现代应用数学丛书

塑性论

〔日〕鷲津久一郎 著

上海科学技术出版社

現代应用数学丛书

塑　性　論

〔日〕鷲津久一郎 著
刘　亦　珩　譯

上海科学技术出版社

內 容 提 要

本书是日本岩波书店出版的現代应用数学丛书之一的中譯本。全书共七章，第1章緒論，介紹簡单拉伸的应力应变曲綫；第2章概述了彈性理論及其与塑性理論的异同点，作为討論塑性問題的准备；从第3章开始到第7章都是以书末文献〔9〕〔10〕〔11〕为典范，着重作应用数学的处理。书末另附 Green 定理和特征曲綫等两篇作为附录，同时附有十六种文献以供讀者参考。本书可供高等学校数学系和物理、力学专业的师生及工程师作参考。

現代应用数学丛书

塑 性 論

原书名 塑 性 論

原著者 〔日〕鷲津久一郎

原出版者 岩 波 书 店

譯 者 刘 亦 珩

*

上海科学技术出版社出版

（上海瑞金二路450号）

上海市书刊出版业营业許可証出093号

新华书店上海发行所发行 各地新华书店經售

商务印书館上海厂印刷

*

开本 850×1168 1/32 印張 2 8/32 字数 51,000

1961年11月第1版 1961年11月第1次印刷

印数 1—20,000

統一书号：13119·428

定 价：（十四）0.40元

出版説明

这一套书是根据日本岩波书店出版的"現代应用数学讲座"翻譯而成。日文原书共15卷60册，分成A、B两組，各編有序号。現在把原来同一题目分成两册或三册的加以合并，整理成42种，不另分組編号，陆續翻譯出版。

这套书涉及的面很广，其內容都和現代科学技术密切有关，有一定参考价値。每一本书收集的資料都比較丰富，而叙述扼要，篇幅不多，有利于讀者以較短时間掌握有关学科的主要內容。虽然，这套书的某些观点不尽适合于我国的情况，但其方法可供参考。因此，翻譯出版这一套书，对我国学术界是有所助益的。

由于日文原书是1957年起以讲座形式陆續出版的，写作时間和篇幅的限制不可避免地会影响原作者对內容的处理，为了尽可能地减少这种影响，我們在每一譯本中，特請譯者或校閱者撰写序或后記，以介紹有关学科的最近发展状况，并对全书內容作一些評价，提出一些看法，結合我国情况补充一些資料文献，在文內过于簡略或不足的地方添加了必要的注釋和改正原书中存在的一些錯誤。希望这些工作能对讀者有所帮助。

承担翻譯和校閱的同志，为提高书籍的质量付出了巨大劳动，在此特致以誠摯的謝意。

欢迎讀者对本书提出批評和意見。

上海科学技术出版社

譯者序

这本小册子是岩波应用数学丛书內有关力学方面的七种著作之一。这七种著作差不多都是在力求使用統一的几何学方法的基础上写成的。所謂統一的几何学方法，乃是以近藤一夫为首的20多位日本工程学者及应用数学者自1951年以来共同研究的方向。他們的研究成果曾經汇集出版，叫作"工学基础問題的几何学統一的研究"，以后簡称为"汇編"。其中所处理的工学問題范圍很广，有电路网絡、工学力学系統(特别是轉动电机)、彈性塑性、流体力学以及其他方面的一些問題。其主要精神是以Gabriel Kron对于轉动电机分析所提出的思想为基础，进一步推广到对轉动流体机、航空机以及其他近代工业机器的分析。找出这些机器所形成的力学系統，作出它的表現空間，将状态的变化看作坐标变換，机器类型的不同当作約束条件，而建立該空間的几何学，这样就将机器分析变成了几何学的研究。又将这种研究方法应用到連續介质力学的基本問題中，将完全无应力状态看作Lagrange状态，任意变形状态看作Euler状态，于是将連續介质力学看成是在Euler坐标变換群下对于几何学的研究。由于Lagrange状态是Riemann空間的，Euler状态是Euclid空間的，对于所有Euler状态都对应着同一个Lagrange状态(即无应力状态)，所以这种几何学是保持Riemann度量的空間几何学，当然是一种Riemann几何学。因为Euler状态是Euclid的，所以要求Riemann曲率張量为零，将这个条件用不同的形状写出来就得到通常所說的几何方程及协調条件。这样看来，在普通Euclid空間內，表面上不相同的两組条件，实质上完全是等同的。而且借此还可以直接处

理非綫性問題及大变形和大变位的問題。总的說来，这种几何学方法的要点是利用張量算法，通过近代微分几何空間形式的分析来处理力学及工学上的基本問題。

这本小册子也是根据同一观点写成的。因为它是出版在近藤的"变形几何学"及其他小册子之后的，所以基本理論及几何化过程没有重述，只着重提出"几何方程"就是"协調条件"。这可能使初学者及不习惯于运用 Riemann 几何学思想的讀者引起誤解，所以在閱讀本书时最好参看比它先出版的各种小册子。不过本著以后各章只是用了一些張量記号，并未使用張量算法及 Riemann 几何学，讀起来并不会感到很大困难。本书的材料主要是将 R. Hill 的"塑性的数学理論"里特别是数学的部分加以介紹，对于塑性論的物理概念和实际应用叙述得不多。对塑性論不熟悉的讀者，可以参照初等塑性理論的专书閱讀。这类书籍国内已經出版的不少了。

本书共分七章，前两章是緒論性质的，将彈性理論作了概括的叙述，特别是对彈性和塑性的关系以及二者的异同点作了比較詳細的說明，給第 3 章以后的論述打下了基础。第 3 章介紹塑性論的基础，推导出基本方程。第 4 章解說变分法原理，对利用变分法解决塑性論問題作了較全面的叙述。第 5 章处理塑性平面应变問題，第 6 章极限分析，第 7 章全应变塑性理論等，討論得都比較簡单，虽然也涉及到一些实际問題，但語焉不詳。

苏联学者在这方面有着很多貢献，但本书很少提到。苏联学者所著的塑性理論专著，在我国已經翻譯出版很多，讀者在学习时可以尽量多加参閱，以补书中之缺。

最后，本譯稿曾經上海交通大学工程力学系李康先同志予以詳細校閱，提出了若干宝貴的意見，特此表示感謝。

刘亦珩 1961 年 6 月于西北大学

序

按照 R. Hill 在《塑性的数学理論》中指出的，塑性論是和彈性論对应的术語，它是塑性变形体特别是金属的应力应变的数学理論的綜称。

在設計构件时，为了使构件能經受給定的荷载，需要解决构件各部材料的尺寸的选取問題。这时，若有不发生永久变形的設計条件，那末只要使各部材料的应力不超过比例极限或屈服应力就成了，而且在它的分析里也只需要用到彈性理論。但若有在靜荷载下不发生破坏断裂的設計条件，則其分析就需应用塑性理論了。

至于压延及扭曲等塑性加工問題，因其目的是引起永久变形，所以这些內容也是塑性論里所特有的。

本书是估計讀者已經有了一些关于彈性論的預备知識的前提下写的，所以在第 2 章中介紹彈性論时仅略述它的大概，着重于闡明它和第 3 章以后的塑性論的异同点。第 3 章以后将以书末文献 [9]，[10]，[11] 作典范，着重作应用数学的处理。但由于篇幅的限制，对塑性論基础的实驗及物理学的考察沒有介紹，而且对塑性論的应用方面也不得不大加精簡。对这些方面有兴趣的讀者，可以参閱书末的参考文献以及这些文献里所引用的論文。文献[14]是概述塑性論最近进展的良好資料。

目　录

第1章 緒　論

§1 簡单拉伸試驗的应力应变曲綫

檢查金属材料变形特性的最簡单的方法是簡单拉伸試驗。我們将先說明它。对图1.1所示的标点距离为 l_0，断面积为 A_0 的金属試件，作用拉伸荷載 P（这叫作加載），則标点距离伸长而断面积縮小。将它們各命为 l 及 A。若在纵軸上取平均应力 $\sigma=P/A$，在横軸上取应变 $\varepsilon=\ln(l/l_0)$ 时❶，随着 P 的增加，σ 和 ε 便描出图1.2形状的应力应变曲綫。这里 ln 是自然对数，且在小变形的范圍里有 $\sigma\approx P/A_0$ 及 $\varepsilon=\ln\{1+(l-l_0)/l_0\}\approx(l-l_0)/l_0$。从图1.2可以看出，在应力适当小的范圍里，$\sigma$ 和 ε 保持綫性关系，除掉荷載时（这叫作卸載）試件就恢复原长 l_0。使 σ 和 ε 的綫性关系成立的应力最大值（图1.2的 P 点）叫作比例极限。在比例极限内恒有 $\sigma=E\varepsilon$，比例常数 E 叫作 Young 模量。这时若同时测定横向应变 δ，就可以知道比数 $-\delta/\varepsilon$ 是一个常数，这个常数用 ν 表示，叫作 Poisson 比。即是，将直棒拉伸时，若将比例极限内的纵向拉伸应变命为 ε，

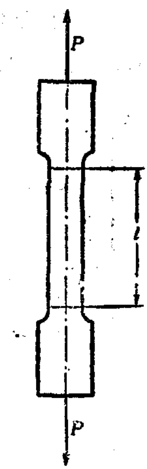

图1.1 簡单拉伸試驗

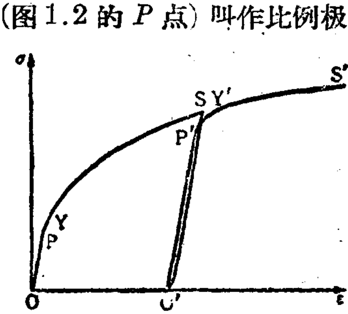

图1.2 应力应变曲綫

❶ 注意在第2章以后，σ 将用于另一种意义，参照(4.5)。

則在横向发生收縮应变 $\nu\varepsilon$。屈服应力(图 1.2 的 Y 点)定义为：当荷載全部去掉后能使試件恢复到原长 l_0 的最大应力。但若作精密測定时，則不論加的荷載怎样小，当使荷載全部卸除时，也必然殘留下和該荷載相当的微小永久应变。所以，习慣上往往把能生成 0.2% 的永久应变的应力定义为屈服应力。若将荷載恢复到原来的情形时，变形也随之消失而恢复原形，这种性质叫作彈性。与此相反，卽使将荷載全部卸掉，也还殘留下永久应变的性质叫作塑性。

对于大多数的金屬，若想使塑性变形持續进行时，非增加应力不可，卽是在大多数的情形里，$\sigma-\varepsilon$ 曲綫恒有 $\frac{d\sigma}{d\varepsilon}>0$。这个現象叫作应变强化或者加工硬化。在一般的情形下，为了使試件产生应变增量 $d\varepsilon$ 所需要的应力增量 $d\sigma$，亦卽 $d\sigma/d\varepsilon$，恒随 ε 的增加而減少，換言之，应变强化的比例逐漸縮小，而应力应变曲綫逐漸弯曲。經过屈服点以后，$\sigma-\varepsilon$ 曲綫平行于 ε 軸，卽 $d\sigma/d\varepsilon=0$，这样的材料叫作理想塑性材料(图 1.3)。

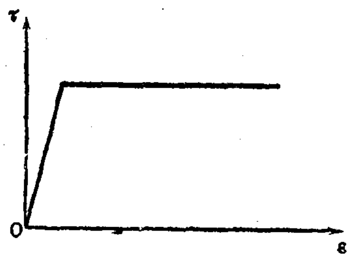

图 1.3 理想塑性材料

再回到图 1.2。若給与某种程度的塑性变形后使荷載自 S 減少，那末当沿着图的 SO' 使荷載回复到 0 时，便生成 OO' 的永久应变。在此情形，SO' 几乎平行于 PO。自 O' 再加載，則 $\sigma-\varepsilon$ 曲綫重合于 $O'P'$，在这个范圍里是彈性变形，P' 是具有永久应变 OO' 的材料的新的比例极限。經过 P' 再加上微小塑性应变，使应力接近原来的 S 值时，則曲綫在 Y' 附近剧烈弯曲形成 $Y'S'$，好象是从 YS 延长来的。

为了对于这种材料作数学塑性論的研究，有必要作如下的理

想化(图 1.4)，即使 P 和 Y 一致。材料到 P 点保持着綫性的应力应变关系和彈性，但 P 是屈服点。又 S, Y', P' 一致，且 SO' 及 $O'P'Y'$ 都和 PO 平行。S 可以看成是受有初始应变 OO' 的試件的屈服应力。若將这种受有初始应变的金屬的应力应变曲綫 $O'SS'$ 和完全不受初始应变的金屬的应力应变曲綫 OPS 作比較，就可以看出它的屈服应力較高，而且超过屈服应力后曲綫急烈弯曲，具有接近理想塑性材料的特征。

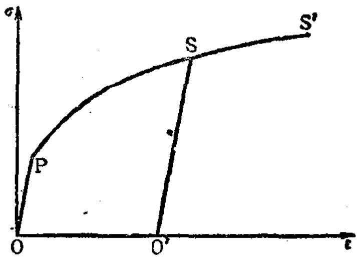

图 1.4 应力应变曲綫的理想化

如上所述，在彈性域里，应力和应变間有一一对应的关系，当指定应力时，則其对应的应变可以由直綫 OP 唯一地决定。但在塑性域里却沒有这样的对应关系，不过只要利用加載和卸載的适当配合，就可达到曲綫 $OPSS'$ 和横軸間的任意点(σ, ε)。在塑性域里应变不仅取决于最終状态的应力，而且还有賴于加載路綫。因此，塑性論里的应力应变关系比彈性論里的应力应变关系要复杂得多。

以上是对拉伸試驗所作的說明。若再作压縮試驗及扭轉試驗，那末就可以根据它們作成三維塑性論的基础。

本书在叙述塑性論以前，先在第 2 章概述彈性的理論，作为第 3 章进行研討塑性論和彈性論的异同点的資料。但由于篇幅所限，第 2 章的彈性理論只能做到概述的程度。讀者欲知其詳，可以參閱卷末的文献[1]至[8]及它們里边所引用的文献。

第2章　彈性論概述

§2　应变与协調条件

· 在空間内取直角坐标 x_1, x_2, x_3, 命 x_1, x_2, x_3 方向的单位向量各为 $\boldsymbol{i}_1$, $\boldsymbol{i}_2$, $\boldsymbol{i}_3$, 命变形前物体内任意一点 P_0 所对应的位置向量是 $\boldsymbol{r}_0$, 那末有

$$\boldsymbol{r}_0 = x_1\boldsymbol{i}_1 + x_2\boldsymbol{i}_2 + x_3\boldsymbol{i}_3 = \sum_{i=1}^{3} x_i\boldsymbol{i}_i \tag{2.1}$$

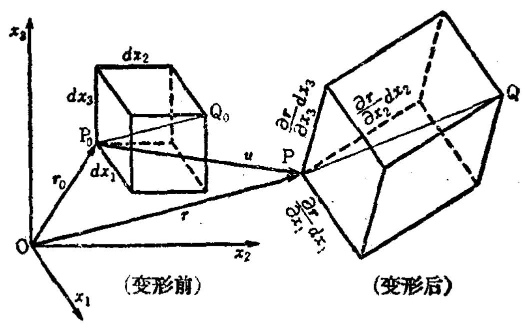

图2.1　变　　位

(图2.1)。今后将 (x_1, x_2, x_3) 叫作物体坐标，即是指定物体点 P_0 的一种参数。这个物体点和变形前位置在 $(x_1+dx_1, x_2+dx_2, x_3+dx_3)$ 上的点 Q_0 間的距离 P_0Q_0 用公式

$$ds_0^2 = d\boldsymbol{r}_0 \cdot d\boldsymbol{r}_0 = \sum_{i,j=1}^{3} \delta_{ij}\,dx_i\,dx_j \tag{2.2}$$

表示。这里 δ_{ij} 是 Kronecker 記号，当 $i=j$ 时，$\delta_{ij}=1$; $i \neq j$ 时，$\delta_{ij}=0$。

在变形后点 P_0 移到点 P, 命其新的位置向量为

$$\boldsymbol{r} = \boldsymbol{r}(x_1, x_2, x_3), \tag{2.3}$$

則 P_0Q_0 在变形后的长度 PQ 变为

$$ds^2=d\boldsymbol{r}\cdot d\boldsymbol{r}=\sum_{i,j=1}^{3} g_{ij}\,dx_i\,dx_j. \tag{2.4}$$

但在这里曾設

$$g_{ij}\equiv\frac{\partial \boldsymbol{r}}{\partial x_i}\cdot\frac{\partial \boldsymbol{r}}{\partial x_j}=g_{ji}, \tag{2.5}$$

所以应变張量 e_{ij} 可定义如下：

$$e_{ij}\equiv\frac{1}{2}\left(\frac{\partial \boldsymbol{r}}{\partial x_i}\cdot\frac{\partial \boldsymbol{r}}{\partial x_j}-\frac{\partial \boldsymbol{r}_0}{\partial x_i}\cdot\frac{\partial \boldsymbol{r}_0}{\partial x_j}\right)=e_{ji}, \tag{2.6}$$

或者用 g_{ij} 及 δ_{ij} 改写时，則有

$$e_{ij}=\frac{1}{2}(g_{ij}-\delta_{ij})=e_{ji}. \tag{2.7}$$

若命 P_0 点的变位(或位移)向量是 $\boldsymbol{u}(x_1, x_2, x_3)$，其分量为 (u_1, u_2, u_3)，則有

$$\boldsymbol{r}=\boldsymbol{r}_0+\boldsymbol{u}=\sum_{i=1}^{3}(x_i+u_i)\boldsymbol{i}_i, \tag{2.8}$$

于是 e_{ij} 可用变位分量表示为

$$e_{ij}=\frac{1}{2}\left(\frac{\partial u_i}{\partial x_j}+\frac{\partial u_j}{\partial x_i}+\sum_{k=1}^{3}\frac{\partial u_k}{\partial x_i}\frac{\partial u_k}{\partial x_j}\right)=e_{ji}. \tag{2.9}$$

直到現在，对于变位的大小还未加上任何限制。但在微小变位彈性論里，由于假設变位是微小的，所以在公式(2.9)里仅取变位的一阶項而略去高阶項。而且将微小变位理論里的 e_{ij} 改写为 ε_{ij} 时，則有

$$\varepsilon_{ij}=\frac{1}{2}\left(\frac{\partial u_i}{\partial x_j}+\frac{\partial u_j}{\partial x_i}\right)=\varepsilon_{ji}\quad (i, j=1, 2, 3). \tag{2.10}$$

在微小变位理論里，通常用 x, y, z 代替 x_1, x_2, x_3，用 u, v, w 代替 u_1, u_2, u_3，用 $\varepsilon_x, \varepsilon_y, \varepsilon_z, \gamma_{yz}, \gamma_{zx}, \gamma_{xy}$ 代替 $\varepsilon_{11}, \varepsilon_{22}, \varepsilon_{33}, 2\varepsilon_{23}, 2\varepsilon_{31}, 2\varepsilon_{12}$；亦即

$$\left.\begin{array}{lll}\varepsilon_x=\dfrac{\partial u}{\partial x}, & \varepsilon_y=\dfrac{\partial v}{\partial y}, & \varepsilon_z=\dfrac{\partial w}{\partial z}, \\ \gamma_{yz}=\dfrac{\partial w}{\partial y}+\dfrac{\partial v}{\partial z}, & \gamma_{zx}=\dfrac{\partial u}{\partial z}+\dfrac{\partial w}{\partial x}, & \gamma_{xy}=\dfrac{\partial v}{\partial x}+\dfrac{\partial u}{\partial y}.\end{array}\right\} \quad (2.11)$$

若想說明应变的几何意义，则 ε_x 是变形前平行于 x 軸的微小綫素在变形后的相对变形，ε_y 及 ε_z 的意义也是这样的。γ_{yz} 則是变形前平行于 y 軸的微小綫素和平行于 z 軸的微小綫素的交角(直角)在变形后的相差角，一般叫作剪应变。γ_{zx}，γ_{xy} 的意义也类此。

ε_x，ε_y，…，γ_{xy} 是按照(2.11)用三个量 u，v，w 的导数定义的六个量，所以它們不能相互无关。当任意确定 $\varepsilon_x,\varepsilon_y,\cdots,\gamma_{xy}$ 时，就可以按照(2.11)由单值連續的 u,v,w 导出充要条件，叫作协調条件。按照森口氏的写法，可以将微小变位理論的协調条件写成如下形状[4]：

$$\begin{pmatrix} R_x & U_z & U_y \\ U_z & R_y & U_x \\ U_y & U_x & R_z \end{pmatrix}=0, \qquad (2.12)❶$$

这里有

$$\left.\begin{aligned}
R_x&\equiv\frac{\partial^2\varepsilon_z}{\partial y^2}+\frac{\partial^2\varepsilon_y}{\partial z^2}-\frac{\partial^2\gamma_{yz}}{\partial y\,\partial z},\\
R_y&\equiv\frac{\partial^2\varepsilon_x}{\partial z^2}+\frac{\partial^2\varepsilon_z}{\partial x^2}-\frac{\partial^2\gamma_{zx}}{\partial z\,\partial x},\\
R_z&\equiv\frac{\partial^2\varepsilon_y}{\partial x^2}+\frac{\partial^2\varepsilon_x}{\partial y^2}-\frac{\partial^2\gamma_{xy}}{\partial x\,\partial y},\\
U_x&\equiv\frac{1}{2}\frac{\partial}{\partial x}\left(-\frac{\partial\gamma_{yz}}{\partial x}+\frac{\partial\gamma_{zx}}{\partial y}+\frac{\partial\gamma_{xy}}{\partial z}\right)-\frac{\partial^2\varepsilon_x}{\partial y\,\partial z},\\
U_y&\equiv\frac{1}{2}\frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{\partial\gamma_{yz}}{\partial x}-\frac{\partial\gamma_{zx}}{\partial y}+\frac{\partial\gamma_{xy}}{\partial z}\right)-\frac{\partial^2\varepsilon_y}{\partial z\,\partial x},\\
U_z&\equiv\frac{1}{2}\frac{\partial}{\partial z}\left(\frac{\partial\gamma_{yz}}{\partial x}+\frac{\partial\gamma_{zx}}{\partial y}-\frac{\partial\gamma_{xy}}{\partial z}\right)-\frac{\partial^2\varepsilon_z}{\partial x\,\partial y}.
\end{aligned}\right\} \quad (2.13)$$

---

❶ (2.12)就是意味着 $R_x=R_y=R_z=U_x=U_y=U_z=0$.

而且曾設所考慮的物体形成一个单連通域。

协調条件的意义可以这样解釋：将物体切离成小碎片，然后給各个小碎片以任意应变 $\varepsilon_x, \varepsilon_y, \cdots, \gamma_{xy}$；若各碎片的应变不适合条件(2.12)时，那末将它們再拼凑起来而成的物体里必然产生錯位現象。在一般的情形下，我們不考慮单連通物体发生錯位現象的問題，所以非恒滿足条件(2.12)不可❶。

在有限变位理論里，应变張量 e_{mn} 可以按(2.6)式导出的充要条件，亦即协調条件，是由 $g_{ij}=\delta_{ij}+2e_{ij}$ 所作的 Riemann 曲率張量 $R_{ijkl}=0$（参看本丛书中矢野著《几何学》§46；山本著《有限变位彈性論》）。

§3 应力与平衡方程

考慮变形前由六个面

$$x_i=\text{const}, \quad x_i+dx_i=\text{const} \tag{3.1}$$

所包圍着的微小六面体在变形后的平衡方程(图 3.1)。在变形后的六面体上作用的力，是通过六个面由外側的物体部分所作用的

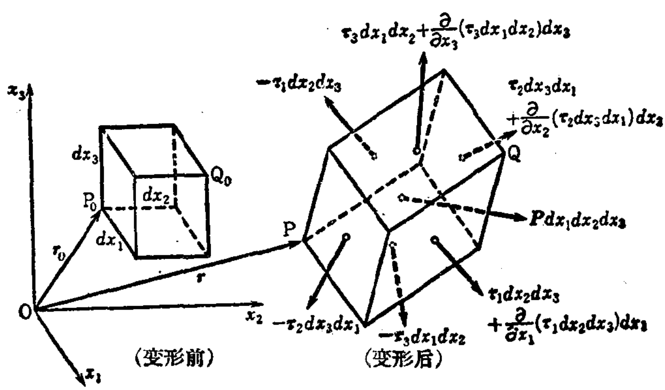

图 3.1 应　　力

❶ (2.11) 和 (2.12) 是等价的，今后就将 (2.11) 叫作协調条件。这两个式子的等价是由 Riemann 几何观点作出的。关于这一点可参看譯者序。——譯者注

內力，及象慣性力那样对应着六面体的质量而作用的所謂体力。若設变形前由 dx_2 和 dx_3 所作的矩形上，变形后作用的內力为 $\boldsymbol{\tau}_1 dx_2 dx_3$，則在六面体上作用的內力是

$$\left.\begin{aligned} &-\boldsymbol{\tau}_1 dx_2 dx_3, \quad \boldsymbol{\tau}_1 dx_2 dx_3+\frac{\partial}{\partial x_1}(\boldsymbol{\tau}_1 dx_2 dx_3)dx_1,\\ &-\boldsymbol{\tau}_2 dx_3 dx_1, \quad \boldsymbol{\tau}_2 dx_3 dx_1+\frac{\partial}{\partial x_2}(\boldsymbol{\tau}_2 dx_3 dx_1)dx_2,\\ &-\boldsymbol{\tau}_3 dx_1 dx_2, \quad \boldsymbol{\tau}_3 dx_1 dx_2+\frac{\partial}{\partial x_3}(\boldsymbol{\tau}_3 dx_1 dx_2)dx_3. \end{aligned}\right\} \tag{3.2}$$

若再把 τ_{ij} 定义为

$$\boldsymbol{\tau}_i \equiv \sum_{j=1}^{3} \tau_{ij} \frac{\partial \boldsymbol{r}}{\partial x_j} \quad (i=1,\ 2,\ 3), \tag{3.3}$$

且設变形前 dx_1, dx_2, dx_3 所包圍的微小六面体上，变形后作用的体力为 $\boldsymbol{P}dx_1 dx_2 dx_3$，則在这个微小六面体上作用的力及力矩的平衡方程为

$$\left.\begin{aligned} &\sum_{i=1}^{3}(\partial \boldsymbol{\tau}_i/\partial x_i)+\boldsymbol{P}=0,\\ &\tau_{ij}=\tau_{ji}. \end{aligned}\right\} \tag{3.4}$$

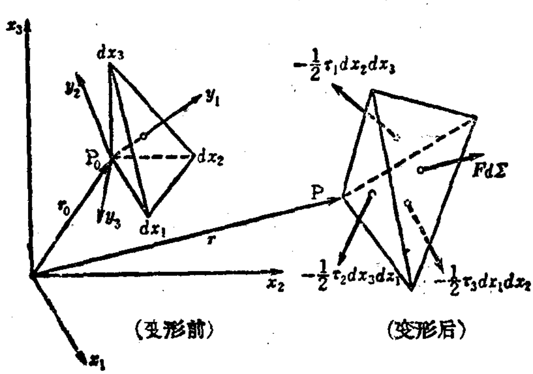

图 3.2 微小四面体

为了推出 τ_{ij} 的变換律，考虑图 3.2 那样的微小四面体的平衡。設变形前这个微小四面体的斜面的面积是 $d\Sigma$，变形后在这