

分積微士馬托

上 冊

原著者 Thomas·Finney

譯著者 駱傳忠·駱傳孝

曉 園 出 版 社

世界圖書出版公司

96
1

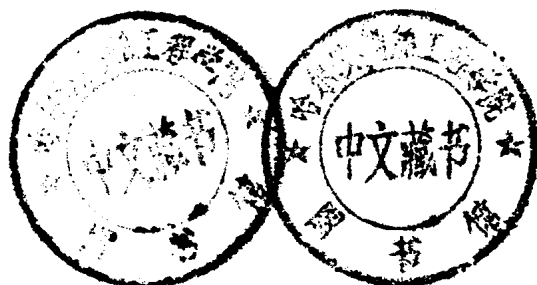
370184

托馬士微積分

上 册

原著者 Thomas·Finney

譯著者 駱傳忠·駱傳孝



曉 園 出 版 社

世界圖書出版公司

北京·廣州·上海·西安

DU 91/27

内 容 简 介

譯 序

數學是一切科學之母，而微積分更是現代數學的基礎。在各種科學領域，甚至日常生活中都有它的存在與貢獻。本書是依據美國MIT數學系教授George B. Thomas, JR及Ross L. Finney所著“Calculus And Analytic Geometry”第六版翻譯而成。原書於1951年第一版問世，由於內容精湛，觀念清晰，解說深入淺出，一直受人推崇。在本版中，作者為使內容更親切易懂，增添了許多例題和圖表，舉凡電機、化工、物理、經濟……等問題皆有涉獵。習題的分量更較前版增加了將近一倍，使讀者有更多的機會練習實作，俾能觸類旁通。更重要的是它能隨著電腦時代的來臨，增加了許多使用迭代程序運算的實例，將計算機與微積分結合在一起解決各類問題。

為使讀者能夠免除語言的隔閡，將心力集中於“數學”的探討上，所以決定將其譯成中文，希望能為讀者節省些時間。也因此我們在工作期間，很仔細的推敲原文，唯恐一時之疏忽，造成對讀者的誤導，在忠於原著的原則下，力求順口易讀。為求完美，尚祈專家不吝指正，以便再版時修訂。

譯 者 謹識

1985, 9, 1

六 版 序

十七世紀的科學，由於急需數學工具的輔助，因此發展了微積分這門學問，爾後被世人認為是數學上最偉大的成就。微積分可用來解釋移動物體的加速度，速度與移動距離之間的密切關係，並將曲線的斜率與變率之間關連起來。同時微積分也可求出函數所能達到的極大、極小值（例如一行星與太陽之間最大與最小距離）。求曲線的弧長，曲線所包圍的面積，曲面所包圍的體積，以及物體的重心。直到今日，微積分仍是解決這類問題最好的數學工具，並且它應用的範圍很廣，幾乎任何一門學科或多或少都會用到它。

由第五版修訂到第六版，我們嘗試著使微積分更易於學習，習題的份量幾乎增加了一倍，為了加強基本技巧，設計了許多有關基本計算的練習。新版也增加了許多例題，多了三百多個圖，以及更多的公式摘要，並提供學習理工的讀者更多更簡明的應用例題。在新版中，我們將線性及二次近似與估算誤差的方法提到前面介紹，再將它們應用到使用小型計算機的習題中。

微電腦的普遍使用，使得我們能夠在專業工作上學習或利用微積分。例如在平面或空間中畫出函數的圖形，更快的解出方程式，或用其他的方式來增強微積分公式的應用。因此在新版中，我們在一些習題後增列一些參考資料，是 27 個 Apple II™ 系列的微電腦程式，適合學習微積分的學生、工程師、物理學家與那些在工作上要用到微積分的讀者。

本書的嚴密程度與前幾版相同，例如我們並不證明一個連續函數在封閉有界的區間內有極大、極小值，我們僅陳述此定理，並利用它來證明中間值定理。

第一章的主題為函數的變率，有新添的章節來討論連續性與極限值為無限值的情形。

第二章的主題為導數，新增了線性（切線）近似、反函數與用皮卡法求根的章節。

第三章的主題為導數的應用，由新增的討論曲線描繪、凹性與漸近線的章節開始，新版將極大、極小值放在相關變率之前討論。本章最後一節用來討論均值定理的推廣並研究函數線性與二次近似的誤差估計。

第四章的主題為不定積分與定積分。與從前相同，我們由 $y' = f(x)$ 形式的微分方程式開始，並用分離變數法來解。本章還包含了兩個微積分基本定理的新發展，同時對代換積分法之技巧特別用一節來討論，在此節中，我們首次接觸到微分。

第五章的主題為定積分的應用，比以前增加了更多的應用、習題與實例，並增加了許多公式的摘要。

第六章介紹對數、指數與反三角函數，同時討論函數的相對成長率。它包含了一節來討論指數與對數函數的應用，像冷卻、指數成長、放射性衰退與電路，並有一節討論複利與班傑明·富蘭克林的遺囑。

第七章介紹積分技巧，在取積分這節中增加了收斂性的比較檢驗法，並新增了一節利用積分表的計算技巧，同時將部分積分法移至本章的開頭。

第八章（平面解析幾何）與第九章（雙曲函數）在某些部分予以刪除並加入一些新資料及習題。

第十章（極座標）比以前精簡，但增加了對 $r = f(\theta)$ 形式之極方程式的新繪圖技巧。

在本版中，將無窮數列與無窮級數提前討論，並分為 11 與 12 兩章，第 11 章專門討論常數的無窮數列與無窮級數。第 12 章討論泰勒定理（視為均值定理的推廣）與冪級數。複數數列僅稍稍提到

。(關於複數的計算與阿干圖示法列於附錄8。)

第13章討論向量，先由平面上的移動開始，再研究空間中的向量代數與幾何。

第14章的主題為向量函數與其導數，對切線向量、速度、加速度給予新的看法，並有一節來討論星球運轉的克卜勒定理。

第15章討論偏導數，對兩變數函數的極限、連續性、曲面、偏導數、連鎖法則、方向導數、線性近似與增量估計、極大值與極小值、拉格朗日乘子法、恰當微分及最小平方法均有新的說明。利用電腦繪圖，我們可以看見及討論許多曲面，這是本書前幾版中所沒有的。本章同時也對一些物理上重要偏微分方程式的解稍作介紹，並且利用簡短的一節說明在變數不獨立的一個函數上如何利用連鎖法則。

第16章的主題為多重積分，增加了一節簡介，並且有更多的例題、習題與公式摘要，其中包含了以梯度符號表示的曲面面積表示法。

第17章的主題為向量分析，由向量場開始，再介紹曲面積分、線積分、功、格林定理、散度定理以及史塔克定理。除了增加許多新的例題與習題外，本章也新增了對流體力學中連續方程式的推導。

第18章討論常微分方程式，對常係數線性二階方程式的處理，我們已擴展至未定係數法與參數變動法。本章也略為提到冪級數解、方向場、皮卡定理 (Picard's theorem)、尤拉法 (Euler) 以及 Runge-Kutta 法。

在附錄中包含了行列式、Cramer 法則、矩陣與線性代數，同時新增了一節討論數學歸納法與數系。

本書是一本完整的教材，可分為兩學期或三學期教授。本書可分為兩部分，第一部分包含單變數函數的處理、二維解析幾何與無窮級數 (第1~12章)，同時包括附錄中的行列式、矩陣與數學歸納法。第二部分包含由第11章數列與級數以後的各章及附錄。兩部分的奇數習題答案均列於書後。

最後，對幫助完成本書的各位先生，深致謝忱。

1983 年 10 月

C. B. T. Jr.

R. L. F.

原著序

何謂微積分？

微積分是研究運動與變量的數學。當研究有關於運動或成長，或是變化的力做功產生加速度的問題時，微積分是有效的數學工具，不論是在發展微積分的十七世紀或是今日，都可以這樣說。

微積分可被用來預測衛星的軌道；設計慣性導航系統，粒子迴旋加速器與雷達系統；探查太空旅行的問題以及檢定關於洋流與大氣動力的理論。微積分也逐漸的被用來解決在生物、商業、經濟學、語言學、藥學、政治學及心理學上的問題。同時，它幾乎也是通往所有高等數學的必經之路。

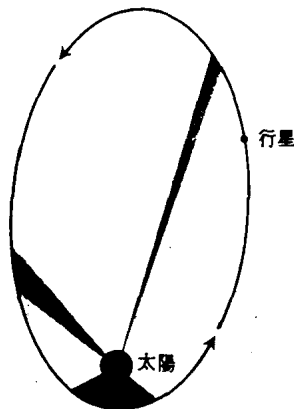
微分是處理在計算變率時的問題，當我們有一個運動物體之距離對時間的函數公式，我們可利用微分求出此物體在任一瞬間的速度及加速度。微分同時也可以使我們能夠解出函數的極大值與極小值問題，諸如：一砲彈以何種角度發射，射程可達最遠？一圓柱形木料可切出最堅固之矩形樑的尺寸？一化學反應在何時的反應速率最快？

積分是研究由其變率資料求出函數的問題。若已知一移動物體的速度對時間的函數公式，我們可以用積分求出此物由開始至任一瞬間所移動的距離。若已知一群體現在的數目與成長率，我們可以導出一個公式，預測此群體在未來任一瞬間的數目，及求出過去任一時間的數目。根據破 14 的蛻變率，我們可導出一個公式，可由一木炭標本目前破 14 與破 12 的比率推算出此標本的年齡。奧勒岡州的 Crater 湖的年齡，就是由形成此湖時之火山爆發所殺死的一棵樹，利用此方式推算出年齡為 6600 年。

現在的理工學家，利用微分與積分將物理定律用精確的數學式子來表示，進而研究這些定律的變化。

在牛頓 (Sir Isaac Newton (1642-1727)) 出生之前，克卜勒 (Johannes Kepler, 1571-1630) 花費了廿年的時間研究觀察所得的資料，利用經驗法則發現了下列三個定律，我們稱之為克卜勒定律：

1. 每一個繞著太陽轉動的行星，其軌道均為以太陽為一焦點的橢圓（見圖 P-1）。
2. 連接太陽與行星的直線在定時間中掃過相同的面積。
3. 行星繞太陽轉動之週期的平方與行星至太陽之平均距離的立方成正比。



P.1 一行星繞太陽轉動，圖中三塊陰影部分的面積完全相等。依據克卜勒第二定律，行星繞過每一區域之曲線外界所花的時間相同。因此行星在接近太陽時移動速度較快。

圖 P.1 告訴我們克卜勒前二個定律的一些概念，而第三個定律是說什麼呢？地球繞太陽轉動的週期大約為 365 日，而地球至太陽的平均距離為 93×10^6 哩。365 的平方與 $93,000,000$ 的立方之比率為 $(365)^2 / (93,000,000)^3 = 1.66 \times 10^{-19}$ 。克卜勒第三定律即是說，如果任一其他行星的週期 T 以地球日計算，且其與太陽的平均距離 D 用哩計算，則 $T^2 / D^3 = (\text{週期})^2 / (\text{距離})^3$ 的值一定是 1.66×10^{-19} ，與對地球所得到的相同。此比值對太陽系中任一行星來說均相同。因此，離太陽愈遠的行星，其繞軌道一圈所花的時間愈長。

當克卜勒寫下這些定律前，他不可能馬上由觀察到的 T 與 D 發現這個關係式，他必須經過長期艱苦的研究才發現這個 T^2 / D^3 不變的比例。但是幾年以後，牛頓只利用其在運動及重力上的物理假設。

使用微積分就可導出克卜勒三個定律。牛頓證明了只要在服從運動及重力定律的任意軌道系統中，克卜勒三定律均成立。)。

今日我們所使用的微積分是許多學者的貢獻。其根源可追溯至古典希臘幾何，但其主要還是由十七世紀的天文學家、數學家及物理學家所發展出來的。像 Rene Descartes (1596-1650), Bonaventura Cavalieri (1598-1647), Pierre de Fermat (1601-1665), John Wallis (1616-1703), Blaise Pascal (1623-1662), Christian Huygens (1629-1695), Isaac Barrow (1630-1677), 及 James Gregory (1638-1675) 而其中貢獻最大的為牛頓及萊布尼茨 (Gottfried Wilhelm Leibniz, 1646-1716)。

牛頓與萊布尼茨最大的貢獻就是將微積分由希臘幾何的附屬品發展成為一支強勁，足以處理各種新科技問題的獨立科學。牛頓與萊布尼茨將微積分的基本定理列成公式，並由他們的同僚所認同，將此一般方法應用到所有各類型的函數。他們的許多運算公式、計算方法以及數學符號，至今我們仍在使用。

微積分的發展並沒有停頓在十七世紀的成就，十八世紀的數學家白努利 (James Bernoulli ; 1654-1705) 和他的弟弟 (John Bernoulli ; 1667-1748)、尤拉 (Leonhard Euler ; 1707 - 1783), 拉格朗日 (Joseph-Louis Lagrange 1736-1813) 與許多其他的數學家，在微積分上有許多重大的發展，使得十八世紀在數學史上大放異采。而微積分許多程序的最後證明是由十九世紀的數學家，像波查諾 (Bernhard Bolzano 1781-1848), 柯西 (Augustin-Louis Cauchy ; 1789-1857) 與反士曲斯 (Karl Weierstrass ; 1815-1897) 等人所完成。十九世紀也在超越微積分的數學上有可觀的發展。這在 Morris Kline 的巨著 “ Mathematical Thought from Ancient to Modern Times ” 中有詳細的記載。

“微積分是現代數學最偉大的成就”，本世紀最偉大的數學家之一 John von Neumann (1903-1957) 曾說過，“我們很難會高估了它的重要性，它比任何其他的學科更直接的定下了現代數學的基礎與數學分析的系統，這是微積分發展的合理結果，是構成正確思考最偉大的進步技巧。”

目 錄

1 函數的變率 1

1 平面座標 1 / 2 增量與距離 6 / 3 直線的斜率 13 / 4 直線方程式 22 / 5 函數與圖形 34 / 6 二次與三次曲線的斜率 65 / 7 曲線 $y = f(x)$ 的斜率、導數 74 / 8 速度及其他變率 85 / 9 極限的性質 97 / 10 無限大時的極限 118 / 11 連續函數 129 / 複習題 144 / 綜合問題 147

2 導 數 153

1 型式微分 153 / 2 多項式函數及其導數 154 / 3 乘積、乘冪及商 165 / 4 隱微分及分數乘冪 181 / 5 切線近似法 195 / 6 連鎖法則及參數方程式 208 / 7 三角學的複習、曲線間的夾角 220 / 8 三角函數的導數 239 / 9 用牛頓法求方程式的近似解 249 / 10 反函數及皮卡法 256 / 11 導數公式的總結 270 / 複習題 271 / 綜合問題 273

3 導數的應用 279

1 曲線繪圖、一階導數的正負號 279 / 2 凹性與反曲點 288 / 3 對稱性與漸近線 297 / 4 極大值與極小值：理論 309 / 5 極大值與極小值：問題 318 / 6 相對變率 335 / 7 洛耳定理 344 / 8 均值定理 348 / 9 不定型及羅比得法則 358 / 10 將均值定理推廣至泰勒公式、估算近似值的誤差 366 / 複習題 376 / 綜合問題 377

4 積 分 387

1 前言 387 / 2 不定積分 387 / 3 不定積分的應用及求積分常數 395 / 4 三角函數的積分 400 / 5 定積分、曲線下的面積 408 / 6 用極限計算面積 422 / 7 積分的基本定理 431 / 8 代換積分法、微分 452 / 9 定積分近似法則 466 / 複習題 480 / 綜合問題 481

5 定積分的應用 487

1 前言 487 / 2 曲線間的面積 487 / 3 距離 494 / 4 以切片法估算體積 501 / 5 以薄殼與墊圓的模式計算體積 510 / 6 平面曲線的長度 521 / 7 迴轉體的表面積 530 / 8 函數的平均值 539 / 9 力矩與質量中心 546 / 10 形心和重心 559 / 11 帕卜定理 564 / 12 流體靜壓力 568 / 13 功 573 / 複習題 581 / 綜合問題 582

6 超越函數 587

1 前言 587 / 2 反三角函數 589 / 3 反三角函數的導數及其相關的積分 598 / 4 自然對數及其導數 606 / 5 自然對數的性質及 $y = \ln x$ 的圖形 617 / 6 指數函數 e^x 626 / 7 函數 a^x 及 a^y 639 / 8 函數 $y = \log_a u$ ，函數的相對上升率 650 / 9 指數函數及對數函數的應用 661 / 10 複利及富蘭克林的遺囑 669 / 複習題 674 / 綜合問題 674

7 積分方法 681

1 基本積分公式 681 / 2 部分積分法 690 / 3 三角函數之乘積與乘冪 701 / 4 正弦及餘弦的偶次冪函數 715 / 5 積分中含有 $a^2 + u^2$ ， $\sqrt{a^2 - u^2}$ ， $\sqrt{a^2 + u^2}$ ， $\sqrt{u^2 - a^2}$ 等項時三角函數代

換法 720 / 6. $ax^2 + bx + c$ 型的積分 732 / 7. 部分公式 736 /
8. $Z = \tan(x/2)$ 代換法 747 / 9. 瑕積分 750 / 10. 利用積分表
765 / 複習題 770 / 綜合問題 770

8 平面解析幾何 777

1. 圓錐曲線 777 / 2. 距離公式 779 / 3. 圓 781 / 4. 拋物線 786
/ 5. 橢圓 797 / 6. 雙曲線 809 / 7. 二次曲線 822 / 8. 由判別式
判定曲線為拋物線、橢圓或雙曲線 829 / 9. 圓錐曲線 832 / 複
習題 835 / 綜合問題 836

9 雙曲函數 843

1. 前言 843 / 2. 定義及恒等式 843 / 3. 導數與積分 848 / 4. 反
雙曲函數 856 / 5. 懸纜 863 / 複習題 866 / 綜合問題 867

附 錄 1

1. 行列式與Cramer法則 1 / 2. 矩陣與線性方程式 11 / 3.
1.9節極限定理的證明 24 / 5. 數學歸納法 30 / 6. 餘弦定律
與三角函數的加法公式 34 / 7. 一些基本的數學公式 37 / 8.
數系的創造、複數 43 / 9. 表 59

習題答案 61

索 引 101

常用積分表 107

目 錄

10 極座標 869

1 極座標 869 / 2 極座標的圖形 879 / 3 圓錐曲線及其他曲線的極方程式 887 / 4 積分 895 / 複習題 903 / 綜合問題 903

11 序列與無窮級數 909

1 前言 909 / 2 數列 911 / 3 常見的極限 923 / 4 無窮級數 928 / 5 沒有負項之級數收斂的檢定 944 / 6 絕對收斂 972 / 交錯級數，條件收斂 982 / 複習題 991 / 綜合問題 992

12 冪級數 995

1 函數之冪級數 995 / 2 帶有餘部的泰勒定理：正弦，餘弦及 e^x 1003 / 3 對數，反正切函數及 π 的計算 1016 / 4 不定型 1025 / 5 冪級數的收斂，積分，微分，乘法和除法 1028 / 複習題 1045 / 綜合問題 1046

13 向 量 1049

1 向量的分量及單位向量 i 及 j 1049 / 2 拋射體運動的模式 1058 / 3 解析幾何中的參數方程式 1066 / 4 空間座標系 1076 / 5 空間中的向量與距離 1083 / 6 兩個向量的內積（純量積） 1088 / 7 空間中二向量的向量積 1098 / 8 直線，線段和平面方程式 1103 / 9 三個向量（或更多向量）之積 1115 / 10 柱面 1123 / 11 二次曲面 1126 / 複習題 1135 / 綜合問題 1137

14 向量函數及其導數 1145

1 向量函數的導數 1145 / 2 切向量，速度及加速度 1152 /
3 空間中曲線的弧長及其單位切線向量 T 1166 / 4 曲率及法
向量 1166 / 5 向量積的導數 1177 / 6 行星運動及衛星
1185 / 複習題 1192 / 綜合問題 1193

15 偏導數 1199

1 二個或多個變數函數 1199 / 2 極限與連續 1207 / 3 偏導
數 1216 / 4 連鎖法則 1223 / 5 非獨立變數 1233 / 6 梯度
，方向導數與切平面 1239 / 7 高階導數，由物理學引出的偏
微分方程式 1261 / 8 線性近似及增量估計 1271 / 9 極大點
，極小點及反曲點 1287 / 10 拉格朗日乘子法 1303 / 11 恰當
微分 1320 / 12 最小平方法 1332 / 複習題 1339 / 綜合問題
1340

16 重積分 1349

1 前言 1349 / 2 二重積分 1349 / 3 面積 1366 / 4 物理方
面的應用 1368 / 5 轉換成極座標 1375 / 6 直角座標裏的三
重積分 1384 / 7 在三度空間中物理上的應用 1391 / 8 圓柱
座標與球座標的積分 1397 / 9 曲面面積 1405 / 複習題
1412 / 綜合問題 1412

17 向量分析 1419

1 向量場 1419 / 2 曲面積分 1425 / 3 線積分與功 1434 /
4 二維場，通過一平面曲線的通量 1451 / 5 格林定理 1462
/ 6 散度定理 1476 / 7 史托克定理 1489 / 複習題 1500 /
綜合問題 1501

18 微分方程式 1507