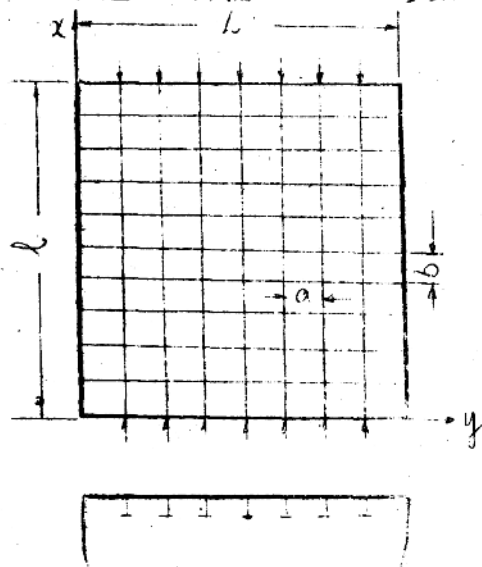


图4

把函数 w , φ 表示为下列形式:

$$w = \sum A \sin \frac{m\pi x}{L} \sin \frac{n\pi y}{L} \quad ;$$

~ 1 2 ~

$$\varphi = \sum B \sin \frac{m\pi x}{l} \sin \frac{n\pi y}{L} \quad (17)$$

这样就满足了所有 w 及 φ 的边界条件。

把(17)代入(13), (14)后得到:

$$\left. \begin{aligned} & A \left[\alpha_1 \left(\frac{m\pi}{l} \right)^4 + \alpha_2 \left(\frac{m\pi}{l} \right)^2 \left(\frac{n\pi}{L} \right)^2 + \alpha_3 \left(\frac{n\pi}{L} \right)^4 - \sigma \alpha_0 \left(\frac{m\pi}{l} \right)^2 \right] - \\ & - B \left[\alpha_4 \left(\frac{m\pi}{l} \right)^4 + \alpha_5 \left(\frac{m\pi}{l} \right)^2 \left(\frac{n\pi}{L} \right)^2 + \alpha_6 \left(\frac{n\pi}{L} \right)^4 \right] = 0 \quad ; \\ & A \left[\beta_4 \left(\frac{m\pi}{l} \right)^4 + \beta_4 \left(\frac{m\pi}{l} \right)^2 \left(\frac{n\pi}{L} \right)^2 + \beta_6 \left(\frac{n\pi}{L} \right)^4 \right] - \\ & - B \left[\beta_1 \left(\frac{m\pi}{l} \right)^4 + \beta_2 \left(\frac{m\pi}{l} \right)^2 \left(\frac{n\pi}{L} \right)^2 + \beta_3 \left(\frac{n\pi}{L} \right)^4 \right] = 0 \end{aligned} \right\} (18)$$

使此方程组的行列式等于零, 得到板架的稳定性方程。考虑到当 $n=1$ 时将得到此方程的最小根, 即板架临界应力 σ_{kp} , 于是得到:

$$\sigma_{kp} = \frac{1}{k + \frac{f_1}{a}} \alpha_1 \left(\frac{m\pi}{l} \right)^2 \left(1 + \frac{\alpha_2}{\alpha_1} \left(\frac{l}{mL} \right)^2 + \frac{\alpha_3}{\alpha_2} \left(\frac{l}{mL} \right)^4 \right) +$$

$$+ 8\sigma_{kp} \dots \dots \dots (19)$$

$$\text{式中 } \delta \sigma_{kp} = \frac{-1}{h + \frac{f_1}{a}} \frac{\alpha_4 \beta_4 (m_{17})^2}{\beta_1 l} \frac{1 + \frac{\alpha_5}{\alpha_4} (\frac{l}{mL})^2 + \frac{\alpha_6}{\alpha_4} (\frac{l}{mL})^4}{1 + \frac{\beta_2}{\beta_1} (\frac{l}{mL})^2 + \frac{\beta_3}{\beta_1} (\frac{l}{mL})^4} \cdot$$

$$[1 + \frac{\beta_5}{\beta_4} (\frac{l}{mL})^2 + \frac{\beta_6}{\beta_4} (\frac{l}{mL})^4] \dots\dots\dots (20)$$

3. 一边受纵桁加强的板架 (图 3)

下面讨论一边受纵桁加强，而其它三边自由支持在舷侧和舱壁上的板架。挠度 w 的边界条件可以写成下面的形式：

$$\text{在 } x=0 : x=l \text{ 处 } w=0 ; \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} = 0 ; \quad (21)$$

$$\text{在 } y=0 \text{ 处 } w=0 ; \frac{\partial^2 w}{\partial y^2} = 0 ; \quad (22)$$

$$\text{在 } y=L \text{ 处 } \frac{\partial^2 w}{\partial y^2} = 0 \quad (23)$$

$$E(i_{10} - i_1) \frac{\partial^4 w}{\partial x^4} + G(f_{10} - f_1) \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} -$$

$$- \frac{\partial}{\partial x} (q_{10} e_{10} - q_1 e_1) = D \left(\frac{\partial^3 w}{\partial y^3} + (2 - \mu) \frac{\partial^3 w}{\partial x^2 \partial y} \right) +$$

$$+ \frac{E i_2}{b} \frac{\partial^3 w}{\partial y^3} - q_2 \frac{e_2}{b} \quad \dots\dots\dots (24)$$

式中 i_{10}, f_{10}, e_{10} —— (沒有附連翼板的) 縱桁的斷面慣性矩。

斷面面積和斷面重心離面板中面的距離；

q_{10} —— 縱桁腹板與面板連接處的切力的強度 (力/長度)

(24) 式的物理意義是：縱桁給與面板和橫樑的反力除一小部分在推导基本方程(4)時被考慮到沿板架面板連續分佈的橫荷重中去外，其餘部分應等於面板和橫樑在 $y = L$ 剖面內的切力。

設邊 $x = 0$ ； $x = l$ 处在菲倫 (Filon) 条件下。

設 $y = 0$ 处应力函数的边界条件为：

$$\text{当 } y = 0 \quad \sigma_y = \frac{\partial^2 \varphi}{\partial x^2} - \frac{Q_2}{bh} = 0 ; \quad (25)$$

$$\varepsilon_1 = \frac{1}{E} \left(\frac{\partial^2 \varphi}{\partial y^2} - \mu \frac{\partial^2 \varphi}{\partial x^2} \right) - \frac{1}{E} \left(\frac{Q_1}{ah} - \mu \frac{Q_2}{bh} \right) = 0 \quad (26)$$

在 $y = 0$ 处的实际边界条件会与此不同。但由于得到精确解的目的，仅是为了校核近似解，因而还是採用这一形式較为简单的条件。在下一节中将求得相应于同一边界条件的近似解。

在 $y = L$ 处应力函数的边界条件可以写成下面的形式：

$$\text{当 } y = L \quad \sigma_y = \frac{\partial^2 \varphi}{\partial x^2} - \frac{Q_2}{bh} = 0 ; \quad (27)$$

$$\tau_{xy} = - \frac{\partial^2 \varphi}{\partial x \partial y} = \frac{q_{10} - q_1}{h} \quad (28)$$

在式(28)中注意到纵桁腹板与面板连接处的部分剪力已在推导方程式(7)时被考虑在体积力中。

根据面板下表面总变形和纵桁腹板上缘总变形应相等的条件得到决定 Q_{10} 的公式：

$$Q_{10} = b_{11} \frac{\partial^2 w}{\partial y^2} - \mu b_{12} \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} - b_{13} \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} - \mu b_{14} \frac{\partial^2 w}{\partial y^2} \quad (29)$$

式中

$$\left. \begin{aligned} b_{11} &= f_{10} \frac{y_2}{\Delta} ; \\ b_{12} &= \frac{f_{10}}{\Delta} ; \\ b_{13} &= f_{10} E (\epsilon_{10} - \epsilon_1) + \frac{f_{10} E \epsilon_1}{\Delta} \frac{1}{1 - \rho_2} \\ b_{14} &= \frac{f_{10} E \epsilon_2}{\Delta} \frac{\rho_2}{1 - \rho_2} \end{aligned} \right\} \quad (30)$$

以带有翼板宽度为 b 的横杆，在 $y = L$ 处，其横断面内的法向附加应力的合力应等于零的条件来代替边界条件：当 $y = L$ 时 $\sigma_y = 0$ 。这样可以简化推导过程，而不影响结果的正确性。假如注意到 Q_2 等于不带翼板的横杆断面内的法向附加应力的合力，那就可以由关系式(6)的第二式看出，前一条件应写成下面的形式：

$$\text{当 } y = L \quad \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} = 0 \quad (31)$$

~ 16 ~