



汽轮发电机组振动

QILUN

FADIANJIZU

ZHENDONG

陆颂元 著



中国电力出版社
www.cepp.com.cn

457567



汽 轮 发 电 机 组 振 动

陆颂元 著

电力科技专著出版资金资助项目



00457567



中国电力出版社
www.cepp.com.cn

内 容 提 要

本书系统、全面地介绍了汽轮发电机组振动的基础理论知识,滑动轴承的简要理论和实践,轴系的临界转速、不平衡振动响应和稳定性,振动测试技术,振动数据分析和处理,现场高速动平衡的理论基础和加重计算方法,机组振动故障特征、诊断技术和处理方法,轴系扭振特性计算和现场试验技术,振动标准以及轴系振动事故的防范等。

本书汇集、总结了作者长期从事汽轮发电机组振动理论研究和现场实际工作的经验,内容丰富,论述精炼。书中以理论为基础,以大量详细的实例为说明,是一本关于机组振动的基础理论知识和工程实践应用兼顾的有一定深度的专业书籍。

本书可供从事汽轮发电机组振动设计、研究和从事现场机组振动工作的科技人员参考,也可供电厂热能动力专业研究生学习使用。

图书在版编目(CIP)数据

汽轮发电机组振动/陆颂元著. —北京:中国电力出版社, 2000.2

ISBN 7-5083-0206-0

I. 汽… II. 陆… III. 汽轮发电机组—机械振动—研究 IV. TM311.14

中国版本图书馆 CIP 数据核字(1999)第 70713 号

中国电力出版社出版、发行

(北京三里河路 6 号 100044 <http://www.cepp.com.cn>)

实验小学印刷厂印刷

各地新华书店经售

*

2000 年 4 月第一版 2000 年 4 月北京第一次印刷
787 毫米×1092 毫米 16 开本 17.25 印张 393 千字

印数 0001—3000 册 定价 30.00 元

版 权 专 有 翻 印 必 究

(本书如有印装质量问题,我社发行部负责退换)

汽轮发电机组是电力工业中重大的关键设备。机组振动涉及到机组的设计、制造、安装以及运行，长期以来形成了自己独特的技术领域。旋转体的振动作为机械振动中的一个专业分支，被称作转子动力学。在专业范围上，汽轮发电机组振动以振动力学为主，与机组结构、运行方式、安装与检修技术、机械量电测技术、信号分析与处理、计算技术和软件技术等多个方面有密切的联系。

汽轮发电机组振动技术以转子动力学的理论为基础，以工程应用为目的，它最重要的特点是理论和实际紧密结合，既可以解决、处理工程中紧迫的具体问题，获取明显的经济和社会效益，又可以从中发现具有理论深度的难题，促进学科研究的新发展。因此，要想在机组振动领域有所创新，理论研究必须建立在工程实际需要的基础上，而非空洞的学院式研究；另一方面，在解决实际机组振动问题中，理论知识和实践经验是同等重要的，它们的结合更可以相辅相成。无数实例说明，忽略其中任一方面，成功率都是有限的。

本书的论述力图体现理论和实际的结合。理论上，一是介绍作者较新的研究和应用的结果，二是阐述对后面章节理解所必须用到的基础理论知识。实际应用方面，则结合作者本人的实践，以具体实例为主，介绍汽轮发电机组振动的分析、判断与处理方法。

全书共有十一章。第一章给出了转子振动的基础性知识，其中的主要结论对从机理上理解机组振动是十分必要的。动压滑动轴承是机组轴系重要部件，它对转子振动起到了决定性作用。第二章是有关滑动轴承的简要理论和实践知识。轴系临界转速和不平衡振动响应是转子轴系振动的两个主要特性。第三章介绍了它们的计算方法、实测方法以及相关的问题。轴系稳定性在 80 年代曾经成为影响国产 200MW 机组安全运行的重大技术问题，稳定性在转子振动理论中也居于重要位置。第四章首先对稳定性理论进行了介绍，然后结合实际，给出了具体机组失稳问题的分析和处理方法。振动测试技术、振动数据分析和处理是解决机组振动的手段，这为从事机组振动的人员提供了十分有益的帮助。第五章、第六章介绍了这些方面的内容。动平衡是现场消除机组振动的主要措施。第七章叙述了现场高速动平衡方法的理论基础和加重计算方法。对机组振动故障成功的诊断，需要丰富的实践经验和理论知识，需要正确的分析方法和思路，还需要技巧甚至直觉。第八章结合作者本人经手的实例，介绍了机组振动主要故障的特征、分析诊断方法和处理方法，以期对读者在处理具体问题时能有所帮助。第九章介绍了有关轴系扭振的计算方法和现场试验技术。第十章给出了机组振动标准的制定、具体内容和使用的有关问题。在机组运行中，有相当一部分轴系事故与振动有直接或间接的

关系，本书第十一章对两种主要振动事故作了详细的介绍，包括从非线性振动角度进行研究得出的结论。

作者写作的意图是使本书成为一本关于机组振动的基础理论与实践兼顾的、有一定深度的专业书籍，供从事汽轮发电机组振动设计、分析和从事现场机组振动工作的科技人员参考，也可供电厂热能动力专业研究生学习使用。

本书由张游祖同志审阅。

本书成书过程中，得到有关单位和同行的协助，在此表示感谢。

机组振动特征，故障的分析诊断方法与思路，常常不是唯一的或最佳的，本书仅根据作者本人的思想和案例进行了论述，难免有片面性和局限性，欢迎读者就此给出自己的观点和经验。如果需要，可与作者直接联系，地址为南京东南大学振动控制与信息系统研究所，邮政编码 210096，电话（025）3794919，Email: lu@seu.edu.cn。

作者

1999 年 4 月

前 言

第一章 转子振动概述	1
第一节 机械振动基础	1
第二节 弹性体振动	9
第三节 转子振动	13
第二章 滑动轴承理论和实践	18
第一节 动压润滑基本概念	18
第二节 轴承的几何参数、静特性和动特性	22
第三节 汽轮发电机组滑动轴承	28
第三章 轴系的临界转速和不平衡振动响应	32
第一节 轴系临界转速的基本概念	32
第二节 临界转速计算方法	32
第三节 与临界转速相关的几个问题	45
第四节 机组临界转速的现场实测及确定	49
第五节 不平衡响应的物理意义	51
第六节 不平衡响应的 Riccati 算法	52
第七节 转轴不平衡线性响应下的强度性能计算	56
第四章 汽轮发电机组轴系稳定性	64
第一节 振动稳定性概述	64
第二节 动压径向轴承油膜失稳机理	71
第三节 转子-轴承系统稳定性数值算法 (R-P 法)	74
第四节 实际机组轴系稳定性分析与诊断	80
第五节 汽流激振	96
第五章 振动测试技术	105
第一节 机组振动测量的基本概念	105
第二节 传感器	110
第三节 振动测试、分析仪表、仪器和系统	117
第四节 现场振动测试	121
第六章 振动数据分析及处理	125
第一节 振动数据分析方法	125
第二节 稳态数据和瞬态数据的特征图形	128
第三节 振动信号分析中的若干具体问题	136
第七章 机组动平衡	138
第一节 动平衡概况	138
第二节 挠性转子高速动平衡的理论基础	139
第三节 现场高速动平衡实际使用的方法	145

目 录

第四节	现场动平衡的几个具体问题	152
第八章	机组振动故障诊断技术	155
第一节	机组故障诊断概况和故障特征汇总	155
第二节	质量不平衡	156
第三节	动静碰摩	166
第四节	油膜失稳和汽流激振	173
第五节	结构共振	182
第六节	结构刚度不足	190
第七节	联轴器不对中	191
第八节	裂纹转子	191
第九节	转子中心孔进油	199
第十节	转轴截面刚度不对称	201
第十一节	发电机振动故障	205
第九章	轴系扭转振动	207
第一节	机组轴系扭振及其产生的原因	207
第二节	轴系扭振特性计算	209
第三节	轴系扭振特性的现场实测	211
第四节	大型机组轴系扭振计算和试验	218
第十章	机组振动标准	224
第一节	标准制定的原则	224
第二节	机组轴承振动和轴振动标准	229
第三节	标准的使用和保护值的设定	231
第十一章	轴系振动事故及其防范	233
第一节	大轴弯曲事故	233
第二节	轴系断裂事故	238
第三节	轴系非线性振动和轴系断裂	247
第四节	轴系断裂的防范措施	266
	参考文献	269

转子振动概论

转子动力学是汽轮发电机组振动的理论基础是深入了解和研究机组振动的必备知识。

第一节 机械振动基础

一、简谐振动的基本概念和表示法

机械振动是指质点或机械动力系统在某一稳定平衡位置附近随时间变化所做的一种往复运动。它是一种特殊而又广泛存在的运动形式，自然界中有很多运动都可以归属为机械振动。

和任何机械运动一样，振动的形态用位移、速度和加速度来描述。按照这些运动量随时间变化的规律，振动可以划分为简谐振动、周期振动、非周期振动和随机振动四种形式。简谐振动是运动量随时间按谐和函数的形式变化；如果运动量的变化经过一个固定的时间间隔不断重复，这样的振动是周期振动；反之，如果振动量的变化随时间不呈现重复性，则是非周期振动，例如爆炸使得建筑物出现的衰减的振动；对任一给定时刻的运动量不能预先确定的振动是随机振动，如行驶中的汽车地板的振动。

在大多数情况下，汽轮发电机组振动的激振力来自于周期旋转的轴，因而，机组振动多数是周期振动。它们一般可以被分解为若干个简谐振动。个别情况下，也会呈现为单一的简谐振动的形式。

我们的叙述就从简谐振动开始。

对于位移、速度、加速度等运动量随时间按谐和函数变化的简谐振动，它的标准的数学表达式为：

$$x = A \sin(\omega t + \phi) = A \sin(2\pi f t + \phi) = A \sin\left(\frac{2\pi}{T} t + \phi\right) \quad (1-1)$$

式中 A ——位移幅值，它是指做简谐振动的物体离开平衡位置的最大距离，量值是单峰值，即振动测量中经常用到的峰峰振幅值的一半，mm 或 μm ；

ω ——圆频率，每秒中转过的弧度，rad/s；

f ——振动频率，每秒振动次数，Hz；

T ——振动周期，运动重复一次所需要的时间，s。

这几个量值之间存在这样的关系：频率与周期互为倒数，频率的 2π 倍是圆频率，即

$$T = \frac{1}{f}$$

$$\omega = 2\pi f$$

式 (1-1) 中的 ϕ 是初始相位角。

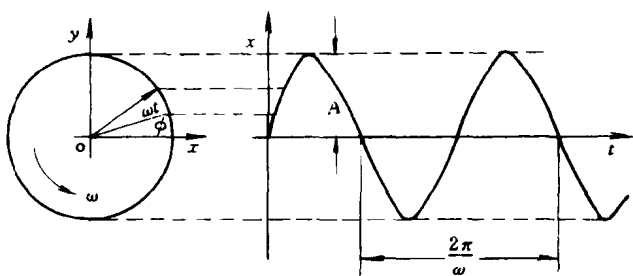


图 1-1 简谐振动振幅-时间曲线

式(1-1)在以 x 轴为时间, y 轴为位移的直角坐标系中表示为图 1-1 中的曲线。这个曲线可以看作是矢量 A 从初始位置 ϕ 起, 以角速度 ω 绕原点 o 逆时针匀速转动, 在 y 轴上的投影的连线。任一时刻 t , 矢量 A 与 x 轴的夹角为 $\omega t + \phi$, 它在 y 轴上的投影即是式(1-1)的 x 。

将式 (1-1) 对时间 t 求导得到速度 v , 即

$$\begin{aligned} v &= \frac{dx}{dt} = A\omega \cos(\omega t + \phi) = V \cos(\omega t + \phi) \\ &= V \sin\left(\omega t + \phi + \frac{\pi}{2}\right) \end{aligned} \quad (1-2)$$

式中的 $V = A\omega$, 是最大速度。

再将式 (1-2) 对 t 求导, 得到加速度 a , 即

$$\begin{aligned} a &= \frac{dv}{dt} = -A\omega^2 \sin(\omega t + \phi) \\ &= -a \sin(\omega t + \phi) \\ &= a \sin(\omega t + \phi + \pi) \end{aligned} \quad (1-3)$$

式中的 $a = A\omega^2$, 是最大加速度。

式 (1-1)、式 (1-2) 和式 (1-3) 表明简谐振动的位移、速度、加速度都随时间以同样的频率按谐和函数变化。三个量的最大幅值不相同, 幅值之间依次之比均为 ω , 相位之

间的关系固定, 依次超前 $\frac{\pi}{2}$, 即速度超前位移 $\frac{\pi}{2}$, 加速度超前速度 $\frac{\pi}{2}$ 。图 1-2 表明了这三个运动量之间的相位关系。

如果将位移、速度和加速度用矢量图表示 (图 1-3), 可以更清楚地看到它

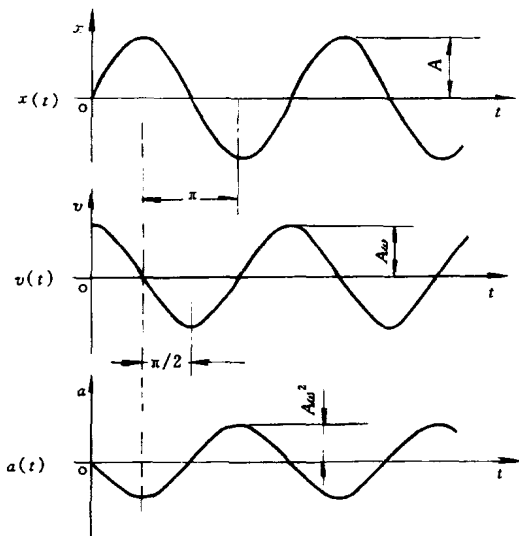


图 1-2 时域图中位移、速度、加速度之间相位关系

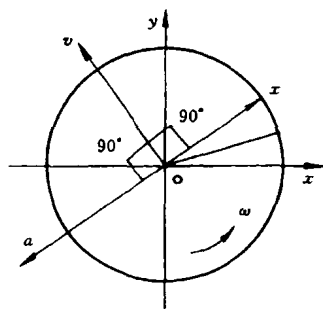


图 1-3 矢量图中位移、速度、加速度之间相位关系

们之间的相位关系。对位移和速度向量的求导，实际上相当于将原矢量顺转 90° ，这样就形成了速度、加速度分别超前位移 90° 和 180° 的状况。三个矢量在空间保持这个固定的相位关系一同逆时针旋转，形成了图 1-2 所示的时域波形。

二、单自由度系统无阻尼自由振动

振动系统的自由度，是指在任何时刻确定系统在空间的几何位置所需要的独立坐标的个数。一个质点在空间有三个自由度，如果限制它只在一个方向上运动，则只有一个自由度。可以简化为一个质点且只能在一个方向运动的振动系统，是单自由度系统。简化为多个质点的系统是多自由度系统。这两种系统又统称为离散系统，都是由集中质量和不计质量的弹性元件组成的。轴类零件如果不作简化，在振动力学中被视为弹性体，它是具有分布质量和分布弹性的连续系统。

就系统中是否含有阻尼，又可以将其分为无阻尼系统和有阻尼系统。两者数学上的区别在于，有阻尼要比无阻尼在二阶微分方程的表示式中多出一个一阶项，数学上的处理将因之而复杂一些。

图 1-4 是一个质量为 m 的重块用一根线性弹性的螺旋弹簧悬挂于一支承处，如果质量 m 只能在垂直方向运动，而且弹簧的质量与重块的质量相比很小，这个系统可以认为是单自由度系统。单自由度系统任一瞬间的状态用一个坐标表示。取一个垂直向下的坐标 x ，坐标原点在重块静止的位置。任一时刻重块的位置可以用它在垂直方向离开平衡点的距离 x 来确定。

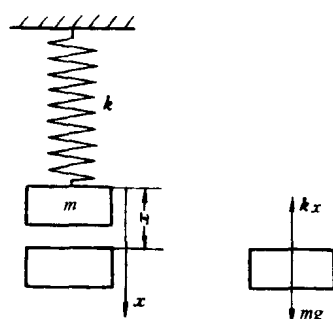


图 1-4 单自由度无阻尼自由振动模型

重块静止不动地悬挂于弹簧末端时，弹簧末端的静伸长 δ_{st} 为

$$\delta_{st} = \frac{mg}{k} \quad (1-4)$$

式中的 k 是弹簧的刚度系数，表示弹簧产生单位长度变形所需要的力。 k 的量纲是 [力的单位]/[长度单位]，在国际单位制中是 N/cm。

现在使重块沿 x 方向偏离平衡位置，然后放松，重块即会开始振动。这种仅仅依靠运动系统内的弹簧的弹力来维持的振动，称为自由振动。

重块在任一位置 x 时受到的弹簧力指向平衡位置，即坐标原点，大小为 $-kx$ (图 1-4)。利用牛顿第二定律可以得到：

$$m\ddot{x} = -kx \quad (1-5)$$

引进符号 $\omega^2 = \frac{k}{m}$ ，式 (1-5) 变为

$$\ddot{x} + \omega^2 x = 0 \quad (1-6)$$

式 (1-6) 是一个二阶线性齐次方程， ω 是自由振动的角频率。通解是

$$x = C_1 \cos \omega t + C_2 \sin \omega t \quad (1-7)$$

式中的 C_1 、 C_2 是由初值条件确定的任意常数。 $\cos \omega t$ 和 $\sin \omega t$ 是 2π 的周期函数，因而

$$\omega(\tau + t) - \omega t = 2\pi \quad (1-7a)$$

从式 (1-7a) 可得周期 τ

$$\tau = \frac{2\pi}{\omega} = 2\pi\sqrt{\frac{m}{k}} \quad (1-7b)$$

式 (1-7b) 表明, 振动周期取决于重块的质量 m 和弹簧的刚度系数 k 。频率 f 为

$$f = \frac{1}{\tau} = \frac{\omega}{2\pi} = \sqrt{\frac{k}{m}} \frac{1}{2\pi}$$

振动频率与弹簧刚度的平方根成正比, 与质量的平方根成反比。这表明, 刚度越高, 振动频率越高; 质量越大, 振动频率越低。这个定性的结论对于一般的振动系统有普遍的意义。

假设初始瞬间 ($t=0$) 重块偏离平衡位置的位移为 x_0 , 速度为 $\dot{x}_0$, 将这些初始条件代入方程 (1-7), 可以得到

$$C_1 = x_0$$

对方程 (1-7) 求导, 并代入 $t=0$, 得到

$$C_2 = \frac{\dot{x}_0}{\omega}$$

将 C_1 、 C_2 代入方程 (1-7), 可以得到重块自由振动的完整表达式:

$$x = x_0 \cos \omega t + \frac{\dot{x}_0}{\omega} \sin \omega t \quad (1-8)$$

式 (1-8) 表示振动由两部分组成, 一部分是取决于初始位移的余弦函数部分, 另一部分是取决于初始速度的正弦函数部分, 两者的代数和构成了重块自由振动时在任一时刻的位置。

注意式中的 f , 等于 $\frac{1}{2\pi}\sqrt{\frac{k}{m}}$, 它和初始条件无关。一旦这个系统的物理参数, 如弹簧刚度 k 和质量 m 已确定, 它的自由振动的频率 f 也就随之确定。这个 f 被称作系统的固有频率, 或称作自然频率。

对于图 1-4 所示的单自由度系统, 或是 $x_0 \neq 0, \dot{x}_0 = 0$, 这时重块仅在初始时刻没有处于原始平衡位置, 自由振动的形成是受到弹簧力的作用开始的; 或是 $\dot{x}_0 \neq 0, x_0 = 0$, 初始时刻

重块在平衡位置, 但受到一个冲击力的作用, 具有初始速度, 所做的运动也是自由振动; 还可以是 $x_0 \neq 0, \dot{x}_0 \neq 0$ 。自由振动过程中重块除始终受到弹簧力作用外, 不再受到任何其它主动力的作用。

三、单自由度无阻尼强迫振动和周期干扰力

在实际中还有这样的情况: 重块始终受到一个周期干扰力的作用, 这时系统的运动称为强迫振动。

作为强迫振动的例子, 考虑图 1-5 所示的弹簧悬挂着质量为 m 的马达系统, 马达两侧受到约束,

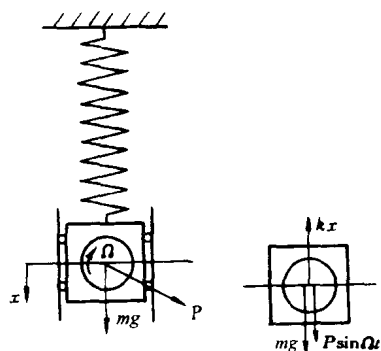


图 1-5 单自由度无阻尼强迫振动模型

只能在垂直方向运动。假定马达转子偏心 r 的位置有一个不平衡质量 m_1 ，当转子以等角速度 Ω 转动时，这个质量产生的旋转离心力 P 为

$$P = m_1 \Omega^2 r$$

假设 $t=0$ 时刻转子上的不平衡质量位于水平右方，任一时刻 t 离心力在垂直方向上的分力则是 $P \sin \Omega t$ 。这个周期干扰力作用在马达上，对马达的受力分析可以得到运动方程：

$$m\ddot{x} = -kx + P \sin \Omega t \quad (1-9)$$

同样引进符号 $\omega^2 = \frac{k}{m}$ 和 $q = \frac{P}{m}$ ，式 (1-9) 变为

$$\ddot{x} + \omega^2 x = q \sin \Omega t \quad (1-10)$$

设方程 (1-10) 的特解是

$$x = C_3 \sin \Omega t \quad (1-11)$$

将 x 代入方程 (1-10)，可以得到

$$C_3 = \frac{q}{\omega^2 - \Omega^2}$$

这样，特解

$$x = \frac{q}{\omega^2 - \Omega^2} \sin \Omega t$$

将特解加到齐次方程通解 (1-7) 的后面，得到

$$x = C_1 \cos \omega t + C_2 \sin \omega t + \frac{q}{\omega^2 - \Omega^2} \sin \Omega t \quad (1-12)$$

这就是强迫振动方程 (1-9) 的全部解。

解的前两项代表自由振动，是瞬态项；第三项由周期干扰力决定，代表强迫振动。可以看到，强迫振动的频率为 $\frac{\Omega}{2\pi}$ ，它和周期干扰力的频率是相同的。

先不管自由振动项，只讨论强迫振动项。特解可以变换为下列形式：

$$x = \left(\frac{P}{k} \sin \Omega t \right) \left(\frac{1}{1 - \Omega^2 / \omega^2} \right) \quad (1-13)$$

式中第一个括号内为干扰力静力作用下产生的位移，第二个括号内为放大因子，含有系统的固有频率和干扰力频率，如果用 β 代表这个放大因子，则

$$\beta = \frac{1}{1 - \Omega^2 / \omega^2} \quad (1-14)$$

利用式 (1-14) 可以绘制出 $\beta - \Omega/\omega$ 曲线，图形如图 1-6 所示，即为幅频特性曲线。

式 (1-14) 和图 1-6 中曲线显示，放大因子 β 取决于频率比 Ω/ω 。当干扰力频率

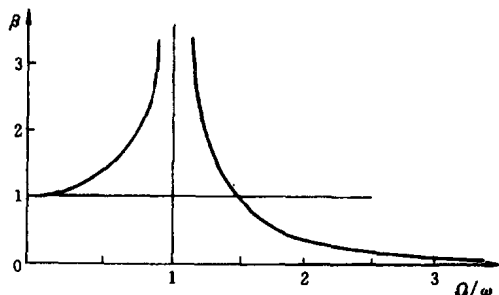


图 1-6 单自由度无阻尼强迫
振动幅频特性曲线

$$\begin{aligned}\Omega = 0 \text{ 时,} & \quad \beta = 1; \\ \Omega = \omega \text{ 时,} & \quad \beta = \infty; \\ \Omega = \infty \text{ 时,} & \quad \beta = 0.\end{aligned}$$

这就是说，干扰力频率为零，不平衡质量不转动时，放大因子等于1，由式 (1-13) 可以知道，这时的重块位移为零。当不平衡质量开始转动，强迫振动项变为与转速同频率的周期运动时，随转速的增加，振幅比静态位移 P/k 逐渐变大。当干扰力频率与系统固有频率相等时，振幅变得无限大。其后，随着干扰力频率的继续增加，放大因子逐渐减小。干扰力频率趋于无穷大时，放大因子趋于零，强迫振动项的振幅趋于零。

Ω 与 ω 相等，振幅无穷大时的情况被称为共振。

考虑 $\frac{1}{1-\Omega^2/\omega^2}$ 的正负号，可以看到：当 $\Omega < \omega$ 时，放大因子为正，由式 (1-13) 知，此时重块的位移与干扰力同方向；当 $\Omega > \omega$ 时，放大因子为负，即重块的位移与干扰力反方向。

这里讨论的单自由度自由振动和强迫振动中，都没考虑摩擦力和空气阻力的影响。这样，自由振动时，振幅随时间保持不变；强迫振动中，当激振力频率与系统固有频率相等时，振幅无限大。

实际的振动系统不会是这样无阻尼的理想状况，阻尼力总是或多或少地存在的，它们通常来自接触面之间的摩擦、空气或其它流体的阻力、材料的内摩擦等。接近实际的运动方程应该计入这些阻尼力。

四、单自由度系统有阻尼的自由振动

现在我们介绍单自由度系统计入粘滞阻尼后会是什么样的情况。

数学上的处理最为简单的是阻尼力与速度成比例的“黏滞阻尼”。如果用 c 表示黏滞阻尼系数，同时考虑到阻尼力总是和速度方向相反，则在自由振动方程中加入的阻尼力项应为 $-c\dot{x}$ 。这样，运动方程可以写为：

$$m\ddot{x} = -kx - c\dot{x} \quad (1-15)$$

为数学上处理的方便，引入系数 n ，设

$$2n = \frac{c}{m}$$

则自由振动方程 (1-15) 改写为

$$\ddot{x} + 2n\dot{x} + \omega^2 x = 0 \quad (1-16)$$

求解方程 (1-16)，假设解为

$$x = Ce^{rt}$$

其中 e 为自然对数的底， t 为时间， C 为待定常数。将 x 代入 (1-16)，得到

$$r^2 + 2nr + \omega^2 = 0$$

由此可以得到

$$r = -n \pm \sqrt{(n^2 - \omega^2)}$$

首先考虑 $n^2 < \omega^2$ 的情况，这时根号下为负值，引入符号 ω_d ，

$$\omega_d^2 = \omega^2 - n^2$$

得到两个共轭复根

$$r_1 = -n + i\omega_d \text{ 和 } r_2 = -n - i\omega_d$$

将它们代入 x ，得到方程 (1-16) 的两个解，并将这两个解重新组合，得到

$$x_1 = \frac{C_1}{2}(e^{r_1 t} + e^{r_2 t}) = C_1 e^{-nt} \cos \omega_d t$$

$$x_2 = \frac{C_2}{2}(e^{r_1 t} - e^{r_2 t}) = C_2 e^{-nt} \sin \omega_d t$$

进而可以得到用复数表示的通解为

$$x = e^{-nt}(C_1 \cos \omega_d t + C_2 \sin \omega_d t) \quad (1-17)$$

式中 C_1 、 C_2 是由初始条件决定的常数，因子 e^{-nt} 随时间减小。式 (1-17) 与无阻尼自由振动解 (1-7) 形式相同，它代表了角频率为 ω_d 的周期函数。这里

$$\omega_d = \sqrt{\omega^2 - n^2}$$

ω_d 称为阻尼自由振动的角频率。可以看到，计入阻尼后的振动频率要比无阻尼的自由振动频率有所减小。

把初始条件 $\dot{x}_0$ 和 x_0 代入方程 (1-17)，得到

$$x = e^{-nt} \left(x_0 \cos \omega_d t + \frac{\dot{x}_0 + nx_0}{\omega_d} \sin \omega_d t \right)$$

上述解也可以写成

$$x = A e^{-nt} \cos(\omega_d t - \alpha_d)$$

其中

$$A = \sqrt{(C_1^2 + C_2^2)} = \sqrt{x_0^2 + \frac{(\dot{x}_0 + nx_0)^2}{\omega_d^2}}$$

$$\alpha_d = \text{tg}^{-1}(C_1/C_2) = \text{tg}^{-1}\left(\frac{\dot{x}_0 + nx_0}{\omega_d x_0}\right)$$

上述解示于图 1-7。

这个解可以看作是沿包络线 $\pm A e^{-nt}$ 随时间衰减的振动。

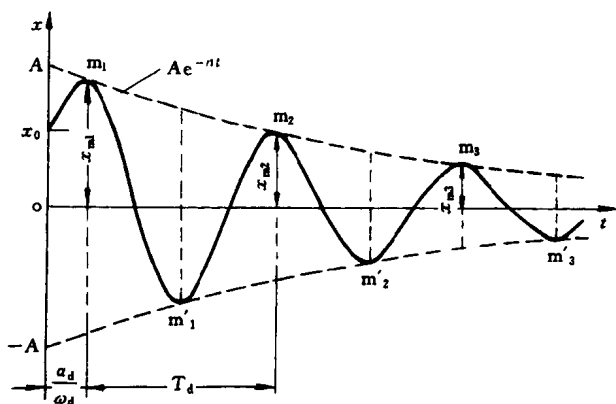


图 1-7 单自由度有阻尼自由振动振幅-时间曲线

五、单自由度有阻尼的强迫振动

计入阻尼后的强迫振动方程为

$$m\ddot{x} = -kx - c\dot{x} + P\sin\Omega t \quad (1-18)$$

式 (1-18) 可以做和自由振动类似的变换, 改写为

$$\ddot{x} + 2n\dot{x} + \omega_d^2 x = q\cos\Omega t \quad (1-19)$$

方程的特解采用下列形式:

$$x = M\cos\Omega t + N\sin\Omega t \quad (1-20)$$

将上述试探解代入方程 (1-19), 可以得到:

$$M = \frac{q(\omega_d^2 - \Omega^2)}{(\omega_d^2 - \Omega^2)^2 + 4n^2\Omega^2}$$

$$N = \frac{q(2n\Omega)}{(\omega_d^2 - \Omega^2)^2 + 4n^2\Omega^2}$$

方程 (1-19) 的通解就是自由振动方程 (1-15) 的齐次解, 这样, 方程 (1-19) 的全部解就是

$$x = e^{-nt}(C_1\cos\omega_d t + C_2\sin\omega_d t) + M\cos\Omega t + N\sin\Omega t \quad (1-21)$$

解的前两项代表阻尼自由振动, 后两项代表阻尼强迫振动。

由于因子 e^{-nt} , 自由振动随时间的持续要逐渐衰减下来, 强迫振动借干扰力的作用无限期地保持着, 形成与干扰力同频的稳态振动。

稳态反应可以表示为下列的等效形式。

$$x = A\cos(\Omega t - \theta) \quad (1-22)$$

式中

$$A = \sqrt{M^2 + N^2}$$

$$\theta = \text{tg}^{-1}\left(\frac{2n\Omega/\omega_d^2}{1 - \Omega^2/\omega_d^2}\right) \quad (1-23)$$

如果引入阻尼比 γ , $\gamma = \frac{n}{\omega_d} = \frac{c}{c_{cr}}$, 相位 θ 可以进一步写为

$$\theta = \text{tg}^{-1}\left(\frac{2\gamma\Omega/\omega_d}{1 - \Omega^2/\omega_d^2}\right)$$

至此可以看到, 具有粘滞阻尼的稳态强迫振动, 是一种具有定常振幅为 A 、相位为 θ 和频率为 Ω 的简谐振动。

与无阻尼强迫振动不同, 有阻尼的放大因子为

$$\beta = \frac{1}{\sqrt{(1 - \Omega^2/\omega_d^2)^2 + (2\gamma\Omega/\omega_d)^2}}$$

这时所得到的幅频曲线变为图 1-8 中的形式。

从图中的曲线可以看到, 放大因子不仅取决于 Ω/ω_d , 还取决于阻尼比 γ 。有阻尼后的情况和无阻尼时的幅频特性曲线相比, 随阻尼的增加, 共振时的最大振幅由无穷大变为

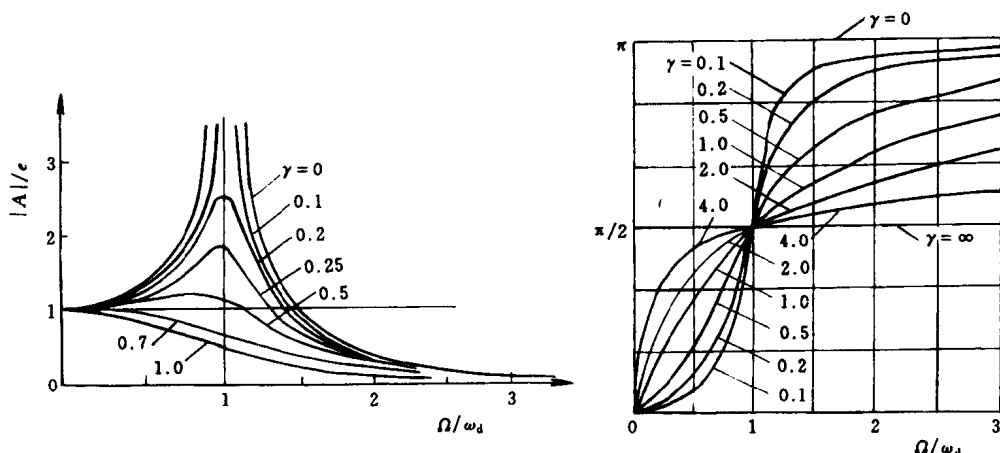


图 1-8 单自由度有阻尼强迫振动幅频、相频特性曲线

有限值。阻尼越大，共振时的最大振幅越小；另外， β 的最大值发生在干扰力频率 Ω 与固有频率 ω_d 之比略小于 1 的时刻。

令 β 对 Ω/ω_d 的导数为零，可以得到，当 $\Omega/\omega_d = \sqrt{1-2\gamma^2}$ 时， β 取极大值。

这里要特别注意强迫稳态振动和干扰力之间的相位关系。

由式 (1-19) 可知，干扰力按 $\cos\Omega t$ 变化，式 (1-22) 所示的强迫振动的响应是按 $\cos(\Omega t - \theta)$ 变化，这就是说，振动响应要滞后于力 θ ，如图 1-5 所示，当干扰力 P 垂直向下时，所悬挂的质量还没有运动到最低位置，而是要在 θ/Ω 后的时刻才能到达最低点。式 (1-23) 说明，这个滞后角 θ 的大小取决于阻尼比和频率比。

不同的阻尼比得到的相频特性曲线如图 1-8 所示，这个图的横坐标是频率比。

在零阻尼的情况下， θ 随 Ω/ω_d 的增大呈阶跃变化。对于所有的 $\Omega/\omega_d < 1$ 的值，振动与干扰力同相，即 $\theta = 0$ ；对于所有的 $\Omega/\omega_d > 1$ 的值，振动与干扰力反同相，即 $\theta = 180^\circ$ 。

当存在阻尼时， θ 随 Ω/ω_d 的增大连续变化。在 $0 < \Omega/\omega_d < 1$ 区间， θ 的值介于 0° 到 90° 之间；在 $1 < \Omega/\omega_d < \infty$ 的区间， θ 的值介于 90° 到 180° 之间；当 $\Omega/\omega_d = 1$ 时，不管阻尼大小， θ 总是等于 90° 。这就是说，共振时，振动总是滞后于力 90° 。

下面可以看到，以上对有阻尼、无阻尼的单自由度自由振动和强迫振动讨论所得到的主要结论，也适用于转子系统的振动。

第二节 弹性体振动

一、引言

汽轮发电机组转子由具有质量和弹性的轴段组成。在一定的情况下，转子可以简化为许多具有质量的点和具有弹性而无质量的轴段依次连接起来的梁。这样的离散系统具有有限多个自由度。转子准确的力学模型应该归属于具有分布质量和分布弹性的连续梁。数学上需要用时间和坐标的函数来描写它的运动形态，根据它的力与运动量之间的关系最后得

到的系统运动方程是偏微分方程。

连续弹性系统的振动偏微分方程只在一些特殊情况下才能求得解析解。对于几何形状复杂的构件，常常将其离散成多自由度系统，用二阶常微分方程描述，再计算数值解。离散系统的质点数取得越多，越接近连续系统，两者物理本质是一样的。对于转子系统，多数情况下离散系统数值解的精度与解析解接近，能够满足要求。但对于转轴振动现象和机理的解释，还是采用连续弹性体更为准确。

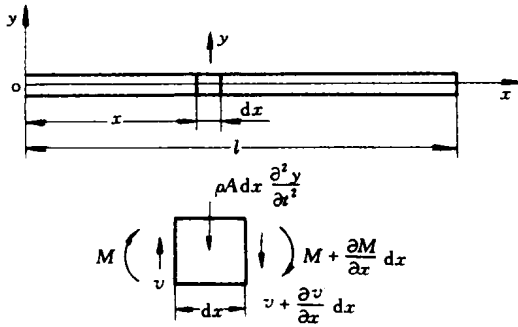


图 1-9 等直梁横向振动单元轴段受力分析

x 处在时刻 t 的横向位移表示为 $y(x, t)$ ， ρ 为梁的体积质量， EI 为截面弯曲刚度， A 为横截面面积。取一段长度为 dx 的微元，根据它在 y 方向上的受力平衡条件可以得到下面的方程：

$$v - v - \frac{\partial v}{\partial x} dx - \rho A dx \frac{\partial^2 y}{\partial t^2} = 0 \quad (1-24)$$

根据力矩平衡条件，可以得到

$$-v dx + \frac{\partial M}{\partial x} dx \approx 0 \quad (1-25)$$

将方程 (1-25) 代入式 (1-24)，得到

$$\frac{\partial^2 M}{\partial x^2} dx = -\rho A dx \frac{\partial^2 y}{\partial t^2} \quad (1-26)$$

利用初等弯曲理论的下列关系式

$$M = EI \frac{\partial^2 y}{\partial x^2}$$

将其代入方程 (1-26)，得到

$$\frac{\partial^2}{\partial x^2} \left(EI \frac{\partial^2 y}{\partial x^2} \right) dx = -\rho A dx \frac{\partial^2 y}{\partial t^2} \quad (1-27)$$

这是梁横向自由振动的一般方程。对于等直梁， EI 是常数，式 (1-27) 变为

$$EI \frac{\partial^4 y}{\partial x^4} dx = -\rho A dx \frac{\partial^2 y}{\partial t^2} \quad (1-28)$$

如果引入符号 a

二、梁的横向振动微分方程及其解

细长杆作垂直于轴线方向的振动时，主要变形形式是梁的弯曲变形，习惯上称作横向振动、径向振动或弯曲振动。

现在我们推导一根等截面的矩形梁（图 1-9）做横向振动时的微分方程。

取 xOy 坐标系，梁的轴向任一点