管理、决策与信息系统丛书

线性规划最新进展

马仲蕃 著

科学出版社

管理、决策与信息系统丛书

线性规划最新进展

马仲蕃　著

科学出版社
1994

（京）新登字 092 号

内 容 简 介

本书系统论述了线性规划的 Karmarkar 算法以及它的最新进展．内容包括：势函数投影变换（或仿射变换）算法、罚函数仿射变换牛顿法、原始-对偶中心线牛顿法、原始或对偶仿射变换内点法、自对偶牛顿法等．对各种算法的有效性证明，以及在初始内点的求法中，都包含了作者近几年的研究心得．本书文字简炼、内容新颖、体系独特，所有定理都有详细的严格证明，既保持了专著的性质，又力求深入浅出．

本书可作为运筹学、管理科学、应用数学、计算数学、系统工程等专业的大学生和研究生的教材或教学参考书．

管理、决策与信息系统丛书
线性规划最新进展
马仲蕃 著
责任编辑 李淑兰
科学出版社 出版
北京东黄城根北街 16 号
邮政编码：100717
中国科学院印刷厂印刷
新华书店北京发行所发行 各地新华书店经售
*
1994 年 7 月第 一 版 开本：850×1168 1/32
1994 年 7 月第一次印刷 印张：4 7/8
印数：1—2 000 字数：118 400
ISBN 7-03-004094-5/TP·354
定价：6.50 元

管理、决策与信息系统丛书

编辑委员会

序　　言

管理、决策与信息系统是本世纪中发展起来的研究新领域.它从系统科学、数学和经济学中吸取了一些理论和方法,从而得到了飞速的发展. 计算机科学和技术的发展，不仅为它在实践中的应用创造了条件，也为其理论探讨提供了工具. 与此同时，系统科学、数学和计算机科学也从它的研究中发现了新问题,吸取了新养分. 为了促进这个领域的发展,中国科学院管理、决策与信息系统开放研究实验室决定编写这套丛书. 这套丛书不求全而求新，以反映我们的研究成果为主.

回顾管理理论的发展历史，我们可以发现一个趋势：系统的概念和方法越来越多地用于其中，并成为管理理论发展的第三阶段的重要特征. 管理理论的第一阶段形成于本世纪初,以 F. W. Taylor 为代表,倡导科学的管理，他们针对提高工厂劳动生产率的问题提出了标准化原理.管理理论的第二阶段,从本世纪二三十年代开始，以行为科学为特点，主要代表有 A. H. Maslow, K. Lewin, R. Jannenbaum 和 D. McGregor 等人. 他们研究人的需要、动机、激励和定向发展;研究正式和非正式的团体的形成、发展和成熟;研究个人在团体中的地位、作用，领导方式和领导行为等.管理理论的第三阶段出现在第二次世界大战后,这一阶段有各种学派,例如社会系统学派、决策理论学派、系统管理学派、管理科学学派和经验主义学派等. 他们从不同角度强调系统的概念、理论和方法. 这三个发展阶段并非截然分开，而是互相渗透的. 不论管理有多少学派和多少技巧，我们大致可以分成三种模式：机械模式、生物模式和社会模式. 生物模式认为，组织像一个生物，有头脑机构,有职能部分和分支机构；一个企业的目标可以分解，各部门完成其中的一部分. 在这种模式下,目标管理得以发展.社

会模式认为，各级组织都是一个交互作用的系统，它们有共同的目标、交互作用和信息联系，管理者是交互作用的中心. 目前，美国有一学派强调交互式管理（interactive management），强调以系统方法来管理. 这正是它不同于传统管理的地方. 在实践上，传统管理大致分为三类：回顾式（reactive）管理、被动式（inactive）管理、预测式（preactive）管理. 回顾式管理是在自下而上地总结过去经验的基础上，去发现单位的弱点，找出克服它的措施，并在预算允许的条件下，逐个地实施. 被动式管理的特点是危机管理，是"救火队"，领导疲于处理各种各样的当前问题. 预测式管理的各种决策基于对今后的经济、技术、顾客行为和各种环境的预测. 这三类管理可以混合成各种样式的管理，正像红、黄、蓝可以组成各种颜色一样. 交互式管理强调系统的方法，认为某企业出现的市场问题绝不仅仅是个市场问题，而跟 R&D、生产、原材料供给和人事等等有关，是系统的问题，是整个企业的问题. 回顾式管理的弱点就是缺乏系统的观点. 交互式管理强调要设计可见的未来，创造一条尽可能实现它的道路，这是"救火队"所不能做到的，但它又不把一切都寄托于预测. 交互式管理还强调"全员参与"和"不断改进". 我们认为，交互式管理是社会模式的一种. 目前日本出现了"3C 管理"，核心就是竞争（competition）、合作（cooperation）和协调（coordination）.

决策理论学派是以 E. W. Simon 为代表从社会系统学派中发展起来的. 它认为决策贯穿于管理的全过程，管理就是决策. 决策的优劣在很大程度上依赖于决策者的智慧、素养和经验. 计算机技术的发展不仅使人们能够快速地解决决策中的复杂计算问题，而且可以有效地进行决策过程中的信息处理和分析等工作，从而达到提高决策质量的效果. 今天正处在不断发展阶段的决策支持系统（DSS）和管理信息系统（MIS）正是集管理理论、系统理论和信息技术三大成就的交叉学科，它们已为解决一些复杂决策问题提供了有力的工具. 粗略地说，决策问题或者管理问题大致可分为三个层次：战略决策、结构决策和运行决策. 战略决策是

指与确定组织发展方向和远景有关的重大问题的决策. 结构决策是指组织决策,运行决策是指日常管理.

从信息论的观点看,整个管理过程就是一个信息的接收、传输、处理和增功与利用的过程. 管理就是根据信息而进行的有效的控制行为. 这些行为表现的形式为计划、组织、协调、反馈与控制.计算机信息处理,用于管理走过了三个阶段;数据处理(EDP),管理信息系统和决策支持系统. 作为管理信息系统和决策支持系统的支持环境,相对独立于计算机科学的软件的开发,需要研究和建立各类管理信息系统独特的支持软件系统和开发环境,例如分布式数据库管理系统和分布式知识库管理系统;面向用户、通用性较强和面向特殊用户的模型库、方法库管理系统;以及一些专门的用户接口语言.

展望未来,我们认为管理、决策与信息系统这个交叉学科的研究领域,将会出现以下的发展趋势:

1. 更加重视人的行为的研究,企业的管理将不仅强调竞争,而且应在竞争的前提下注重合作与协调;

2. 宏观经济的非线性建模与决策分析,将与非线性数学的研究互相促进取得进展;

3. 计算机技术的飞跃发展,将为管理与决策提供更高的支持平台,例如数据库技术、人工智能、多媒体技术、智能化用户接口和网络技术的应用;

4. 在管理理论研究的基础上,在大量开发决策支持系统之后,利用计算机技术可能形成在一定范围内真正实用的决策支持系统;

5. 分布式系统模式将会有更广泛的应用;

6. 一些新的理论、方法和技术将会出现.

从这些展望中我们不难发现以下几个特点:(1)利用信息科学与数学中的最新成就,研究管理与决策中的问题并取得应用成果;(2)通过观察管理与决策系统发现其规律,研究管理与决策中的问题并取得应用成果;(3)通过观察管理与决策系统发现其

规律，形成数学与信息科学中的研究课题．这也是我们这套丛书的特色之一．

在这套丛书的编写中，我们在注重学术水平的同时，又注意其实用价值．因此这套丛书也有一定的适用面．丛书的作者们将竭尽努力把自己在有关领域中的最新研究成果和国外发展动态写得通俗易懂，以便使更多的读者用已掌握的有关理论和方法去解决他们工作中的实际问题．这是我们组织这套丛书的宗旨，也是我们的希望．

本丛书可供从事管理与决策工作的领导干部和管理人员、大专院校有关专业的师生以及技术人员学习、参考．

许国志　邓述慧

一九九三年五月

前　言

线性规划，由于其模型的普遍性和其单纯形方法的有效性，已成为运筹学、经济数学、管理科学、系统分析、组合最优化等学科的基本方法．因此，线性规划的进展自然会引起广泛的重视．

受计算复杂性理论的影响，人们曾在很长一段时间内，希望证明单纯形方法是多项式算法．然而，在 1972 年，Klee 和 Minty 通过例子，证明了单纯形方法不是多项式算法．这就提出了一个十分注目的问题：线性规划问题是否有多项式算法？

1979 年，Khachiyan 提出了线性规划的第一个多项式算法，在理论上取得了重大的突破．但是，在实际计算时，效果不能与单纯形算法相比．原因是复杂性理论是从最坏情况下来估计算法所需的计算时间，而实际计算时，一般为平均所需的计算时间．

1984 年，Karmarkar 提出了线性规划的一个新算法，不仅从复杂性理论上证明是多项式算法，并且在实际计算时也能与单纯形方法比美，从而掀起了一个研究 Karmarkar 算法的热潮．

我们知道，单纯形方法有如下的弱点：

(i) 迭代次数随着约束条件和变量数目的增加而迅速上升．

(ii) 将线性规划应用到生产计划的调整或实时控制等问题时，单纯形方法不能利用现行方案或状态所对应的可行解作为初始解．

(iii) 单纯形方法是终止于原始和对偶的最优基． 在退化情况下，虽然已达到了最优解，但是，为了证明它是最优的，往往还须经过很多次基的迭代．

Karmarkar 方法可利用现行方案作为初始解，沿着“中心线”，从定义域内部直接走向最优解．对大规模线性规划问题，当约束条件和变量数目增加时，Karmarkar 算法的迭代次数变化较少．

经过 Todd, Burrell, Anstreicher, Gay, Ye, Gonzaga, Kojima, Megiddo, Iri, Renegar, Gill, Monteiro, Adler, Vaidya, Vanderbei, Barnes, Ross 等人，对 Karmarkar 算法的深入研究，现已发展成三类内点算法.

(i) 势函数投影变换方法(即 Karmarkar 算法)

每步迭代，先作投影变换，将迭代点变换到可行域的中心，然后在中心对势函数使用最速下降步骤. 迭代次数的复杂性为 $O(nL)$，其中 n 为变量数目，L 为问题的数据在编译成二进码时的长度，通常称作问题的规模. 计算时间复杂性为 $O(n^{3.5}L^2)$.

(ii) 仿射均衡变换方法

每步迭代，先作仿射均衡变换，然后使用最速下降步骤. 实际计算表明，效果较好，但是还不能确定它是否具有多项式复杂性. 最近，Monteiro 和 Adler 等提出了一种原始-对偶仿射均衡算法，在一定的条件下，迭代次数的复杂性为 $O(nL^2)$.

(iii) 跟踪中心轨迹方法

"中心轨迹"的概念最早由 Huard 和 Sonnevend 提出. 跟踪中心轨迹算法是将对数障碍函数法和牛顿迭代法结合起来应用到线性规划问题. 迭代次数的复杂性为 $O(\sqrt{n}L)$. 计算时间复杂性为 $O(n^3L^2)$.

最近，已将跟踪中心轨迹方法推广应用到二次凸规划问题，且正进一步发展为从复杂性角度研究一般的非线性规划的内点算法.

本书系统论述了线性规划的各种内点算法，可作为应用数学、计算数学、管理科学、系统分析和运筹学等专业的研究生和大学生的教材或参考书. 对于从事运筹、优化应用的师生、工程技术人员和管理人员都有一定的参考价值.

马仲蕃

1993 年 8 月

目　　录

第一章　预备知识和基本概念

Karmarkar 算法是应用非线性最优化技术求解线性规划问题. 因此,在阅读本书时，需要线性、非线性规划以及算法复杂性方面的基本知识.

1.1　基本符号

小写英文字母 a, b, c, x 等一般表示列向量; a_i 表示向量 a 的第 i 个分量.

大写英文字母 A, B, Q 等一般都表示矩阵. a_{ij} 或 A_{ij} 表示 A 中第 i 行第 j 列的元素.

R^n 表示实数域上的 n 维向量空间.

a^T 和 A^T 分别为向量 a 和矩阵 A 的转置.

对 $a \in R^n$, 定义:

$$\|a\| = \sqrt{\sum_{i=1}^{n} a_i^2}$$

$$\|a\|_1 = \sum_{i=1}^{n} |a_i|$$

$$\|a\|_\infty = \max\{|a_1|, \cdots, |a_n|\}$$

$\det B$ 表示方阵 B 的行列式.

$\mathrm{diag}(x_1, \cdots, x_n)$ 表示以 $x_1, \cdots, x_n$ 为主对角线上元素的 n 阶对角线方阵.

$\{x | x$ 满足条件 $(P)\}$ 表示满足条件 (P) 的 x 所构成的集合.

$f(x)$ 表示定义在 R^n 上的有二阶连续偏导数的实值函数.

$\nabla f(x)$ 为 $f(x)$ 的梯度向量: $\left(\frac{\partial f(x)}{\partial x_1}, \cdots, \frac{\partial f(x)}{\partial x_n}\right)^T$.

$\nabla^2 f(x)$ 为 $f(x)$ 的 Hesse 矩阵，其第 i 行第 j 列的元素为 $\frac{\partial^2 f(x)}{\partial x_i \partial x_j}$.

当 e 表示向量时，通常定义为 $(1,1,\cdots,1)^T$.

$\lceil \alpha \rceil$ 表示不小于实数 α 的最小整数.

1.2 预备知识

1. 一般术语

一个矩阵 D，若满足 $D = D^T$，则称 D 是对称矩阵；一对称矩阵 D，对任何非零向量 x，若满足 $x^T D x > 0$，则称 D 是正定矩阵；若满足 $x^T D x \geqslant 0$，则称 D 是半正定矩阵。一个非奇异的矩阵 K，若满足 $K^T = K^{-1}$，则称 K 是正交矩阵。对任意的 $n \times n$ 的正定矩阵 Q，必存在正交矩阵 K，以及对角线矩阵 $\Lambda = \mathrm{diag}(\lambda_1, \cdots, \lambda_n)$，使得 $Q = K^T \Lambda K$（其中所有 λ_i 都是正数，它们是 Q 的 n 个特征值）。

对任意的实值函数 $f(x)$ 和 $g(x)$，若存在一个正的常数 λ，使得对定义域中的任何 x，满足 $f(x) \leqslant \lambda g(x)$，则写作 $f(x) = O(g(x))$.

若函数 $f(x)$ 具有连续的二阶偏导数，则它在点 $\bar{x}$ 处有如下的 Taylor 展开式：

$$f(x) = f(\bar{x}) + g(\bar{x})^T (x - \bar{x}) + \frac{1}{2}(x - \bar{x})^T G(\bar{x} + \theta(x - \bar{x}))(x - \bar{x})$$

其中，$0 \leqslant \theta \leqslant 1$;

$$g(\bar{x}) = \nabla f(\bar{x});$$

$$G(\bar{x} + \theta(x - \bar{x})) = \nabla^2 f(\bar{x} + \theta(x - \bar{x})).$$

设 Ω 是 R^n 中的一个点集，如果对任意的 $x, y \in \Omega$，总有

$$\mu x + (1 - \mu) y \in \Omega, \quad 0 \leqslant \mu \leqslant 1$$

则称 Ω 为一个凸集.

记

$$S = \{x \mid Ax = b,\ x \geqslant 0\}$$

S 是一个凸集，通常称作凸多面体。

记

$$S_+ = \{x \mid Ax = b,\ x > 0\}$$

S_+ 中的点称为 S 的内点。

设 $f(x)$ 是定义在非空凸集 $\Omega \subset R^n$ 上的实值函数，若对任意的 $x, y \in \Omega$，不等式：

$$f(\lambda x + (1-\lambda)y) \leqslant \lambda f(x) + (1-\lambda)f(y)$$

对满足 $0 \leqslant \lambda \leqslant 1$ 的一切 λ 成立，则称 $f(x)$ 为 Ω 上的凸函数；若对满足 $0 < \lambda < 1$ 的一切 λ，都使

$$f(\lambda x + (1-\lambda)y) < \lambda f(x) + (1-\lambda)f(y)$$

成立，则称 $f(x)$ 为 Ω 上的严格凸函数。

$f(x)$ 是 Ω 上二阶可微的凸函数，当且仅当 $\nabla^2 f(x)$ 在 Ω 上是半正定矩阵。若 $\nabla^2 f(x)$ 在 Ω 上是半正定矩阵时，则有

$$f(y) \geqslant f(x) + (\nabla f(x))^T(y - x),\ (x, y \in \Omega)$$

因此，若 $f(x)$ 是 Ω 上二阶可微的凸函数，x^* 满足 $\nabla f(x^*) = 0$，则

$$f(x^*) = \min_{x \in \Omega} f(x) = \min\{f(x) \mid x \in \Omega\}$$

若 $\nabla^2 f(x)$ 在 Ω 上是正定矩阵，则 $f(x)$ 是 Ω 上的严格凸函数，$f(x)$ 在 Ω 上有唯一的 x^* 使 $f(x)$ 达到最小值。若 x^* 是 Ω 的内点，则必定满足 $\nabla f(x^*) = 0$。

对条件极值问题：

$$\min\{f(x) \mid g_i(x) = 0;\ i = 1, \cdots, m\}$$

由微积分知识可知，若 x^* 使其达到最小值，则必存在 Lagrange 乘子 $u_1, \cdots, u_m$，使得满足稳定条件：

$$\nabla f(x^*) + \sum_{i=1}^{m} u_i \nabla g_i(x^*) = 0$$

本书只限于考虑在线性约束条件下的规划问题：

$$\min\{f(x) \mid x \in S\} = \min\{f(x) \mid Ax = b,\ x \geqslant 0\} \qquad (1.1)$$

对 $x^* \in S$，若存在向量 u^*，使得满足：

$$\left.\begin{aligned}&A^T u^* \leqslant \nabla f(x^*)\\&Ax^* = b,\ x^* \geqslant 0\\&(\nabla f(x^*) - A^T u^*)^T x^* = 0\end{aligned}\right\}\tag{1.2}$$

则称 x^* 为问题(1.1)的 K-T 点(即 Kuhn-Tucker 点),而称式(1.2)为问题的 K-T 条件. 其中第三组条件称为互补性条件. 当 $f(x)$ 是凸函数时, K-T 点便是问题(1.1)的最优解.

对线性规划 (LP):

$$\min\{c^T x \mid Ax = b,\ x \geqslant 0\}$$

有对偶规划 (DP):

$$\max\{b^T u \mid A^T u \leqslant c\}$$

它们的 K-T 条件为

$$\left.\begin{aligned}&A^T u \leqslant c\\&Ax = b,\ x \geqslant 0\\&(c - A^T u)^T x = 0\end{aligned}\right\}\tag{1.3}$$

线性规划的对偶定理:

(i) 当且仅当 x^* 和 u^* 满足 K-T 条件(1.3)时, 分别成为问题 (LP) 和 (DP) 的最优解.

(ii) 对 (LP) 和 (DP) 的任意可行解 x 和 u, 必有 $c^T x \geqslant b^T u$; 当且仅当等式成立时, 它们分别成为 (LP) 和 (DP) 的最优解.

设 A 是一行满秩的矩阵(即 A 的秩等于 A 的行数),则 AA^T 可逆.

定义子空间:

$$\mathscr{L} = \{p \mid p = A^T u,\ \text{对任意的向量 } u\}$$

$$\mathscr{L}^{\perp} = \{q \mid Aq = 0\} = \mathrm{Null}(A)$$

则 $\mathscr{L}^{\perp}$ 为 $\mathscr{L}$ 的正交互补子空间. 对任意的向量 x, 必存在 $p = A^T u \in \mathscr{L}$, $q \in \mathscr{L}^{\perp}$, 使得 $x = p + q$. 因为

$$Ax = Ap + Aq = AA^T u$$

所以

$$u = (AA^T)^{-1}Ax,\ p = A^T(AA^T)^{-1}Ax,\ q = (I - A^T(AA^T)^{-1}A)x$$

其中的 p 为 x 到 $\mathscr{L}$ 上的正交投影；q 为 x 到 $\mathscr{L}^{\perp}$ 上的正交投影.

定义

$$P_A = I - A^T(AA^T)^{-1}A$$

称 P_A 为到 Null(A) 上的垂直投影矩阵.

在复杂性理论中，所谓某个“问题”(例如线性规划问题)，是由许多“实例”组成的. 衡量问题的一种算法的好坏标准，主要看计算各种实例所需的时间(或 $+$，$-$，$\times$，$\div$，比较等初等运算的次数). 一般说来，实例的规模愈大，所需的计算时间愈长. 所谓实例的规模，通常是指将实例的各种数据编译成二进制码后，输入计算机的长度. 例如线性规划问题的规模，通常表示为

$$L = \left[\sum_{i=1}^{m}\sum_{j=1}^{n}\log_2(|a_{ij}|+1) + \sum_{i=1}^{m}\log_2(|b_i|+1) + \sum_{j=1}^{n}\log_2(|c_j|+1)\right] + m \times n$$

其中的 a_{ij} 为系数矩阵 $A_{m\times n}$ 的分量；b_i 和 c_j 为向量 b 和 c 的分量，且所有的分量都取整数.

对给定的算法 T，令 $T(L)$ 表示求解任何规模为 L 的实例所需计算时间的上界. 如果存在 L 的某个多项式 $p(L)$，使得 $T(L) = O(p(L))$，则称 T 是问题的一个多项式算法，T 的时间复杂性为 $O(p(L))$. 它是对算法的计算时间的一种最坏情况下的估计，说明应用算法 T 时，对任何规模为 L 的实例，计算时间或运算次数不会超过 $O(p(L))$.

受复杂性理论的影响，最优化方法的研究出现了新的面貌. 经典最优化的研究方式是，首先证明算法的收敛性：对任意给定的精度 $\varepsilon = 2^{-L}$，(L 为正整数)，必存在某 $N(L)$，当 $n > N(L)$ 时，算法所得的点列 x^n 必进入最优解的 ε 邻域内. 然后，再进一步研究在充分小的邻域中，x^n 是按什么速度(线性、超线性、二次等)趋向于最优解. 这里，只注意 $N(L)$ 的存在性，也只研究最优解附近的收敛速度. 然而，从复杂性理论角度分析算法时，就要求对任意的 L，估计出具体的 $N(L)$. 研究 $N(L)$ 与 L 之间的函数

关系．若 $N(L)$ 是 L 的多项式，则认为收敛速度是快的，算法是好的；若 $N(L)$ 是 L 的指数函数，则认为收敛是慢的，算法是不好的．从复杂性角度，主要研究：对任意给定的精度 $\varepsilon = 2^{-L}$，以及初始点 x^0，算法所得的点列按什么速度走进最优解的 ε 邻域？往往在邻域内部收敛快的算法不一定在邻域外部也收敛得快．

2. 单纯形方法

考虑标准形式的线性规划问题：

$$\min\{c^T x \mid Ax = b,\ x \geqslant 0\}$$

其中，$A = (P_1, \cdots, P_n)$ 是 $m \times n$ 的行满秩矩阵；$b \geqslant 0$．对 A 中任一 $m \times m$ 的子矩阵 B，若 $\det B \neq 0$，则称 B 是一个基．适当变换列的编排顺序，将 A 分成两部分：$A = [B, N]$，使其中的 B 是一个基．对应地，将 c 和 x 也分成两部分：

$$c = \begin{pmatrix} c_B \\ c_N \end{pmatrix},\quad x = \begin{pmatrix} x_B \\ x_N \end{pmatrix}$$

则问题可等价地写为

$$\begin{cases} \min\ c_B^T x_B + c_N^T x_N = c_B^T B^{-1} b + (c_N^T - c_B^T B^{-1} N) x_N \\ \text{满足：}\ x_B + B^{-1} N x_N = B^{-1} b;\ x_B \geqslant 0,\ x_N \geqslant 0 \end{cases}$$

约束方程组的特解：$x_B = B^{-1} b$，$x_N = 0$，称为对应于 B 的基本解；若基本解满足 $B^{-1} b \geqslant 0$，则称其为基本可行解，这时的 B 称为可行基．若同时满足 $B^{-1} b \geqslant 0$，$c_N^T - c_B^{-1} B^{-1} N \geqslant 0$，则容易看出，对应于 B 的基本解是问题的最优解，称其为基本最优解．这时，称 B 是一个最优基．

线性规划的一个基本定理是：

(i) 问题若有可行解，则必有基本可行解．

(ii) 问题若有最优解，则必有基本最优解．

单纯形方法是从一个基本可行解出发，逐次迭代，由一个基本可行解走到另一个基本可行解，不断改进目标函数值，最后走到基本最优解，且同时也得到了一个最优基．

计算步骤：