重刚体繞不动点运动方程的积分法

B.B.歌路别夫 著

科學出版社

重剛體繞不動點
運動方程的積分法

B. B. 歌路別夫 著

何 衍 璿
張 燮 譯

科 學 出 版 社

1958 年[illegible]月

序 言

多年以來，作者在莫斯科國立羅蒙諾索夫大學對於本科生與研究生作過多次演講，本書卽根據這些演講而寫成，也是"微分方程的解析理論講義"[1] 的續篇. 本教程的內容，在將解析函數論的方法與微分方程的解析理論的方法應用於古典的力學問題——重剛體繞不動點的運動問題.

在編寫本教程時，作者抱了這樣的目的. 在數學的發展中，有一種問題佔着主導的地位，此種問題在使數學的內容近代化，特別，在將最普遍的問題與結論添到數學裏去. 在近代教育學中，也有同樣的趨勢. 按照克萊因 (F. Klein) 的天才的說法，數學的許多部門，頗爲類似於製造大砲與其他武器的兵工廠的武器模型的陳列窗；儘管發明家們發揮了極大的智慧，但是一旦發生了眞的戰爭時，這些新奇的武器往往會由於各種原因而不適用，因此一切都要重新做過，並且要考慮到實際情形的各種特點. 在數學的近代教學法中，也有很相似的情形；學者們親手做出了非常完備而有力的數學研究工具，在他們的畢業論文與博士論文中，學者們往往參與了發展與改進數學的工作，但他們以後却一點也不知道，在什麽地方與如何用這些有力而聰敏的方法，來解決整個科學的基本問題——認識環繞我們的宇宙以及人類的創造力對於它的影響的問題. 柴霍甫 (А. П. Чехов) 當年曾經說過，如果在劇本的第一幕裏面出現了一支槍，那麽至少在第三幕裏面它是要發射的. 這種說法對於數學的教學法也完全適用：如果教了學生某種理

---

1) Голубев В. В., Лекции по аналитической теории дифференциальных уравнений, Гостехиздат 1950 年第 2 版.

論，那麽遲早總要指出來，這種理論在力學、物理、工程以及其他部門中究竟有什麽用。

從這種觀點看來，重剛體的運動問題在由著名的柯瓦列夫斯克婭（С. В. Ковалевская）的研究所得到的那個方向，是具有獨到的豐富材料的．學者由這裏非常容易指出，古典力學的問題乍一看來與純粹數學的問題相距雖然很遠，但它們之間却有極其密切的關係；但後者的問題是：黎曼曲面的理論，泰塔函數，超橢圓積分的反轉法問題，微分方程論中的微小參數法等等．

在本書內，作者推演了解決力學問題所必需的純粹解析理論，並指出它們是用來解決力學問題而獲得成功的工具．這是本書的特點之一．我們知道，在重剛體繞不動點運動的理論中，虛擬運動的幾何研討是佔着本質的地位的．這種研究開始於卜安索(Poinsot)的古典著作，其後 19 世紀有許多學者繼起研究而做了許多工作，特別是茹可夫斯基（Н. Е. Жуковский），阿別里羅特（Г. Г. Аппельрот,），賈普利金（С. А. Чаплыгин）的美妙的結果；這些結果是討論阿別里羅特-赫斯（W. Hess）情形、С. В. 柯瓦列夫斯克婭情形以及歌里雅切夫（Горячев）-賈普利金情形中的運動的幾何解釋的，它們都不在本書的範圍以內，因爲本書專講問題的解析方面．讀者如果打算由幾何的觀點來補充這種問題的研究，可以參看蘇斯洛夫(Г. К. Суслов)的專著“理論力學”以及 Н. Е. 茹可夫斯基、Г. Г. 阿別里羅特與 С. А. 賈普利金的專門研究，其中有詳細的敍述．

在編輯本書與準備付印時，吉西涅夫斯基（Кишиневский）大學的老教師柯洛索夫斯克婭（А. К. Колосовская）以及莫斯科大學的許多本科生與研究生都出了很大的力，他們提出了不少的意見．又布洛赫（Э. Л. Блох）君在正文中作了許多重要的修正．作者在此謹向他們衷心地致謝．

В. 歌路別夫

目　次

引　　論

關於重剛體繞不動點運動的研究的問題，與另一個所謂三體問題的古典力學問題同爲理論力學裏面的最有名的問題之一．這兩個問題之所以有名，是因爲它們是一些問題的直接推廣，而這些問題是可以完全解決的，並且只須利用極爲簡單的古典數學分析的工具；又這兩個問題都有重大的困難，雖然過去兩個世紀中，有許多數學家在解決它們的時候得到了不少的美妙結果，但是距離完全解決的境界還遠得很．三體問題，或者在一般情形之下的 n 體問題，是兩個受牛頓引力作用的物體的運動問題的直接推廣；後一個問題牛頓早已美妙地完全解決了，但三體問題却非常困難，一直到最近數十年，在邦加賴 (Poincaré)、松德曼以及其他等人的工作中才得到了部分的克服．同樣，重剛體繞不動點的運動問題，是擺的振動問題的自然推廣；這裏也和上面一樣，擺的振動問題已經利用近代的數學工具而美妙地完全解決了，但重剛體繞不動點的運動問題却不然，儘管歐拉 (L. Euler)、拉格郎日 (J. L. Lagrange)、卜瓦松 (S. O. Poisson)、卜安索 (Poinsot) 以及更近代的 C. B. 柯瓦列夫斯克娅、邦加賴和其他的許多近代學者都得到了很美妙的結果，但距離完全解決的境地還非常遙遠．

關於剛體繞不動點運動的問題，最初的結果遠在18世紀的50年代便已經得到了．當時歐拉導出了著名的以他命名的方程，並指出了當支撐點是物體的重心時的最簡單情形[1]；但一直過了80

1) Euler L., Découverte d'un nouveau principe de mécanique. Mém. de l'Acad. des sciences de Berlin, 1750, 1758.

年之久，卜安索才將歐拉的運動情形作了美妙的幾何解釋[1]．其後雅科比（Jacobi）利用他所創造的橢圓函數論[2]而給出了歐拉情形下的運動方程的完全積分法；又拉格郎日也指出了這個問題的一種特殊情形的解法，此種情形後來曾爲卜瓦松所研究．

在上列作者的著作以後，有很長的一個時期，關於這方面並未有任何本質的進一步的結果——雖然數學家們經常注意到這個問題，而且巴黎科學院還設立了特別的波爾登獎金，來獎給對這種理論有本質的貢獻的人．一直到了 1888 年，才初次跨了具有決定性的一步，當時巴黎科學院的波爾登獎金獎給了 C. B. 柯瓦列夫斯克婭的論文；這篇著作標誌着上述問題的解法中的重大進步[3]．

表面上看起來，這裏對於力學問題的解法初次利用了近代的複變函數論的觀念（這種觀念是柯西（Cauchy）、黎曼（Riemann）、懷爾斯特拉司（Weierstrass）以及其他學者所創造的）；此外，在所論問題的方程的積分法問題中，得到了新的原始產品，這種產品足以決定所謂微分方程的解析理論．C. B. 柯瓦列夫斯克婭的著作的主導觀念是這樣的．在所有以前的熟知的情形下，重剛體繞不動點的運動方程，其積分均爲在變數 t 的整個複數平面上的單值遜整函數，原因是這種積分可以用橢圓函數表示出來．C. B. 柯瓦列夫斯克婭在她的著作中提出了下面的基本問題：求出一切使重剛體的運動方程的積分爲變數 t 的整個平面上的單值遜整函數的情形．

問題的這種提法，是原有力學問題的本質的擴張，並且這種擴張只有純粹數學的特性而無任何力學的意味．事實上，就力學的

1) Poinsot, Théorie nouvelle de la rotation des corps. Journ. de Liouville, T. XVI, 1851.

2) Jacobi, Sur la rotation d'un corps. Journ. de Crelle, T. 39, 頁 293.

3) Ковалевская С. В., Задача о вращении твердого тела около неподвижной точки. 參看 Ковалевская С. В., Научные работы. Изд-во АН СССР, 1948, 頁 153—220.

觀點而言，解答當然要是單值的，因爲在力學上不可能有這種情形，在同樣的初始條件下，發生不同的運動；但由於力學問題中的時間是實數，所以任何多值函數都可以滿足這種條件，只要它們的臨界點不在實數軸上即可．C. B. 柯瓦列夫斯克婭對於積分所作的遜整性的限制，其力學根據更少．就力學的觀點而言，我們沒有任何根據來對於方程的積分作出任何限制，除了在力學中的時間所變化的實軸上以外．

C. B. 柯瓦列夫斯克婭在這個問題中，首先作了這樣的擴張：考慮函數在變量 t 的整個複數平面上的展開式．這是原有力學問題的美妙的純數學的擴張，此種擴張對於近代複變函數論在實際問題中的應用而言，是非常突出的一點；這種觀念後來被利用了而且得到完全的成功．例如邦加賴以及稍後的松德曼在三體問題中，又 H. E. 茹可夫斯基與 C. A. 賈普利金在應用空氣動力學中都這樣做過[1]．

C. B. 柯瓦列夫斯克婭將時間看作複變量的這種觀念，使得成熟而優美的複變函數論的工具能够進一步地應用於研究中，在這方面，它標誌着近代分析方法在力學中的應用的新紀元．

事實證明，這種觀念使 C. B. 柯瓦列夫斯克婭得到了美妙的結果：除了古典的情形以外，C. B. 柯瓦列夫斯克婭的條件在另一種特殊情形之下也能成立，此時積分也是在變量 t 的整個複數平面上的遜整函數．用這種純數學的方法又找出了一種情形，使得重剛體繞不動點的運動方程能有完全的積分法．像 C. B. 柯瓦列夫斯克婭所指出的，在她所發現的情形下，方程組除了具有古典的代數的第一積分（動量積分與動能積分）以外，還有一個特殊的代數積分；而由古典的研究可知，在重剛體繞不動點的運動方程的積分法的所有以前已知的情形中，也都有這樣的情況發生．現在，

1）在機翼的理論中，機翼斷面的最初形式並不是由力學的論據來決定的，而是由保角映照的實施的可能性來決定的．

從這種積分的存在性即可使問題得到完全的積分法——此點由雅科比的所謂後添因子的古典研究可以推出來。

由 C. B. 柯瓦列夫斯克婭的著作,又引起了第二個原則性的重要問題. 嚴格說來,積分的遜整性條件與方程組能够完全積分的可能性並無直接的聯繫. 但現在由於多得了一個積分,便使方程完全可積. 於是與 C. B. 柯瓦列夫斯克婭的研究有關,又發生了原則上很重要的問題:在何種條件下,重剛體繞不動點運動的方程具有一個附加的第一積分,而且它可以簡單地表出來,也就是說,它是變量的代數函數或者單值函數?

在與 C. B. 柯瓦列夫斯克婭的研究同時,布隆司解決了三體問題中的類似的問題[1],他證明了,除去古典的積分(也就是面積積分與動能積分)以外,在三體問題或者更一般的 n 體問題中,别無其他的第一積分存在.

對於重剛體繞不動點運動的問題而言,這種類似的問題已經被邦加賴、海頓以及其他諸家的研究所解決[2]. 此時事實告訴我們,只有在古典情形與 C. B. 柯瓦列夫斯克婭的情形下,也就是說,當方程的積分是遜整函數的時候,才有第四個單值積分存在.

一直到目前我們還不知道,這種情形究竟是偶然的還是有這樣的一般定理存在:微分方程組具有單值的第一積分的必要條件是,它具有可以用遜整函數表示出來的通積分. 班勒衛 (Painlevé) 曾經注意到這個問題的重要性[3].

---

1) 例如參看 Whittaker E. T., Аналитическая динамика (俄譯本). ОНТИ, 1937, 頁 392.

2) 參看 Полубаринова-Кочина П. Я., Об однозначных решениях и алгебраических интегралах задачи о вращения тяжелого твердого тела около неподвижной точки. Сборник «Движение твердого тела вокруг неподвижной точки». Изд-во АН СССР, 1940.

3) Painlevé P., Sur les équations différentielles du second ordre à points critiques fixes. Bull. de la Societé math. de France, 1899.

本書講的便是上列作者所得到的結果． 這樣,本書的內容卽爲敍述近代複變函數論的方法對於力學的一個特殊問題(重剛體繞不動點運動的問題)的應用,也就是微分方程的解析理論的方法對於動力學方程的積分法的應用．

第一章　基本的運動方程；第一積分；後添因子的理論

§1.　動量矩；基本的運動方程

設用 $\boldsymbol{r}$ 代表質量爲 m 的質點關於某個不動坐標系的半徑矢，則

$$\boldsymbol{r} = x\boldsymbol{i} + y\boldsymbol{j} + z\boldsymbol{k},$$

其中 x, y, z 是點的坐標，此時可得點的速度 $\boldsymbol{v}$ 的表達式

$$\boldsymbol{v} = \frac{d\boldsymbol{r}}{dt},$$

從而動量可以表出爲

$$m\boldsymbol{v} = m\frac{d\boldsymbol{r}}{dt} \tag{1}$$

的形式.

由此卽得運動方程

$$\frac{d}{dt}m\boldsymbol{v} = \boldsymbol{F}, \tag{2}$$

其中 $\boldsymbol{F}$ 是作用於質點上的力.

因爲按照周知的公式，作用矢關於坐標原點的矩等於矢量作用點的半徑矢與所論矢量的矢性積，故

$$\mathrm{Mom}_O \boldsymbol{F} = \boldsymbol{r} \times \boldsymbol{F}, \tag{3}$$

又

$$\mathrm{Mom}_O m\boldsymbol{v} = \boldsymbol{r} \times m\boldsymbol{v}. \tag{4}$$

現在可以將公式 (4) 推廣到質點組的情形中． 設有質點組，其中一點的半徑矢是 $\boldsymbol{r}_k = x_k\boldsymbol{i} + y_k\boldsymbol{j} + z_k\boldsymbol{k}$，它的質量是 m_k，速度是 $\boldsymbol{v}_k$，從而

$$\boldsymbol{v}_k = \frac{d\boldsymbol{r}_k}{dt},$$

那麽用 $\boldsymbol{G}$ 代表系統的動量矩時,便有

$$\boldsymbol{G} = \sum_{k=1}^{n} \boldsymbol{r}_k \times m_k \boldsymbol{v}_k; \tag{5}$$

同樣,對於在體積 τ 內的連續分佈質量而言,有

$$\boldsymbol{G} = \iiint_\tau \boldsymbol{r} \times (dm\boldsymbol{v}) = \iiint_\tau \boldsymbol{r} \times \boldsymbol{v}\rho\, d\tau, \tag{6}$$

其中 ρ 是密度,而 $d\tau$ 是體積元素 ($d\tau = dx\,dy\,dz$).

由方程 (6) 可得:

$$\frac{d\boldsymbol{G}}{dt} = \iiint_\tau \left[\frac{d\boldsymbol{r}}{dt} \times \boldsymbol{v} + \boldsymbol{r} \times \frac{d\boldsymbol{v}}{dt}\right]\rho\, d\tau;$$

但

$$\frac{d\boldsymbol{r}}{dt} \times \boldsymbol{v} = \frac{d\boldsymbol{r}}{dt} \times \frac{d\boldsymbol{r}}{dt} = 0.$$

故

$$\frac{d\boldsymbol{G}}{dt} = \iiint_\tau \boldsymbol{r} \times \frac{d\boldsymbol{v}}{dt}\rho\, d\tau. \tag{7}$$

另一方面,

$$\rho\, d\tau \frac{d\boldsymbol{v}}{dt} = dm \frac{d\boldsymbol{v}}{dt} = d\boldsymbol{F},$$

其中 $d\boldsymbol{F}$ 是作用於質量 dm 上的力. 因此,方程 (7) 便具有如次的形式:

$$\frac{d\boldsymbol{G}}{dt} = \iiint_\tau \boldsymbol{r} \times d\boldsymbol{F}.$$

作用於物體質點上的一切力的力矩總和,稱爲物體的總矩;於是用 $\boldsymbol{L}$ 代表總矩時,便有

$$\boldsymbol{L} = \iiint_\tau \boldsymbol{r} \times d\boldsymbol{F}, \tag{8}$$

而方程 (7) 可以寫成

$$\frac{d\boldsymbol{G}}{dt} = \boldsymbol{L} \tag{9}$$

的形式。

矢量 $\boldsymbol{G}$ 是系統中特別如剛體所有各點的動量矩；它有時也叫做動力矩。這樣，方程 (9) 便代表動力學中的如次的基本定理：動力矩關於時間的導數，等於作用在物體上的力的總矩。

倘若關於某點作出矢量 $\boldsymbol{G}$ 的位置圖，那麼導數 $\frac{d\boldsymbol{G}}{dt}$ 便是位置圖上之點的速度，也就是矢量 $\boldsymbol{G}$ 的端點的速度，從而上面所證的定理即可用如次的方式給出：系統或者剛體關於某點的動力矩的端點速度，等於作用在系統或者剛體各點的力關於同上一點的總矩。這個動力學方程便是剛體繞不動點運動的整個理論的基礎。

§2. 繞不動點旋轉的物體的動量矩

倘若物體繞不動點旋轉（我們取這點作爲原點），則以 $\boldsymbol{\Omega}$ 代表物體的角速度時，便得到由半徑矢 $\boldsymbol{r}$ 所定的點的線速度 $\boldsymbol{v}$ 如下：

$$\boldsymbol{v} = \boldsymbol{\Omega} \times \boldsymbol{r}. \tag{1}$$

將這個值代入動力矩 $\boldsymbol{G}$ 的表達式中，則得

$$\boldsymbol{G} = \iiint_{\tau} \boldsymbol{r} \times \boldsymbol{v}\, dm = \iiint_{\tau} \boldsymbol{r} \times (\boldsymbol{\Omega} \times \boldsymbol{r})\, dm. \tag{2}$$

另一方面，按照矢量代數中的周知的公式，對於矢量的矢性積成立着下面的恆等關係式：

$$\boldsymbol{a} \times (\boldsymbol{b} \times \boldsymbol{c}) = \boldsymbol{b}(\boldsymbol{a} \cdot \boldsymbol{c}) - \boldsymbol{c}(\boldsymbol{a} \cdot \boldsymbol{b}),$$

因此，動力矩 $\boldsymbol{G}$ 又可以寫成

$$\boldsymbol{G} = \iiint_{\tau} [\boldsymbol{\Omega} r^2 - \boldsymbol{r}(\boldsymbol{r} \cdot \boldsymbol{\Omega})]\, dm \tag{3}$$

的形式。

設矢量 $\overset{\Omega}{\boldsymbol{G}}$ 在坐標軸上的分量爲 p, q, r，從而

$$\boldsymbol{\Omega} = p\boldsymbol{i} + q\boldsymbol{j} + r\boldsymbol{k},$$

則

$$\boldsymbol{\Omega} r^2 = \boldsymbol{\Omega}(x^2 + y^2 + z^2) = (p\boldsymbol{i} + q\boldsymbol{j} + r\boldsymbol{k})(x^2 + y^2 + z^2);$$

同樣,

$$\boldsymbol{r}(\boldsymbol{r}\cdot\boldsymbol{\Omega}) = (x\boldsymbol{i} + y\boldsymbol{j} + z\boldsymbol{k})(px + qy + rz),$$

故有

$$\begin{aligned}\boldsymbol{\Omega} r^2 - \boldsymbol{r}(\boldsymbol{r}\cdot\boldsymbol{\Omega}) = \boldsymbol{i}[p(x^2 + y^2 + z^2) - px^2 - x(qy + rz)] + \\ + \boldsymbol{j}[q(x^2 + y^2 + z^2) - qy^2 - y(px + rz)] + \\ + \boldsymbol{k}[r(x^2 + y^2 + z^2) - rz^2 - z(px + qy)].\end{aligned}$$

於是表達式 (3) 便成爲

$$\begin{aligned}\boldsymbol{G} = \boldsymbol{i}\iiint_\tau \{p(y^2 + z^2) - xyq - xzr\}\, dm + \\ + \boldsymbol{j}\iiint_\tau \{q(z^2 + x^2) - yzr - yxp\}\, dm + \\ + \boldsymbol{k}\iiint_\tau \{r(x^2 + y^2) - zxp - zyq\}\, dm.\end{aligned} \tag{4}$$

引用下列記號:

$$\iiint_\tau (y^2 + z^2)\, dm = A = J_{xx}, \qquad \iiint_\tau xy\, dm = J_{xy} = J_{yx},$$

$$\iiint_\tau (z^2 + x^2)\, dm = B = J_{yy}, \qquad \iiint_\tau xz\, dm = J_{xz} = J_{zx},$$

$$\iiint_\tau (x^2 + y^2)\, dm = C = J_{zz}, \qquad \iiint_\tau yz\, dm = J_{yz} = J_{zy}.$$

將這些值代入表達式 (4),便將它化爲

$$\begin{aligned}\boldsymbol{G} = \boldsymbol{i}(J_{xx}p - J_{xy}q - J_{xz}r) + \boldsymbol{j}(J_{yy}q - J_{yz}r - J_{yx}p) + \\ + \boldsymbol{k}(J_{zz}r - J_{zx}p - J_{zy}q).\end{aligned} \tag{5}$$

倘若軸 (x, y, z) 的方向沿着慣性橢球的主軸上,那麽我們知道,係數 J_{xy}, J_{yz}, J_{zx} 都等於零,從而表達式(5)具有更簡單的形式

$$G = i\,J_{xx}\,p + j\,J_{yy}\,q + k\,J_{zz}\,r,$$

或者

$$G = i\,Ap + j\,Bq + k\,Cr. \tag{6}$$

以後我們取附着於物體上的坐標軸時，永遠令它們沿着慣性橢球的主軸上，從而總動力矩恆有表達式 (6)。

§3 矢量的相對導數

設點 O 爲兩組笛卡兒直角坐標系的原點，並設 $\bar{i}, \bar{j}, \bar{k}$ 爲不動坐標系的基矢，又 i, j, k 爲不變地附着於剛體上的坐標系的基矢，而這個剛體繞不動點 O 運動. 設 R 爲由點 O 出發的變動矢，又 x, y, z 是它的端點在附着於物體上而運動的坐標系中的坐標，也就是

$$R = ix + jy + kz. \tag{1}$$

那麽

$$\frac{dR}{dt} = i\frac{dx}{dt} + j\frac{dy}{dt} + k\frac{dz}{dt} + x\frac{di}{dt} + y\frac{dj}{dt} + z\frac{dk}{dt}. \tag{2}$$

但 $\frac{di}{dt}$ 爲動坐標系的基矢端點的速度，故

$$\frac{di}{dt} = \Omega \times i,$$

同樣

$$\frac{dj}{dt} = \Omega \times j, \qquad \frac{dk}{dt} = \Omega \times k,$$

其中 Ω 是物體的角速度. 因此，

$$\frac{dR}{dt} = i\frac{dx}{dt} + j\frac{dy}{dt} + k\frac{dz}{dt} + \Omega \times (xi + yj + zk),$$

或者按照 (1)，

$$\frac{dR}{dt} = i\frac{dx}{dt} + j\frac{dy}{dt} + k\frac{dz}{dt} + \Omega \times R. \tag{3}$$

但

$$i\frac{dx}{dt} + j\frac{dy}{dt} + k\frac{dz}{dt}$$

是矢量 R 關於 t 的導數，它是當假設以 i, j, k 爲基矢的坐標系不動時而算出來的；這個導數可以叫做**矢量的相對導數**.